FORMES OPTIMALES ET CONTRÔLE OPTIMAL BILINÉAIRE : EXISTENCE, MÉTHODES OSCILLATOIRES & APPLICATIONS EN RÉACTION-DIFFUSION

IDRISS MAZARI

Séminaire donné dans le cadre du Séminaire de Mathématiques Appliquées du Collège de France, 7 Janvier 2022.
Travaux en collaboration avec Grégoire Nadin (LJLL, Paris Sorbonne Université, CNRS) et Yannick Privat (IRMA, Université de Strasbourg, Institut Universitaire de France)

1. Introduction

1.1. **De quoi parle-t-on ?** L'objectif global de cet exposé est le suivant : que peut-on dire d'un point de vue qualitatif sur des problèmes de contrôle optimal bilinéaire de la forme

$$\sup_{0\leq m\leq 1\,,\int m=m_0} \int j(u_m) \text{ sujet à } \mathcal{L}u = mu + \varphi(u)$$

où $\mathcal{L}$ est un certain opérateur parabolique ou elliptique. En d'autres termes, on s'intéresse à une classe de problèmes de contrôle optimal bilinéaires pour des équations de réaction-diffusion. De par leur omniprésence dans différents contextes (thermique, dynamique des populations...) ces problèmes ont suscité un engouement dans la communauté de mathématiques appliquées, soit du point de vue de la contrôlabilité [1,3,7] soit de celui du contrôle optimal [5,18,19,40]. Dans ce séminaire, nous présentons plusieurs résultats récents, notamment obtenus en collaboration avec Nadin et Privat [34, 35], ainsi que dans le récent [30] ; si le temps le permet, nous évoquerons également des thématiques connexes que nous avons expolorées avec Nadin et Toledo-Marrero [33].

Afin de donner des éléments de contexte, nous évoquerons également le problème de l'optimisation de la première valeur propre d'un opérateur de Schrödinger, c'est-à-dire que nous étudierons également le problème, bien plus connu :

$$\inf_{0\leq m\leq 1\,,\int m=m_0} \lambda_1(m) \text{ où } \lambda_1(m) \text{ est la première valeur propre de } -\Delta - m.$$

Les références principales pour l'étude de ce problème spectral sont [6, 13, 14, 20, 22, 25, 28].

1.2. **Que veut-on faire ?** Le but de cet exposé est double : d'une part, on veut fournir des renseignements sur l'*influence de l'hétérogénéité sptiale dans la dynamique des populations* et, d'autre part, établir des *propriétés qualitatives de problèmes de contrôle optimal bilinéaires*. Ce second objectif peut s'interpréter

Date: Version du 7 janvier 2022.
Key words and phrases. Contrôle optimal bilinéaire, existence de forme optimale, mathématiques pour la biologie, optimisation spectrale.

comme une contribution à l'étude de *l'existence de formes optimales* dans le calcul des variations.

Présentons, un peu plus en détail, ce que nous avons en ligne de mire quand nous parlons de *modèles hétérogènes de dynamique des populations.* Depuis les travaux séminaux de Fisher, Kolmogorov, Petrovski et Piskounov [17, 23], plusieurs lignes de recherches, emmenées par différents mathématiciens, ont permis d'acquérir une assez bonne compréhension du comportement qualitatif des équations de réaction-diffusion de la forme

$$(\partial_t - \Delta)u = f(x, u).$$

Dans ce modèle relativement simple, le terme $f(x, u)$ encode le terme de réaction et, potentiellement, modélise l'hétrogénéité du milieu considéré. Un exemple, dans le cas d'un environnement homogène, est la non-linéarité

$$f(u) = u(1 - u).$$

L'exemple le plus simple utilisé pour modéliser une hétérogéneité, qui est celui que nous garderons en tête lors de tout l'exposé, est celui d'une distribution hétérogène de ressources. Dans ce cas, la non-linéarité prend la forme

$$f(x, u) = u(m(x) - u)$$

où m est un certain potentiel.

1.2.1. *Modèle étudié.* Définissons avec plus de rigueur le modèle qui va nous intéresser, celui de l'équation bistable stationnaire. Ici, on considère, dans un domaine Ω borné régulier, ou dans le tore, une population de densité $\theta_{m,\mu}$, qui se diffuse avec une vitesse $\mu > 0$ (ce qui donne un terme $\mu\Delta$ dans l'équation), et qui a accès à des ressources. Les ressources sont modélisées par une fonction

$$m \in L^\infty(\Omega)$$

et, dans l'équation, ces ressources interviennent de manière *bilinéaire*, c'est-à-dire *via* un terme de la forme

$$m\theta_{m,\mu}.$$

On choisira le signe à mettre devant ce terme de sorte à garantir que les zones $\{m > 0\}$ correspondent à des zones favorables à la croissance de la population, et que les zones $\{m \leq 0\}$ correspondent à des zones défavorables. Enfin, le dernier élément de la modélisation est la présence d'un terme de compétition malthusienne, quadratique donc, de la forme $-\theta_{m,\mu}^2$. Si l'on recolle tous ces blocs ensembles, on obtient l'équation logisitque-diffusive

$$\begin{cases} -\mu\Delta\theta_{m,\mu} = m\theta_{m,\mu} - \theta_{m,\mu}^2 & \text{in } \Omega\,, \\ \partial_\nu\theta_{m,\mu} = 0\,, \\ \theta_{m,\mu} \geq 0\,, \theta_{m,\mu} \neq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Pour ne pas nous préoccuper des problèmes d'existence et d'unicité des solutions, nous nous préoccuperons exlcusivement des distributions de ressources m positives ou nulles. En d'autres termes, on supposera toujours

$$m \in L_+^\infty(\Omega).$$

Dans ces conditions, les résultats de [4, 12] garantissent l'existence et l'unicité d'une solution de (1.1). En utilisant ce modèle qui, malgré son apparente simplicité, se révèle riche d'enseignements, on peut essayer de *préciser l'influence de cette* *hétérogénéité m,* en essayant de résoudre un problème de contrôle optimal, comme d'optimiser la taille de la population

$$\max_{m\in\mathcal{M}}\left\{J(m)=\int_\Omega \theta_{m,\mu}\right\}, \tag{1.2}$$

et de voir ce que nous pouvons obtenir comme information sur les distributions optimales de ressources. Ici, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des contrôles admissibles. Puisqu'il s'agit de distributions de ressources, deux contraintes sont naturelles :

(1) Une contrainte L^∞ de la forme
$$0\leq m\leq 1$$
qui correspond à ce que l'on ne peut trouver, en un endroit fixé, qu'une quantité minimale et maximale de ressources.

(2) Une contrainte L^1, qui correspond à ce qu'évidemment, si le critère n'est pas trop mal fichu, il faut bien limiter la quantité maximale de ressources disponible pour ne pas trivialiser le problème ; en d'autres termes, on se fixe $m_0\in(0;\mathrm{Vol}(\Omega))$, et l'on suppose que nos distributions admissibles de ressources satisfont
$$\int_\Omega m=m_0.$$

Notre classe de contrôles admissibles est donc

$$\mathcal{M}(\Omega):=\left\{m\in L^\infty(\Omega)\,,0\leq m\leq 1\,,\int_\Omega m=m_0\right\}$$

et le problème d'optimisation qui nous occupe est

$$\max_{m\in\mathcal{M}(\Omega)}\int_\Omega \theta_{m,\mu}. \tag{1.3}$$

Remarque 1.1. *Ce problème est formulé dans [26, 27] ; dans [27], Y. Lou étudie ce problème d'optimisation en ne conservant que la contrainte L^1, et, en exhibant une suite maximisante, établit que sans cette contrainte aucun maximiseur n'existe. Ainsi, la classe $\mathcal{M}(\Omega)$ est la classe "minimale" pour avoir existence d'un maximiseur non trivial.*

D'une importance cruciale dans la classe des contrôles admissibles sont les fonctions bang-bang, c'est-à-dire les fonctions qui s'écrivent

$$m=\mathbb{1}_E.$$

D'une point de vue mathématiques pour la biologie, ces fonctions correspondent à ce que l'on appelle des patch models, c'est-à dire à des distributions qui connaissent des transitions très aigues.

