

# Introduction à l'équilibre dans les modèles à horizon infini.

2006-2007.

10.

# L'horizon infini : du nombre fini d'agents aux générations imbriquées.

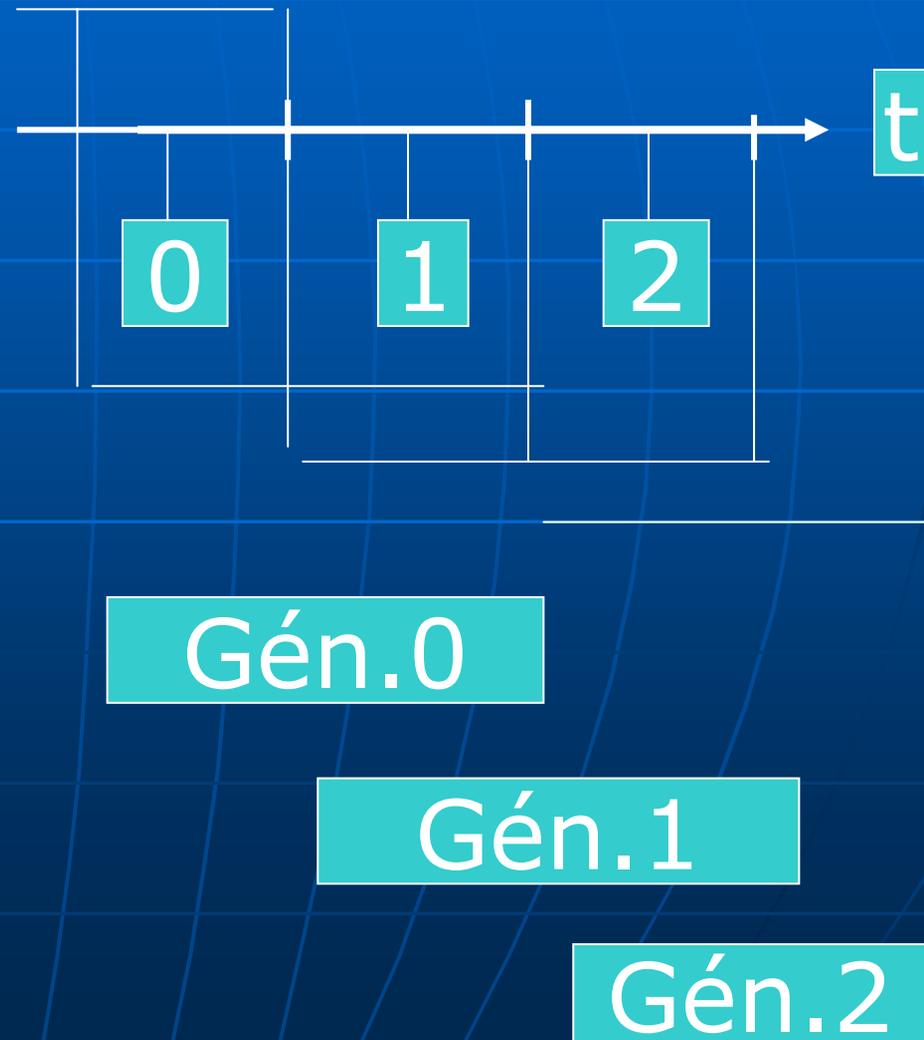
- Nbre d'agents finis.
  - n biens par période, une infinité dénombrable de périodes :  $t=1, \dots, +\infty$
  - Dotations,  $w(h,t)$  bornées
  - Taux de préférence pour le présent positif.
- Efficacité
  - Un Etat Efficace/Pareto est un équilibre.
  - Argument de séparation vaut dans l'espace considéré.
  - Problème du « dual ». Sous hypothèse « convenable », ...
  - Les prix dans le « dual » de l'esp. des biens : une suite infinie  $p(t) \in \mathbb{R}^n$ .
  - Aussi :  $\text{Max } \sum \alpha(i)U(i,.)$ ,  $\sum x(i)=w$ ,
- Equilibre.
  - Interprétation Séquentielle..
  - Equilibre de Prix de Plans et d'Anticipations de Prix.
  - Un équilibre (marchés à terme ou séquentiels) existe et est PE.
  - La démonstration  $r^*(.)$  surjective s'applique sans modification sensible.
- Cas 2 : générations imbriquées.
  - Les agents ont un horizon de vie fini, Il y a une infinité de générations.