Dans cette perspective, deux questions qualitatives naturelles se posent :

(1) La première est de savoir si les optimiseurs pour ce problème d'optimisation de la taille de la population sont des fonctions bang-bang, c'est-à-dire de savoir si $m^*=\mathbb{1}_E$. C'est une première question qu'il est naturel d'étudier, quand ce ne serait que pour répondre à l'interrogation plutôt générale dans ce contexte : les optimiseurs d'un problème sous contraintes saturent-ils ces contraintes ? Dans cet exposé, nous nous concentrerons essentiellement sur cette problématique.

(2) Dans un second temps, une autre question, elle aussi très riche, concerne la géométrie de ces optimiseurs : à supposer qu'ils soient bang-bang et que l'on puisse donc les identifier à des sous-ensembles du domaine Ω, quelles géométries peuvent avoir ces sous-ensembles ? Faut-il privilégier les distributions de ressources qui sont concentrées, ou au contraire fragmentées ? Nous ne parlerons pas de cette deuxième interrogation et nous renvoyons à [31, 35–37] pour les résultats afférents.

1.3. **Justification de l'étude de la propriété bang-bang.** Il y a trois motivations pour étudier la question du caractère (ou non) bang-bang des maximiseurs :

(1) **Du point de vue de l'écologie spatiale :** ceci généraliserait un paradigme bien connu pour un problème lié, celui de la survie optimale de la population, que nous évoquerons plus en détail dans la suite de cet exposé. Les références principales sont ici [6, 13, 14, 20, 22, 25, 28].

(2) **Du point de vue numérique :** pour les problèmes sous contraintes $L^\infty - L^1$, savoir que les maximiseurs sont bang-bang permet de mettre en place des algorithmes de gradient plutôt efficaces, de la manière suivante : en observant que le gradient de la fonction objectif s'identifie à une certaine fonction L^1 :
$$\nabla J(m) = \psi_m$$
au sens de la dualité $L^2 - L^2$, une manière possible d'améliorer le critère est de remplacer m par $\mathbb{1}_{\{\psi_m > \lambda\}}$ pour un certain multiplicateur de Lagrange λ, à condition que les ensembles de niveau de ψ_m soit de mesure nulle ; si certains maximiseurs ne sont pas bang-bang, les "bons" ensembles de niveaux sont de mesure positive, ce qui requiert des arguments d'ordre 2 pour savoir exactement ce que l'on doit faire. Nous évoquerons, en conclusion de cette présentation, comment des méthodes oscillatoires peuvent également s'adapter à ce cadre ; cette approche a été mise en œuvre dans [33].

(3) **Du point de vue de l'optimisation de forme :** une troisième motivation, elle plus "internaliste" est de savoir si un problème d'optimisation de formes possède une solution ou même de savoir ce qu'il advient des suites maximisantes : oscillent-elles, ou non ? Pour voir cela, on remarque simplement que l'ensemble des contrôles admissibles est en fait la compactification pour la topologie L^∞-faible-*, de l'ensemble
$$\mathcal{M}' = \{\mathbb{1}_E\,, E \subset \Omega\,, \mathrm{Vol}(E) = V_0\}\,.$$
En somme, on se demande si le problème d'optimisation de forme
$$\sup_{E\subset\Omega\,,\mathrm{Vol}(E)=V_0} \left(F(E) = J(\mathbb{1}_E)\right)$$
a une solution E^*. Notons qu'un résultat plutôt générique existe pour ces questions, le célèbre **théorème de Buttazzo-DalMaso** [6]. Ce théorème s'applique dans le "vrai" contexte de l'optimisation de forme ; essentiellement, ce résultat dit que

Monotonie de la fonctionnelle F + γ-continuité de la fonctionnelle$\Rightarrow \sup_{E\subset\Omega\,,\mathrm{Vol}(E)=V_0} F(E)$ admet une solution.

Or la γ-continuité consiste en la continuité des résolvantes du problème de Dirichlet sur le domaine E, ce qui n'est pas du tout adapté au cas des problèmes de contrôle optimal, mais plutôt à des problèmes isopérimétriques ou de type Faber-Krahn-c'était une des motivations initiales de [6]. Nous renvoyons à [21, Chapter 2] . En fait, la question à laquelle nous voulons répondre est la suivante : a-t-on un analogue "contrôle optimal" du théorème de Buttazzo-DalMaso ? Le cas de la taille de la population nous permettra d'identifier les "bonnes" hypothèses, ou du moins les hypothèses naturelles, qui permettent de donner une réponse positive.

1.4. **Le résultat principal : existence d'une forme optimale.**

1.4.1. *Le cas de la taille de la population.* Commençons par le cas de la taille de la population :

Theorem 1.1 ([35])**.** *Toute solution m^* de* (1.2) *est bang-bang.*

Comme nous le verrons dans la preuve, ce théorème est, dans son esprit, analogue à celui de Buttazzo-DalMaso, en ce qu'il suffit d'avoir une fonction croissante (la continuité est ici simplement la continuité de la fonctionnelle pour la convergence L^∞-faible* des contrôles, ce qui est dans cette classe de problèmes toujours acquis).

1.4.2. *Généralisation aux fonctionnelles croissantes.* Maintenant, prenons un peu de recul. En fait, en regardant notre classe de contrôles admissibles, on s'aperçoit que l'on se demande si les maximiseurs de certains problèmes d'optimisation sont des points extrémaux, et sous quels hypothèses. Habituellement, il suffit de garantir que la fonctionnelle à optimiser est ou convexe, ou concave. Dans le cadre des problèmes de contrôle linéaire, si on veut optimiser une fonctionnelle de la forme

$$J(m) = \int_\Omega j(u_m)$$

obtenir cette propriété requier des informations sur la concavité où la convexité de la fonction j elle-même. Dans le cadre des problèmes de contrôle bilinéaire, la convexité de la fonction j ne joue en fait aucun rôle. La vraie hypothèse est la **croissance** de la fonction j, quand les contrôles sont bilinéaires, et nous verrons que la croissance de la fonctionnelle implique une "presque" convexité, qui suffit à conclure [1].

La réponse à la dernière question de la section précédente, savoir, la croissance d'une fonctionnelle permet-elle de garantir qu'une forme optimale existe ou, dit différemment, la croissance d'une fonctionnelle garantit-elle que les maximiseurs sont bang-bang, cette réponse est positive, comme nous le verrons au cours de la preuve du théorème 1.1.

Les hypothèses naturelles sont les suivantes :

(1) Il faut que le contrôle intervienne de manière **bilinéaire** dans l'équation, ce qui est naturel. En tout cas, si le contrôle n'est que linéaire, on n'a aucune chance d'obtenir un résultat de ce type. En effet, si l'on considère une équation d'état de la forme

$$-\Delta u = f(u) + y$$

1. Ici, par "presque convexité" il faut entendre : dérivée seconde en un point non-extrémal de l'ensemble admissible strictement positive sauf sur un sous-ensemble de perturbations de dimension finie.

avec un contrôle y, la fonctionnelle

$$J(y) := \int u_y$$

hérite de la concavité ou convexité de la fonction f et, en particulier, quoi que la fonctionnelle soit croissante, on peut avoir des maximiseurs constants. C'est le cas avec l'équation logistique-diffusive, et les maximiseurs quand le contrôle est linéaire sont en fait constants. En fait :

Contrôle linéaire$\Rightarrow$ compétition entre f'' et j'' essentielle.
Contrôle bilinéaire $\Rightarrow$ signe de j' essentiel.

(2) Ensuite, il faut que l'état stationnaire soit stable (au sens où l'opérateur linéarisé a un principe du maximum) et que la fonctionnelle soit croissante.

(3) Enfin, il faut que l'état stationnaire soit borné dans L^∞, et uniformément minoré ; pour le moment, nos méthodes ne fonctionnent qu'avec des conditions de Robin ou de Neumann.

Dans ces conditions, on peut énoncer une généralisation de notre résultat : soit $F = F(x,z)$ une non-linéarité de classe C^2 en z, et soit, pour tout $m \in \mathcal{M}(\Omega)$, z_m l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta z_m = m z_m + F(x, z_m) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial z_m}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

On suppose que F est choisie de sorte que :

$$\textbf{(H)} \qquad \begin{array}{l} \text{Pour tout } m \in \mathcal{M}(\Omega), \text{ (1.4) a une unique solution positive } z_m. \\ \text{De plus, } \inf_{m\in\mathcal{M}(\Omega)} \inf_\Omega u_m > 0, \ \sup_{m\in\mathcal{M}(\Omega)} \|u_m\|_{C^1} < \infty. \end{array}$$

Remarque 1.2. (**H**) *est satisfaite dès que F satisfait :*

(1) $F(x,0) = 0$ et l'état stationnaire $z \equiv 0$ est instable.

(2) Uniformément en $x \in \Omega$, on a $\lim_{y\to\infty} F(x,y)/y = -\infty$.

On suppose également

$$\textbf{(H}'\textbf{)} \qquad \text{L'application } m \mapsto z_m \text{ est deux fois Gâteaux-différentiable,}$$

ce qui est garantit si l'état stationnaire est linéairement stable.

On définit le problème d'optimisation

$$\textbf{(P)} \qquad \sup_{m\in\mathcal{M}(\Omega)} J(m), \qquad \text{with } J(m) = \int_\Omega j(z_m).$$

Alors on a le théorème suivant :

Theorem 1.2 ([35])**.** *On suppose que $j' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Toutes les solutions de* (**P**) *sont bang-bang.*

On remarque alors, dans cette formulation, que l'on a bien un analogue du théorème de Butazzo-DalMaso dans un cadre relaxé. En effet, notre théorème ne requiert pas que les bornes sur m soient 0 et 1, et l'on pourrait aisément supposer

$$0 \leq m \leq \frac{1}{\varepsilon}, \int_\Omega m = \frac{1}{\varepsilon} m_0$$

pour un petit $\varepsilon > 0$. Alors, dans ces conditions, $z_{\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_E}$ est une approximation de la solution y_E de

$$\begin{cases} -\Delta y_E = F(x, y_E) & \text{in } E\,, \\ y_E \in W_0^{1,2}(E) \end{cases}$$

sous certaines conditions sur l'ensemble E, et notre problème devient une approximation du problème d'optimisation de formes

$$\sup_{E\subset\Omega\,,\mathrm{Vol}(E)=V_0} \int_E j(y_E).$$

La γ-continuité y est immédiate, et on retombe sur la même hypothèse de monotonie [2]. Nos méthodes sont cependant très différentes de celles de [6].

1.5. **Un peu de bibliographie.** Afin de souligner la difficulté inhérente à ces problèmes, relevons les contributions suivantes :

(1) Dans [16], plusieurs simulations pour des versions pénalisées du problème de l'optimisation de la taille de la population sont effectuées, qui confirment numériquement le caractère bang-bang des maximiseurs. C'est également dans cet article qu'on trouve plusieurs des résultats afférents à la différentiabilité des fonctionnelles qui nous intéresse.

(2) Dans [38], Nagahara et Yanagida démontre par un argument d'ordre deux une propriété que l'on peut qualifier de "propriété bang-bang faible" : si l'on considère une distribution de ressources admissible $m \in \mathcal{M}$ telle que l'ensemble $\{0 < m < 1\}$ ait un point intérieur, alors m ne peut être un maximiseur pour la taille de la population. Leur construction nécessite cependant de manière cruciale le caractère ouvert de la zone $\{0 < m < 1\}$. Notons que la question de la régularité pour ces problèmes de contrôle optimal est en général très délicate ; on renvoie à [14] pour le cas des fonctionnelles énergétiques.

(3) D'un point de vue plus applicatif, nous indiquons entre autres [15, 41] ; le caractère instructif du modèle pourtant très simple que nous étudions y est discuté du point de vue de la taille de la population.

(4) Enfin, pour de plus amples informations sur les problèmes d'optimisation et de contrôle optimal en mathématiques pour la biologie, nous invitons la lectrice intéressée à se référer à l'introduction de la thèse [29] ou aux deux récents surveys [24, 32].

2. Un premier exemple : optimisation d'une valeur propre de Schrödinger

Afin de donner un peu de contexte mathématique à tout ce que nous allons évoquer, présentons le cas, plus standard, de l'optimisation de valeurs propres de Schrödinger. Ici, on cherche toujours à comprendre un phénomène lié à l'écologie spatiale : comment répartir les ressources m afin de garantir qu'une petite population puisse croître et survivre ? Dans le cas de l'équation logistique-diffusive, et

2. Soulignons que ceci est formel. En effet, il se peut que se produisent des problèmes si l'ensemble E touche la fontière du domaine Ω, mais surtout, ces approximations ne sont valides que pour des ensembles E quasi-ouverts. De même, dans le théorème de Buttazzo-DalMaso, l'ensemble optimal obtenu ne l'est "que" dans la classe des quasi-ouverts. Nous renvoyons une fois de plus à l'article original [6] ainsi qu'à [21, Chapter 2].

suite aux travaux [8–11, 13, 39], cette question se ramène à faire en sorte, pour (1.1), que l'état stationnaire $z \equiv 0$ soit le plus instable possible. Puisque la linéarisation en $z \equiv 0$ est l'opérateur

$$\mathcal{L}_m : -\Delta - m,$$

de première valeur propre

$$\lambda_1(m) := \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega m u^2}{\int_\Omega u^2}$$

ce problème se ramène à résoudre

$$\min_{m \in \mathcal{M}(\Omega)} \lambda_1(m). \tag{2.1}$$

Quoique ce problème soit désormais très bien compris [6, 13, 14, 20, 22, 25, 28] in se pose ici simplement la question de savoir si, pour ce problème, on a la propriété bang-bang ; en d'autres termes : *les distributions de ressources les plus favorables à la survie des espèces sont-elles des fonctions caractéristiques d'ensemble ?* À cette question, la réponse est positive, et repose sur la concavité de l'application

$$m \mapsto \lambda_1(m).$$

Deux manières, pour obtenir cette concavité, sont possibles :

(1) La première est la plus rapide mais la moins facilement adaptable au cas de la taille de la population, est d'observer que la fonction λ_1, comme infimum de fonctions linéaires en m, est concave. En particulier, on peut choisir un minimiseur qui est un point extrémal de $\mathcal{M}(\Omega)$, donc une fonction bang-bang.