# L'horizon infini avec générations imbriquées.

- Un modèle simple de générations imbriquées.
  - Allais, Samuelson.
  - Chaque agent (génération) vit deux périodes.
  - $u(t, x(t, t), x(t, t+1))$  utilité de la génération  $t$ ....
  - Contrainte de rareté dans une économie d'échanges...
    - $\sum x(j, t) + x(v, t) = w(t). \forall t$
- La notion d'équilibre.
  - Equilibre de marchés à terme.
    - Expérience de pensée.
    - Toutes les générations rassemblées et .....
    - Marché à terme.
  - Equilibre de Plans de Prix et d'anticipations de prix.
    - Concept naturel.
    - Expérience de pensée : ramener les prix séquentiels à des prix actualisés.
  - Propriété ?
    - Valeur actualisée des dotations totales finie...
    - Le premier théorème de l'économie du bien-être s'applique.
- Questions : relations équilibre-optimum.

# Le modèle à générations imbriquées : un cas « d'école ».

- Les Hypothèses;
  - Coexistence de deux générations,
  - Vieux et jeunes.
- Les Hypothèses. suite
  - Un seul bien périssable.
  - Chaque génération reçoit/jeune une unité de bien
  - Une faible dotation de biens en 2<sup>ème</sup> période.
  - Panier de subsistance :  $V' > 0$
  - Une unité de travail ...une unité de bien.
- La chronologie.
  - Voir ci-contre.
- Le début des temps.
  - Vieux dotations faibles.
  - Qu'échanger avec les jeunes ?



# Le modèle à générations imbriquées, suite

- L'équilibre séquentiel.
  - Suite de marchés au comptant.
    - (Prix du travail = prix du bien).
    - Pas de transactions.
- L'équilibre séquentiel avec institution financière.
  - Institution (banque?) : transférer de la valeur entre périodes.
    - Titres :
      - Renoncer à une unité de revenu / période  $t$  pour  $x$  unités en période  $t+1$ .
      - Entre les périodes:  $1 \rightarrow 1+r(t/t+1)$ .
  - Equilibre :
    - Banque tient promesses gén.  $t$  en faisant payer gén.  $t+1$  et ainsi de suite.
- L'équilibre séquentiel avec Banque
  - Le programme du « consommateur », génération  $t$ .
    - $\text{Max } U(c(t), c(t+1))$ ,
    - $(1-c(t))(1+r(t/t+1))= c(t+1)$
    - $c(t)+c(t+1)/ (1+r(t/t+1))=1$ . Solution  $s(t)= 1-c(t)=D(r(t/t+1))$
  - L'équilibre de la Banque.
  - .....

# L'équilibre séquentiel avec institution financière...

- Le programme du « consommateur » génération  $t$ .
  - Solution  $1 - c(t) = D(r(t/t+1))$
- L'équilibre de la Banque.
  - $(1 + r(t-1/t))D(r(t-1/t)) = D(r(t/t+1))$
  - $c(v,t) + c(j,t) = 1$
  - Qui est l'équilibre « réel » des marchés....
  - Noter cependant qu'en 1ère période, la banque reçoit du bien sans rien en faire...
- Il y a plusieurs, beaucoup ?, d'équilibres.....
  - L'équilibre autarcique est un équilibre
    - Choisir  $r(t/t+1)$  tel que : pas de demande d'épargne.
    - L'équilibre n'est pas efficace au sens Pareto...
    - Le prix actualisé tend vers l'infini.
  - Autres équilibres (voir plus loin)
    - Aucun ne peut-être efficace..
    - Il est impossible de transférer du bien aux vieux 0.