(2) La seconde est plus alambiquée, mais beaucoup plus robuste, et repose sur un calcul de dérivée seconde. Notons φ_m la fonction propre associée à $\lambda_1(m)$, donc

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_m = m\varphi_m + \lambda_1(m)\varphi_m & \text{dans } \Omega\,, \\ \partial_\nu \varphi_m = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \\ \varphi_m \geq 0\,, \int_\Omega \varphi_m^2 = 1. \end{cases}$$

On rappelle que cette valeur propre est simple, et donc que la deuxième valeur propre de $\mathcal{L}_m$ vérifie $\lambda_2(m) > \lambda_1(m)$. La valeur propre étant simple, l'application $m \mapsto (\lambda_1(m)\,, p_m)$ est différentiable. Fixons un contrôle m et une perturbation admissible h (*i.e.* telle que $m + th$ est admissible pour $t \geq 0$ suffisamment petit). On peut dériver l'équation aux valeurs propres, et l'on obtient, en notant $\dot{x}$ les quantités dérivées par rapport à m dans la direction h, et $\ddot{x}$ la double dérivée,

$$-\Delta\dot{\varphi} = (\lambda_1(m) + m)\,\dot{\varphi} + h\varphi_m + \dot{\lambda}_1\varphi_m\,, \partial_\nu\dot{\varphi} = 0$$

ainsi que la condition de normalisation, ce qui donne

$$\int_\Omega \varphi_m \dot{\varphi} = 0.$$

Ainsi, on obtient

$$\dot{\lambda}_1 = \int_\Omega \langle \nabla\varphi_m\,, \nabla\dot{\varphi}\rangle - \int_\Omega (\lambda_1(m) + m)\varphi_m\dot{\varphi} - \int_\Omega h\varphi_m^2 = -\int_\Omega h\varphi_m^2.$$

De la même manière,

$$-\Delta\ddot{\varphi} = (\lambda_1(m) + m)\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\lambda}_1\dot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \ddot{\lambda}_1\varphi_m\,, \partial_\nu\dot{\varphi} = 0$$

et

$$\int_\Omega (\dot{\varphi})^2 + \int_\Omega \ddot{\varphi}\varphi_m = 0$$

de sorte que

$$\frac{1}{2}\ddot{\lambda} = -\int_\Omega h\dot{\varphi}\varphi_m.$$

En utilisant l'équation sur $\dot{\varphi}$ on obtient

$$\frac{1}{2}\ddot{\lambda}_1 = -\int_\Omega |\nabla\dot{\varphi}|^2 + \int_\Omega m\dot{\varphi}^2 - \lambda_1(m)\int_\Omega \dot{\varphi}^2. \tag{2.2}$$

Une fois ici, en notant R le quotient de Rayleigh associé à $\lambda_1(m)$ on a

$$\frac{\ddot{\lambda}_1}{2} = (-R(\varphi_m) + \lambda_1(m))\int_\Omega \dot{\varphi}^2 < 0$$

car $\dot{\varphi}$ est orthogonale à la première fonction propre, et que la première valeur propre est simple. Donc λ_1 est strictement concave, et on conclut de la même manière.

Nous avons observé dans [35] les choses suivantes : dans le cas de la taille de la population, on a également une expression du type (2.2). Ensuite, même si le problème n'est pas spectral, et que l'on ne peut certainement pas utiliser d'argument de type "trou spectral", une expression du type (2.2) est suffisante. En fait, on a la morale vague suivante :

Pour un problème de contrôle optimal bilinéaire, si la fonctionnelle est croissante, alors la dérivée seconde se contrôle par une expression de type "quotient de Rayleigh" de la dérivée de l'état.

3. La preuve du théorème pour la taille de la population

3.1. **L'idée de la preuve.** L'idée principale de la preuve, tirée de [35], est relativement simple et repose sur un argument d'ordre 2, couplé à un raisonnement par l'absurde. Ainsi, dans toute la suite de l'exposé, on se fixe une répartition optimale de ressources que l'on nomme m^* et l'on suppose qu'en notant $\omega := \{0 < m^* < 1\}$ on a

$$\mathrm{Vol}(\omega) > 0.$$

On va construire une perturbation admissible supportée dans ω. À cet effet, calculons dans un premier temps les dérivées du critère. On a toujours, en dérivant l'équation par rapport à m dans une direction admissible h,

$$\begin{cases} -\mu\Delta\dot{\theta}_{m,\mu} - (m - 2\theta_{m,\mu})\dot{\theta}_{m,\mu} = h\theta_{m,\mu} & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial\dot{\theta}_{m,\mu}}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

de sorte que la dérivée du critère dans la direction h est

$$\dot{J}(m)[h] = \int_\Omega \dot{\theta}.$$

Évidemment, cette expression n'est pas tout à fait tractable, et l'on doit donc, à la différence des problèmes d'optimisation de valeurs propres, passer par un état adjoint. Si l'on introduit la fonction $p_{m,\mu}$ solution de

$$\begin{cases} -\mu\Delta p_{m,\mu} - p_{m,\mu}(m-2\theta_{m,\mu}) = 1 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p_{m,\mu}}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

on obtient

$$\dot{J}(m)[h] = \int_\Omega p_{m,\mu}\theta_{m,\mu}h.$$

À ce stade notons que dans cette expression est encodée la croissance de la fonctionnelle. En effet, la première valeur propre de $-\mu\Delta - (m-\theta_{m,\mu})$ étant nulle, la première valeur propre de $-\mu\Delta - (m-2\theta_{m,\mu})$ est strictement positive. Ainsi,

$$\Psi_{m,\mu} := p_{m,\mu}\theta_{m,\mu} > 0$$

et on a même

$$\inf_\Omega \Psi_{m,\mu} > 0.$$

3.2. **Calcul de la dérivée seconde.** On peut ensuite calculer la dérivée seconde de ce critère, via le même type de calculs : tout d'abord, la dérivée seconde de l'application $m \mapsto \theta_{m,\mu}$ est la solution $\ddot{\theta}_{m,\mu}$ de

$$\begin{cases} -\mu\Delta\ddot{\theta}_{m,\mu} - (m-2\theta_{m,\mu})\ddot{\theta}_{m,\mu} = 2h\dot{\theta}_{m,\mu} - 2\dot{\theta}_{m,\mu}^2 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\ddot{\theta}_{m,\mu}}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$\ddot{J}(m)[h,h] = \int_\Omega \ddot{\theta}_{m,\mu}.$$

Les mêmes causes entraînant les mêmes conséquences, on peut utiliser l'état adjoint $p_{m,\mu}$ et en déduire que

$$\frac{1}{2}\ddot{J}(m)[h,h] = \int_\Omega h\dot{\theta}_{m,\mu}p_{m,\mu} - \int_\Omega p_{m,\mu}\dot{\theta}_{m,\mu}^2.$$

Oublions un instant le second membre de l'expression de droite pour nous concentrer sur le premier, à savoir

$$\int_\Omega h\dot{\theta}_{m,\mu}p_{m,\mu}.$$

De l'équation (3.1) on sait que

$$h = \frac{-\mu\Delta\dot{\theta}_{m,\mu} - \dot{\theta}_{m,\mu}(m-2\theta_{m,\mu})}{\theta_{m,\mu}},$$

d'où l'on déduit, en posant $\psi_{m,\mu} := \frac{p_{m,\mu}}{\theta_{m,\mu}}$ que

$$\int_\Omega hp_{m,\mu}\dot{\theta}_{m,\mu} = \int_\Omega \psi_{m,\mu}\left(-\mu\dot{\theta}_{m,\mu}\Delta\dot{\theta}_{m,\mu} - \dot{\theta}_{m,\mu}^2(m-2\theta_{m,\mu})\right).$$

Or, puisque

$$-\dot{\theta}_{m,\mu}\Delta\dot{\theta}_{m,\mu} = -\frac{1}{2}\Delta\left(\dot{\theta}_{m,\mu}^2\right) + \left|\nabla\dot{\theta}_{m,\mu}\right|^2$$

on a

$$-\int_\Omega \mu\psi_{m,\mu}\dot{\theta}_{m,\mu}\Delta\dot{\theta}_{m,\mu} = -\frac{\mu}{2}\int_\Omega \dot{\theta}_{m,\mu}^2\Delta\psi_{m,\mu} + \mu\int_\Omega \psi_{m,\mu}\left|\nabla\dot{\theta}_{m,\mu}\right|^2.$$

En calculant de manière explicite $\Delta\psi_{m,\mu}$, on voit que c'est une fonction bornée. Puisque $\inf_\Omega \Psi_{m,\mu} > 0$ on a en outre $\inf_\Omega \psi_{m,\mu} > 0$ et donc, en combinant tous ces élements, il existe deux constantes $\alpha\,,\beta > 0$ telles que

$$\ddot{J}(m)[h,h] \geq \alpha \int_\Omega \left|\nabla\dot{\theta}_{m,\mu}\right|^2 - \beta \int_\Omega \left(\dot{\theta}_{m,\mu}\right)^2.$$

3.3. **Analyse de la dérivée seconde.** Maintenant, voyons ce que l'on peut faire de cette expression quand on la spécifie en notre maximiseur non bang-bang m^*. L'ensemble singulier ω étant de mesure positive, toute fonction h dans $L^2(\omega)$, étendue par zérosur ω^c, est une perturbation admissible si $\int_\Omega h = 0$. Notons

$$\mathcal{X} := L^2(\omega) \cap \left\{h\,, \int_\omega h = 0\right\}.$$

Évidemment, $\mathcal{X}$ est de dimension infinie.

Pour obtenir une contradiction, il suffit de construire une perturbation h, supportée dans ω, et telle que

$$\int_\Omega \left|\nabla\dot{\theta}_{m,\mu}\right|^2 \gg \int_\Omega \left(\dot{\theta}_{m,\mu}\right)^2.$$

Or, on sait qu'en notant $L := -\mu\Delta - (m - 2\theta_{m,\mu})$ la fonction $\dot{\theta}_{m,\mu}$ est solution de

$$L\dot{\theta}_{m,\mu} = -h\theta_{m,\mu}$$

avec des conditions de Neumann. Notons $\{\phi_k, \lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ les éléments propres de L. Il suffit donc de trouver, un entier K arbitraire étant fixé, une perturbation h_K supportée dans ω telle que

$$\dot{\theta}_{m,\mu} = \sum_{k=K}^{\infty} \alpha_k\phi_k\,, \sum_{k=K}^{\infty} \alpha_k^2 > 0.$$

Or, trouver une telle fonction h_K est facile ! Il suffit de s'arranger pour que l'on aie

$$h_K\theta_{m,\mu} = \sum_{k=K}^{\infty} \beta_k\phi_k\,, \sum_{k=K}^{\infty} \beta_k^2 = 1$$

ce qui revient à demander que la fonction $h_K\theta_{m,\mu}$ soir orthogonale aux K premières fonctions propres. Ainsi, si l'on définit, pour tout indice ℓ, la forme linéaire

$$T_\ell : \mathcal{X} \ni h \mapsto \int_\omega h\theta_{m,\mu}\phi_\ell$$

on veut simplement trouver une fonction

$$h_K \in \cap_{\ell=0}^{K-1} \ker(T_\ell).$$

Ce dernier espace étant une intersection finie d'hyperplans, il est de co-dimension finie et, l'espace ambiant étant de dimension infinie, il est en particulier non vide. La preuve est complète.

3.4. **Extensions aux problèmes bilinéaires croissants.** En partant de cette preuve, on voit facilement comment ce théorème peut se généraliser. On s'est uniquement servi de la bilinéarité du contrôle pour faire apparaître le terme $\int_\Omega \psi_{m,\mu}|\nabla\dot{\theta}_{m,\mu}|^2$, puis de la positivité de l'état adjoint et de l'état (tout court) pour trouver la bonne minoration de la dérivée seconde, ce qui suffit à conclure.

4. Extensions, généralisations, obstructions

Dans cette section plus conclusive, nous abordons quelques possibles généralisations de notre méthode, et expliquons les principales obstructions.

4.1. **Le cas elliptique.**

4.1.1. *Conditions de Robin.* Dans le cas elliptique, une généralisation assez naturelle de notre résultat concerne l'optimisation de conditions de Robin. Pour simplifier la présentation, nous ne donnons que le cas linéaire, mais le cas d'équations d'état non-linéaire se traite exactement de la même manière.

On définit, un domaine borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ étant fixé ($d \geq 2$), l'ensemble

$$\mathcal{B}(\partial\Omega) := \left\{ \beta \in L^\infty(\partial\Omega)\,, 0 \leq \beta \leq 1 \text{ p.p.}, \int_{\partial\Omega} \beta = \beta_0 \text{ fixé} \right\}.$$

Pour un terme source fixé $f \in L^\infty(\Omega)\,, f \geq 0$ on définit u_β comme l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_\beta = f & \text{dans } \Omega\,, \\ \frac{\partial u_\beta}{\partial \nu} + \beta u_\beta = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Alors, modulo quelques adaptations pas tout à fait triviales de la méthode exposée dans ce séminaire, on peut démontrer (voir [34]) que, j étant une fonction croissante donnée, toute solution du problème d'optimisation

$$\max_{\beta \in \mathcal{B}(\partial\Omega)} \int_{\Omega/\partial\Omega} j(u_\beta)$$

est bang-bang. Deux remarques s'imposent ici :

(1) De manière similaire à ce que nous avons exposé dans le cas des problèmes de contrôle bilinéaire, il s'agit ici d'une relaxation d'un problème d'optimisation d'une frontière mixte Dirichlet/Neumann.
(2) Ensuite, une description aussi précise du type de perturbations dont nous avons besoin n'est pas possible quand on optimise des critères de la forme $\int_{\partial\Omega} j(u_\beta)$, et l'on doit plutôt utiliser la formulation alternative suivante de notre preuve : si la dérivée second, en un contrôle anormal, était toujours négative, alors, dans le cas d'un contrôle bilinéaire, on aurait l'existence d'une constante C telle que
$$\int_\Omega |\nabla \dot{\theta}_{m,\mu}|^2 \leq C \int_\Omega \dot{\theta}_{m,\mu}^2$$
pour toute perturbation h supportée dans l'ensemble ω. En particulier, par injection de Sobolev, toute famille bornée dans $\mathcal{Y} := \{\dot{\theta}_{m,\mu}\,, h \in \mathcal{X}\} \subset L^2(\Omega)$, aurait une valeur d'adhérence forte dans $L^2(\Omega)$. Or, $\mathcal{Y}$ est un espace vectoriel de dimension infinie, ce qui est absurde.