# Equilibre séquentiel avec institution financière et optimum...

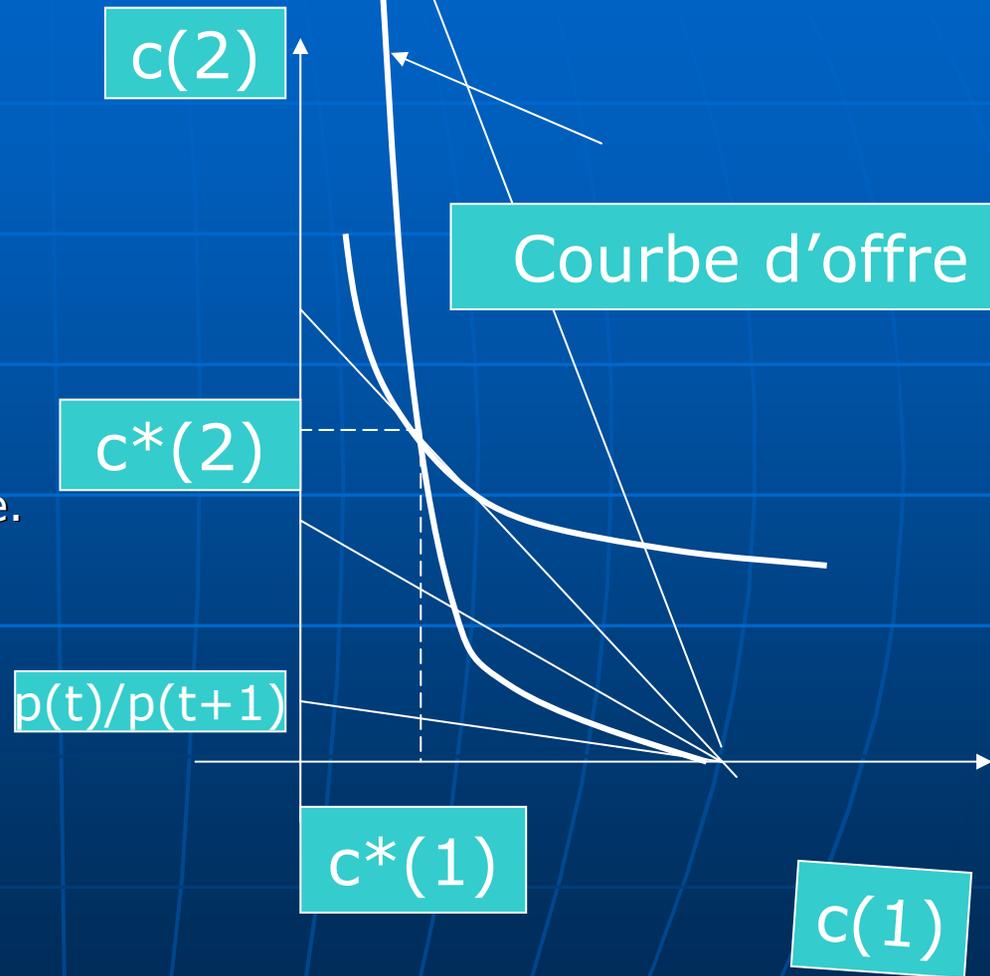
- Un optimum est il un équilibre ?
  - Une approche « modeste » : Prendre un optimum.
  - Voir si on peut le concrétiser cadre considéré
- L'optimum stationnaire.
  - Donner le même niveau de vie à toutes les générations.
  - Etat stationnaire  $c(v,t)=c(v,t+1)=c(2)$ , idem  $c(j...)=c(1)$
  - $\max U(c(1), c(2)), c(1)+c(2)=1$ .
  - C'est un état efficace au sens de Pareto !
- L'optimum stationnaire est un équilibre..
  - C'est un équilibre  $r(t,t+1)=0$ ,
  - Avec transferts de revenus....
  - Donner revenu à la génération 0!!!!
  - Thème général.... (cf non-convexités)
  - Noter la valeur actualisée des ressources n'est pas finie.
  - Mais passe le critère de Cass (voir aussi Malinvaud (53))