4.2. **Le cas parabolique.**

Ceci nous amène à discuter, brièvement, le cas des problèmes paraboliques. Ce cas-ci se révèle beaucoup plus délicat que le cas elliptique et nous présentons principalement ici les récents résultats de [30], qui ne sont valables qu'en dimension un. Ici, l'équation d'état est la suivante : $f = f(t, x, u)$ étant une certaine fonction régulière (suffisamment, en un sens que nous ne précisons pas), $\mathbb{T}$ étant le tore unidimensionnel, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T})\,, \inf u_0 > 0$ étant une donnée initiale donnée, T étant un horizon temporel, on considère, pour tout contrôle

$m = m(x) \in \mathcal{N}(\mathbb{T}) := \left\{0 \leq m \leq 1 \,, \fint_{\mathbb{T}} m = m_0\right\}$ la solution u_m de l'équation de la chaleur semi-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u_m}{\partial t} - \Delta u_m = m u_m + u_m f(t, x, u_m) & \text{dans } (0;T) \times \mathbb{T}\,, \\ u_m(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

De manière similaire au cas elliptique, on définit notre fonction coût par deux non-linéarités $j_1 \,, j_2$, et la fonctionnelle à optimiser est

$$\mathcal{J} : m \mapsto \iint_{(0;T)\times\mathbb{T}} j_1(u_m) + \int_{\mathbb{T}} j_2\left(u_m(T, \cdot)\right).$$

On aimerait obtenir un résultat analogue à celui que nous avons présenté dans le cas elliptique, à savoir : si j_1 et j_2 sont deux fonctions croissantes, et si $j_1' > 0$ ou $j_2' > 0$, alors toute solution du problème d'optimisation

$$\sup_{m \in \mathcal{N}(\mathbb{T})} \mathcal{J}(m)$$

est bang-bang. Ce résultat est effectivement valable, mais est beaucoup plus délicat à obtenir, pour la raison suivante : en notant toujours $\dot{x}$ la dérivée d'une quantité x par rapport à une variation du contrôle m dans une direction h (et, de même $\ddot{x}$ pour les dérivées secondes), on peut démontrer que sous ces hypothèses de croissance, il existe trois constantes $\alpha \,, \beta \,, \gamma > 0$ telles que

$$\ddot{\mathcal{J}}(m)[h, h] \geq \alpha \iint_{(0;T)\times\mathbb{T}} |\nabla \dot{u}|^2 - \beta \iint_{(0,T)\times\mathbb{T}} (\dot{u})^2 - \gamma \int_{\mathbb{T}} \dot{u}(T, \cdot)^2, \tag{4.3}$$

où la fonction $\dot{u}$ est solution d'une équation parabolique de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{u}}{\partial m} - \Delta \dot{u} = h u_m + V(t, x)\dot{u} & \text{in } (0;T) \times \mathbb{T} \\ \dot{u} = 0 & \text{in } \mathbb{T}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Dans (4.4), V est un potentiel uniformément borné en espace et en temps. Il serait tentant de conclure ici exactement comme dans le cas parabolique, mais cela est impossible (ou du moins hors de portée), si l'on reprend les voies que nous avons explorées ; rappelons que l'on raisonne par l'absurde, en considérant un maximiseur m^* qui n'est pas bang-bang, et en travaillant avec des perturbations h à support dans l'ensemble singulier $\{0 < m^* < 1\}$. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble de ces perturbations admissibles, qui forme un espace vectoriel de dimension infinie.

(1) On peut essayer d'arguer comme nous l'avons suggéré dans le cas de conditions de Robin, en invoquant un argument de compacité, qui reviendrait ici à dire la chose suivante : s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall h \in \mathcal{X} \,, C \iint_{(0;T)\times\mathbb{T}} |\nabla \dot{u}|^2 \leq \iint_{(0,T)\times\mathbb{T}} (\dot{u})^2 + \int_{\mathbb{T}} \dot{u}(T, \cdot)^2$$

alors on aimerait conclure que l'espace $\mathcal{Y} := \{\dot{u}[h] \,, h \in \mathcal{X}\}$ est de dimension finie, ce qui est impossible. Néanmoins, ceci est faux car, pour pouvoir utiliser une injection de Sobolev, il faut avoir un contrôle de la dérivée en temps, chose ici impossible.

(2) On peut ensuite tenter de construire une perturbation $h \in \mathcal{X}$ telle que

$$\forall t \in (0;T) \,, \dot{u}(t, x) = \sum_{k=K}^{\infty} f_k(t) \cos(kx)$$

pour un certain entier naturel K fixé. Ceci semble, sinon impossible, du moins extrêmement dur. Pour s'en convaincre, faisons comme si l'on avait $f \equiv 0$, de sorte que $\dot{u}$ ne résoud que

$$\partial_t \dot{u} - \Delta \dot{u} = u_m(t,x)h(x).$$

Pour construire un h satisfaisant, il est nécessaire d'avoir une fonction h qui satisfasse, en particulier (si l'on songe au cas $k = 0$)

$$\forall t \in (0;T)\,, \int_{\mathbb{T}} u_m(t,\cdot)h = 0.$$

Or, u_m est solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u_m - \Delta u_m = m u_m.$$

En notant ϕ_k les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta - m$, on a

$$u_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-t\lambda_k} \phi_k(x).$$

Si chacune des valeurs propres est simple, fait vérifié en dimension 1, si la donnée initiale u_0 n'a, dans cette base, que des coefficients de Fourier non nuls, alors on s'aperçoit que l'espace Vect $\{u_m(t,\cdot)\}_{t\in[0;T]} \subset L^2(\mathbb{T})$ génère $L^2(\mathbb{T})$ tout entier. Ainsi, une telle fonction h serait identiquement nulle, ce qui serait problématique.

(3) Une autre possibilité serait de se dire qu'au fond on peut choisir des contrôles m qui dépendent à la fois du temps et de l'espace, afin de pallier la difficulté évoquée au point précédent et de choisir, pour tout t, une fonction h_t telle que

$$\forall k \leq K-1\,, \int_{\mathbb{T}} u_m(t,\cdot)h_t \cos(k\cdot) = 0,$$

puis de définir $h(t,x) := h_t(x)$. Nonobstant le fait qu'ajouter une telle contrainte serait problématique du point de vue des estimations de la dérivée seconde, ceci ne fournirait *a priori* pas une fonction mesurable, puisque l'on utilise ici l'axiome du choix dans sa version forte.

Après avoir listé toutes ces difficultés, expliquons comment dans [30] nous contournons ce problème. L'ingrédient essentiel est l'utilisation de développements à deux échelles. Plus précisément, nous revoyons nos objectifs à la baisse ; au lieu de chercher une perturbation h_K telle que

$$\dot{u} = \sum_{k=K}^{\infty} a_k(t)\cos(kx) + b_k(t)\sin(kx)$$

nous cherchons une perturbation h_K telle que

$$\dot{u} \approx \sum_{k=K}^{\infty} a_k(t)\cos(kx) + b_k(t)\sin(kx)$$

en un sens suffisamment fort. Précisons d'entrée de jeu que ce développement ne sera pas valable dans $W^{1,2}(\mathbb{T})$ tout entier, mais qu'il le sera au sens des gradients. Ensuite, soulignons la chose suivante : pour déterminer une telle perturbation h_K, on la choisit fortement oscillante, c'est-à-dire qu'on considère une suite de perturbations $\{h_K\}_{K\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall K \in \mathbb{N}\,, h_K = \sum_{k=K}^{\infty} a_{K,k}\cos(kx) + b_{K,k}\sin(kx)\,, \sum_{k=K}^{\infty} a_{K,k}^2 + b_{K,k}^2 = 1.$$