# Décentralisation de l'optimum : l'interprétation standard avec monnaie.

- L'optimum ; décentralisation avec monnaie.
  - Histoire équivalente à banque + tsfts de revenus...
  - Monnaie « externe » possédée / vieux, cédée jeunes, de gén. à gén.
  - **L'optimum est un équilibre avec monnaie (Samuelson).**
  - Monnaie supplée : l'institution fin. transferts de rev. vieux prés. en 0
- **L'équilibre avec monnaie.**
  - $p(t)$  prix du bien en monnaie
  - $\text{Max } U(c(t), c(t+1))$ ,
  - $(p(t))(1-c(t))=m, p(t+1)c(t+1)=m.$
  - $c(t)+[p(t+1)/p(t)]c(t+1)=1.$
- **A comparer avec :**
  - $c(t)+c(t+1)/(1+r(t/t+1))=1.$
  - $p(t)/p(t+1)=1+r(t/t+1)$
  - Solution  $1-c(t)=d((p(t+1)/p(t))=D(..), c(v,t)+c(j,t)=1.$

# Optimum et équilibre monétaire...

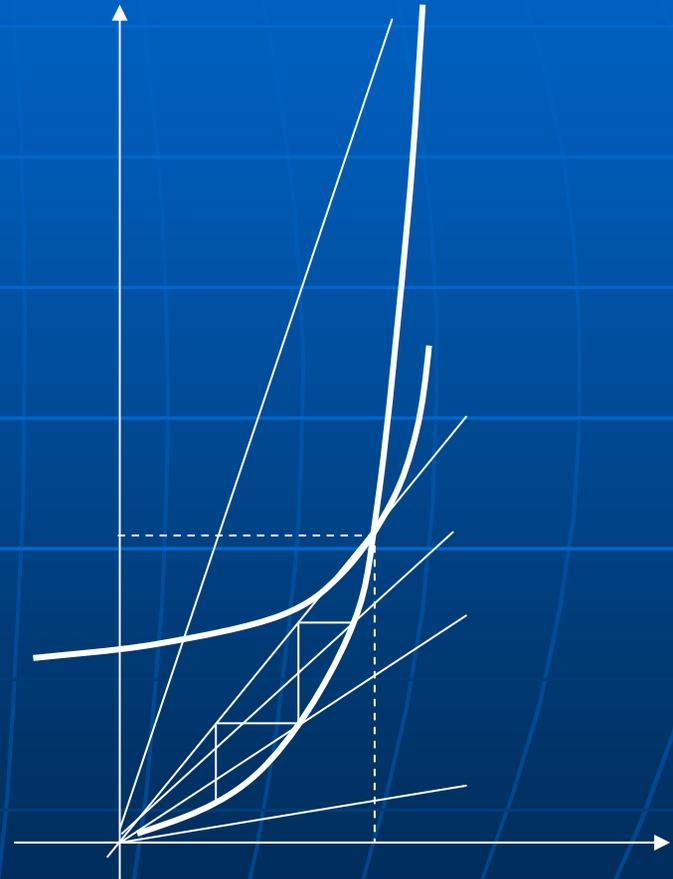
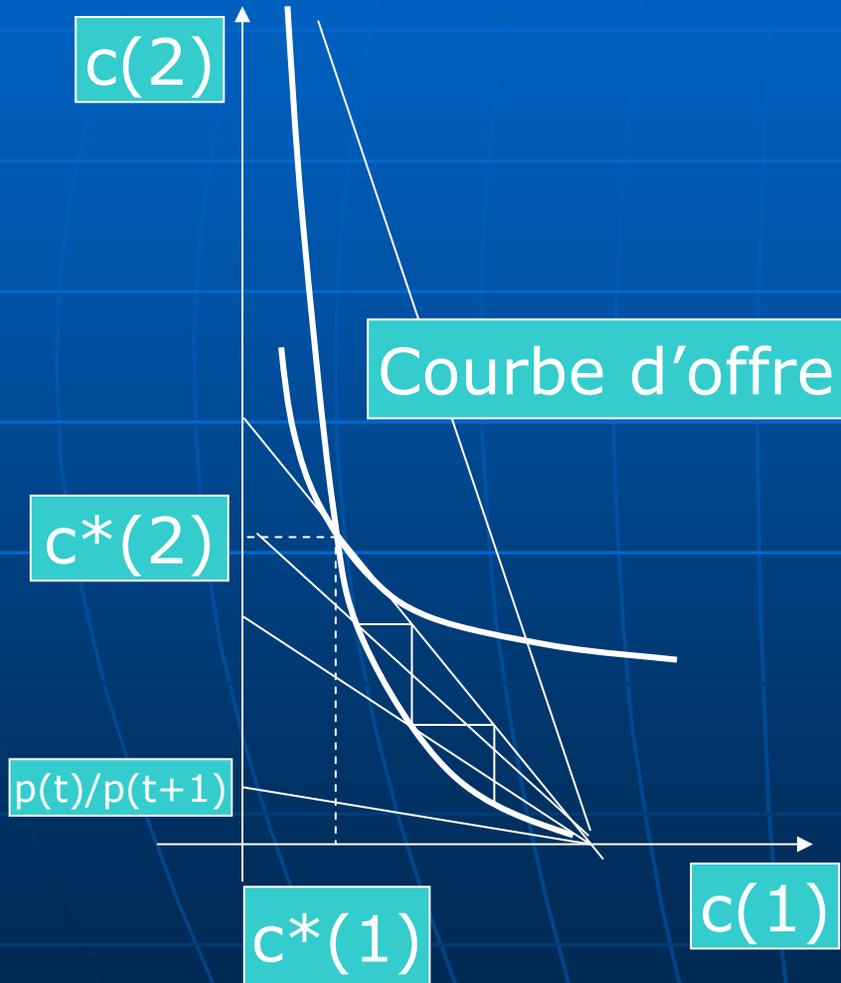
- Visualisation des choix.
  - $\text{Max } U(c(t), c(t+1)),$
  - $(p(t))c(t)+m=p(t),$   
 $p(t+1)c(t+1)=m.$
  - $c(t)+[p(t+1)/p(t)]c(t+1)=1.$
- Courbe d'offre.
  - Epargne réelle croît aux d'intérêt...
- L'optimum stationnaire (âge d'or?) est un équilibre monétaire.
  - $c^*(1), c^*(2),$
  - $\text{Max } U(c(1), c(2)),$   
 $c(1)+c(2)=1.$
  - C'est un équilibre monétaire
  - $p(t) = p^*; M/p^*=c^*(2).$
  - M quantité tle monnaie disponible.
- Monnaie...ou bulle ?