Une manière aisée d'obtenir le développement souhaité serait alors d'invoquer les résultats d'Allaire et Briane [2], qui donne directement ce que l'on veut, mais à la condition (forte) que l'on travaille avec des séries lacunaires, ou, dit autrement, avec des phases qui se séparent. Hors, le principe d'incertitude de Zýgmund indique que les séries lacunaires ont un support de mesure pleine, ce qui prohibe leur utilisation, l'ensemble anormal pouvant *a priori* ne pas être de mesure pleine. On doit donc redémontrer le résultat à la main et, plus précisément, on obtient le résultat d'approximation suivant : si

$$h_K = \sum_{k=K}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

et si l'on définit

$$\begin{aligned} Z_K := &\sum_{k=K}^{\infty} a_k \left(\frac{u_m}{k^2}\cos(kx)(1-e^{-k^2t}) - \frac{2\partial_x u_m}{k^3}\sin(kx)(1-k^2te^{-k^2t}-e^{-k^2t})\right) \\ &+ \sum_{k=K}^{\infty} b_k \left(\frac{u_m}{k^2}\sin(kx)(1-e^{-k^2t}) + \frac{2\partial_x u_m}{k^3}\cos(kx)(1-k^2te^{-k^2t}-e^{-k^2t})\right), \end{aligned}$$

alors :

Lemma 4.1. *Il existe une constante C_{cont} telle que, pour tout $\Upsilon > 0$,*

(4.5)
$$\begin{aligned} \int_0^T \|\dot{u}_m - Z_K(t,\cdot)\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{T})}\,dt + \|\dot{u}_m(T,\cdot) - Z_K(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C_{\text{cont}}}{\Upsilon}\sum_{k=K}^{\infty}\frac{a_k^2+b_k^2}{k^4} \\ + \Upsilon C_{\text{cont}} \sum_{k=K}^{\infty}\frac{a_k^2+b_k^2}{k^2}. \end{aligned}$$

Si l'approximation n'est pas aussi forte que l'on pourrait le souhaiter, c'est que l'on manque de régularité en temps et en espace sur la fonction u_m.

4.3. **Problème de contrôle optimal linéaire.** Dans l'ultime section de ce séminaire, nous présentons les résultats de [33], qui nous servent à montrer que nos résultats sont optimaux quant à la bilinéarité du contrôle. Dans [33], nous nous intéressons à un problème de contrôle optimal par rapport à la condition initiale d'une équation de réaction-diffusion, mais nos méthodes peuvent sans problèmes être utilisées pour des problèmes de contrôles linéaires paraboliques. Cet exemple illustre également le point que nous avons évoqué dans l'introduciton, à savoir que, quand le contrôle intervient de manière linéaire, il y a une compétition entre la non-linéarité qui intervient dans l'équation d'état et celle qui intervient dans la définition de la fonctionnelle.

On considère une non-linéarité f et, pour varier les plaisirs, on suppose que f représente l'autre classe fondamentale de non-linéarités en mathématiques pour la biologie, à savoir que f est une non-linéarité bistable :

$$f(u) = u(1-u)(u-\theta).$$

On travaille dans le tore $\mathbb{T}$ et on considère, pour toute donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$ donnée, la solution u de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) & \text{in } (0;T)\times\mathbb{T}\,, \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

Dans la plupart des cas, u représente la proportion d'une population globale qui possède un certain trait, on suppose donc

$$0 \leq u_0 \leq 1 \text{ p.p.}$$

T étant un horizon temporel fixé, on cherche à résoudre le problème d'optimisation

$$\sup_{u_0 \in \mathcal{U}} \int_\Omega u(T,\cdot).$$

La classe des données initiales admissibles $\mathcal{U}$ est encore décrite par une contrainte L^∞ et une contrainte L^1 :

$$\mathcal{U} = \left\{ u_0 \in L^\infty(\mathbb{T})\,, 0 \leq u_0 \leq 1\,, \int_{\mathbb{T}} u_0 = m_0 \right\}.$$

Dans ce cadre, on est typiquement dans une situation où les maximiseurs ne seront pas bang-bang, ce qui, du reste, est illustré par nos simulations numériques. Se pose alors la question de savoir comment obtenir ces simulations numériques. En effet, notons J la fonctionnelle à maximiser. On peut démontrer que, si l'on représente toujours par des quantités pointées les quantités dérivées par rapport au contrôle dans une direction h_0, on a

$$\dot{J}(u_0)[h] = \int_{\mathbb{T}} h(x) p_{u_0}(0,x)dx$$

avec p_{u_0} solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{u_0}}{\partial t} + \Delta p_{u_0} = -f'(u) p_{u_0} & \text{dans } (0;T)\times\mathbb{T}\,, \\ p_{u_0}(T,\cdot) = 1 & \text{dans } \mathbb{T}. \end{cases}$$

Dire que les optimiseurs u_0^* ne sont pas bang-bang, c'est dire qu'en un optimiseur, l'état adjoint p a un ensemble de niveau de mesure positive. Si l'on essaie de faire un procédé itératif (une presque descente de gradient) alors on doit spécifier ce qui se produit sur ces ensembles de niveau. Plus précisément (on renvoie à [33] pour les détails), pour mettre en œuvre cet algorithme, on procède de la manière suivante : partant d'une donnée initiale $u_{0,n}$, on calcule l'état adjoint associé p_n. On regarde $p_n(0,\cdot)$ et s'il existe c_n tel que

$$\text{Vol}(\{p_n > c_n\}) < m_0 \leq \text{Vol}(\{p_n \geq c_n\})$$

on pose $u_{0,n+1} = 1$ sur $\{p_n > c_n\}$ et, sur $\{p_n = c_n\}$, on doit résoudre une équation de la forme

$$f'(u_{0,n+1}) = -\frac{\partial_t p_n(0,\cdot)}{c_n}.$$

Or cette équation peut avoir deux racines, d'où la nécessité d'avoir un critère permettant d'en sélectionner l'une des deux de manière univoque. Alternativement, on peut directement travailler en un maximiseur et se poser la question suivante : *que se passe-t-il sur* $\{u_0^* = \lambda\}$ si cet ensemble est de mesure strictement positive

$(\lambda \in (0,1))$? Cette fois, on peut montrer (nous n'entrons pas dans les détails ici) que la dérivée seconde du critère prend la forme

$$\ddot{J}(u_0)[h,h] = \iint_{(0;T)\times\mathbb{T}} f''(u)\dot{u}^2 p_{u_0},$$

$$\text{avec } \begin{cases} \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} - \Delta \dot{u} = f'(u)u & \text{dans } (0;T)\times\mathbb{T}\,, \\ \dot{u}(0,\cdot) = h(x) & \text{dans } \mathbb{T}. \end{cases}$$

On voit sur cette expression la différence principale avec le cas bilinéaire : le caractère "quotient de Rayleigh" a disparu, et ne laisse plus place qu'à une expression faisant intervenir un potentiel. Le résultat principal de [33], obtenu à partir de cette expression, est le suivant : en un maximiseur u_0^*, on a

$$f''(u_0^*) \leq 0 \text{ sur } \{0 < u_0^* < 1\}.$$

En d'autres termes, dès que l'on ne sature pas les contraintes, on ne peut prendre que des valeurs dans la zone de concavité de f. En utilisant cette information, on peut accélérer les algorithmes d'optimisation de manière importante.

Maintenant, expliquons comment on obtient ce résultat, auquel on doit ajouter quelques restrictions : on n'a cette information que sur l'intérieur de $\{0 < u_0^* < 1\}$. Ensuite, on utilise un développement à double échelle en prenant une donnée initiale de la forme

$$h_k(x) = \theta(x)\cos(kx)\,,$$

avec θ une fonction plateau bien localisée. Cette suite donne naissance à une suite $\{\dot{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui, une fois renormalisée convenablement, se concentre en $t=0$. L'information, ainsi localisée, permet d'obtenir le résultat.

Références

[1] F. Alabau Boussouira, P. Cannarsa, and C. Urbani. Bilinear control of evolution equations of parabolic type. *arXiv : Optimization and Control*, 2018.

[2] G. Allaire and M. Briane. Multiscale convergence and reiterated homogenisation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 126(2) :297–342, 1996.

[3] K. Beauchard and C. Laurent. Local controllability of 1D linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 94(5) :520–554, Nov. 2010.

[4] H. Berestycki, F. Hamel, and L. Roques. Analysis of the periodically fragmented environment model : I – species persistence. *Journal of Mathematical Biology*, 51(1) :75–113, 2005.

[5] J. Bintz and S. Lenhart. Optimal resources allocation for a diffusive population model. *Journal of Biological Systems*, 28(04) :945–976, Dec. 2020.

[6] G. Buttazzo and G. Dal Maso. An existence result for a class of shape optimization problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 122(2) :183–195, Jun 1993.

[7] P. Cannarsa, G. Floridia, and A. Y. Khapalov. Multiplicative controllability for semilinear reaction–diffusion equations with finitely many changes of sign. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 108(4) :425–458, Oct. 2017.

[8] R. S. Cantrell and C. Cosner. Diffusive logistic equations with indefinite weights : population models in disrupted environments. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 112(3-4) :293–318, 1989.

[9] R. S. Cantrell and C. Cosner. Diffusive logistic equations with indefinite weights : Population models in disrupted environments II. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22(4) :1043–1064, jul 1991.

[10] R. S. Cantrell and C. Cosner. The effects of spatial heterogeneity in population dynamics. *J. Math. Biol.*, 29(4) :315–338, 1991.

[11] R. S. Cantrell and C. Cosner. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. *J. Math. Biol.*, 37(2) :103–145, 1998.

[12] R. S. Cantrell and C. Cosner. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations.* John Wiley & Sons, 2003.

[13] R. S. Cantrell, C. Cosner, and V. Hutson. Permanence in ecological systems with spatial heterogeneity. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 123(3) :533–559, 1993.

[14] S. Chanillo, D. Grieser, M. Imai, K. Kurata, and I. Ohnishi. Symmetry breaking and other phenomena in the optimization of eigenvalues for composite membranes. *Comm. Math. Phys.*, 214(2) :315–337, 2000.

[15] D. L. DeAngelis, W.-M. Ni, and B. Zhang. Dispersal and spatial heterogeneity : single species. *Journal of Mathematical Biology*, 72(1) :239–254, 2016.

[16] W. Ding, H. Finotti, S. Lenhart, Y. Lou, and Q. Ye. Optimal control of growth coefficient on a steady-state population model. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 11(2) :688–704, 2010.

[17] R. A. Fisher. The wave of advances of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 7(4) :355–369, 1937.

[18] K. Fister and C. McCarthy. Optimal control of a chemotaxis system. *Quarterly of Applied Mathematics*, 61(2) :193–211, 2003.

[19] F. Guillén-González, E. Mallea-Zepeda, and M. Á. Rodríguez-Bellido. Optimal bilinear control problem related to a chemo-repulsion system in 2d domains. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26 :29, 2020.

[20] A. Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators.* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[21] A. Henrot, editor. *Shape optimization and spectral theory.* De Gruyter Open, May 2017.

[22] C.-Y. Kao, Y. Lou, and E. Yanagida. Principal eigenvalue for an elliptic problem with indefinite weight on cylindrical domains. *Math. Biosci. Eng.*, 5(2) :315–335, 2008.

[23] A. Kolmogorov, I. Pretrovski, and N. Piskounov. étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscow University Bulletin of Mathematics*, 1 :1–25, 1937.

[24] K.-Y. Lam, S. Liu, and Y. Lou. Selected topics on reaction-diffusion-advection models from spatial ecology. *Math. Appl. Sci. Eng.*, 1(2) :91–206, 2020.

[25] J. Lamboley, A. Laurain, G. Nadin, and Y. Privat. Properties of optimizers of the principal eigenvalue with indefinite weight and Robin conditions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 55(6), Dec. 2016.

[26] Y. Lou. On the effects of migration and spatial heterogeneity on single and multiple species. *Journal of Differential Equations*, 223(2) :400–426, Apr. 2006.

[27] Y. Lou. Some challenging mathematical problems in evolution of dispersal and population dynamics. In *Lecture Notes in Mathematics*, pages 171–205. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[28] Y. Lou and E. Yanagida. Minimization of the principal eigenvalue for an elliptic boundary value problem with indefinite weight, and applications to population dynamics. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 23(3) :275–292, 10 2006.

[29] I. Mazari. *Shape optimization and spatial heterogeneity in reaction-diffusion equations.* PhD thesis, Paris-Sorbonne Université, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 2020.

[30] I. Mazari. The bang-bang property in some parabolic bilinear optimal control problems *via* two-scale asymptotic expansions. *Submitted*, 2021.

[31] I. Mazari, G. Nadin, and Y. Privat. Optimal location of resources maximizing the total population size in logistic models. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 134 :1–35, Feb. 2020.

[32] I. Mazari, G. Nadin, and Y. Privat. *Handbook of optimal control and numerical analysis*, chapter Some challenging optimisation problems for logistic diffusive equations and their numerical modelling. 2022.

[33] I. Mazari, G. Nadin, and A. I. Toledo-Marrero. Optimisation of the total population size with respect to the initial condition for semilinear parabolic equations : Two-scale expansions and symmetrisation. *Nonlinearity*, 34(11), 2021.

[34] I. Mazari and Y. Privat. Qualitative analysis of optimisation problems with respect to non-constant Robin coefficients. *Submitted*, 2021.

[35] I. Mazari, Y. Privat, and G. Nadin. Optimisation of the total population size for logistic diffusive equations : bang-bang property and fragmentation rate. *Submitted*, 2021.

[36] I. Mazari and D. Ruiz-Balet. A fragmentation phenomenon for a nonenergetic optimal control problem : Optimization of the total population size in logistic diffusive models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 81(1) :153–172, Jan. 2021.

[37] K. Nagahara, Y. Lou, and E. Yanagida. Maximizing the total population with logistic growth in a patchy environment. *Journal of Mathematical Biology*, 82(1-2), Jan. 2021.

[38] K. Nagahara and E. Yanagida. Maximization of the total population in a reaction–diffusion model with logistic growth. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 57(3) :80, Apr 2018.

[39] N. Shigesada and K. Kawasaki. *Biological Invasions : Theory and Practice*. Oxford University Press, 1997.

[40] M. Yousefnezhad, C.-Y. Kao, and S. A. Mohammadi. Optimal chemotherapy for brain tumor growth in a reaction-diffusion model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 81(3) :1077–1097, Jan. 2021.

[41] B. Zhang, A. Kula, K. M. L. Mack, L. Zhai, A. L. Ryce, W.-M. Ni, D. L. DeAngelis, and J. D. V. Dyken. Carrying capacity in a heterogeneous environment with habitat connectivity. *Ecology Letters*, 20(9) :1118–1128, July 2017.

CEREMADE, UMR CNRS 7534, Université Paris-Dauphine, Université PSL, Place du Maréchal De Lattre De Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France

Email address: mazari@ceremade.dauphine.fr