# Propriétés de l'équilibre inter-temporel.

- Avertissement : équilibre inter-temporel monétaire.
- Propriétés positives....
  - Il existe un équilibre stationnaire.
  - Il existe une infinité d'équilibres non-stationnaires.
    - Choisir un prix du bien  $> p^*$  à la période 0 ....
    - Rationaliser l'épargne de la génération 0 par  $p(1) \rightarrow c(v,1)$
    - Et donc  $c(j,1)$  qui à nouveau peut être rationalisé par  $p(2)$ .
    - ...  $p(t)$  croît indéfiniment mais le processus peut être prolongé..
    - Equilibre « inflationniste » convergent vers l'autarcie...
  - Il en existe une infinité..
  - Mais aucun ne converge vers l'équilibre stationnaire
    - dans la configuration soulignée...
    - Il est dit déterminé...

# Equilibre avec monnaie



# Conclusions provisoires...

- Une modification assez sensible de la situation.
  - Relation optimum équilibre :
  - Une lumière un peu différente sur les institutions.
  - Nombre d'équilibres ...
    - Nouvelle multiplicité :
    - Statut : monnaie-bulle ?
  - Nombre d'équilibres.
    - Attracteurs comme l'équilibre stationnaire
    - Peut être ... Indéterminé non localement isolé.
  - Efficacité
    - non assurée....
    - Lien avec la détermination et l'indétermination.
- Généralité.
  - dans le modèle considéré.
  - Avec production...