Equilibre général.
Existence et multiplicité.

Cours 2006-2007

4.

Rappel: équilibre et existence

- Une économie abstraite.
  - Espace des biens : R^n.
  - Economie d'échanges : u(h,.), w(h)
  - Economie de production Y(j), t(h,j)
- L'excès de demande.
  - $Z(p) = \Sigma_h D(h,p,p.w(h)+\Sigma_j t(h,j)\ \pi_j(p)) - \Sigma_j n(j,p) - \Sigma_h w(h).$
    - $Z : p \in R^n_+ \Rightarrow Z(p) \subset R^n$.
    - Z fonction ou correspondance.
  - Loi de Walras : $p.Z(p)=0$
- THM 1 : (stricte convexité)
  - Tte fonction $Z : p \in R^n_+ \Rightarrow Z(p) \in R^n$.
  - $p.Z(p)=0$, continue, Cdts bords
  - $\exists p^* / Z(p^*)=0$.
- THM2 :
  - Autres Enoncés.
  - Z : correspondance à valeurs convexes, h.c.s.

Questions : qualité prédictive de la théorie

- La logique :
  - l'équilibre point de repos : influence de la physique.
- Question 0 :
  - l'existence.
- Question 1 :
  - Comment émerge t'il ? Quelle machine à calculer ?
  - Les forces du marché déterminent elles un algorithme ?
- Question 2 :
  - Unicité ou multiplicité...
  - Si plusieurs un est il plus plausible ?
- Question 3 :
  - L'équilibre est il robuste à des chocs petits ou grands.
  - Retour à l'équilibre après une perturbation.
- Question liées
  - Interdépendance.

Rappel sur les données.

- La fonction d'excès de demande.
  - Provient d'une économie.
    - Economie d'échanges : u(h,.), w(h)
    - Economie de production Y(j)
  - $Z : p \in R^n_+ \to Z(p) \subset R^n$.
  - $\underline{Z} : p \in R^{n-1}_+ \to \underline{Z}(p) \subset R^{n-1}$, numéraire-sphère, S^n, simplexe, U^n.
- Propriétés :
  - $p.Z(p) = 0$. + autres propriétés – éco. échanges.
  - Propriétés locales, avant normalisation
    - $p.(\partial Z) + Z.dp = 0$, $p.(\partial Z) = -Z$, $(\partial Z).p = 0$
  - Propriétés locales utiles.
    - $\underline{Z}$ définie négative : pour tout dp, $dp.(\partial\underline{Z}).dp < 0$. (p/ $p.dp = 0$)
    - $\underline{Z}$ définie négative sur $\underline{Z(p)}^{\perp}$, dp, $\underline{Z}dp = 0$, $dp.(\partial\underline{Z}).dp < 0$. (id.)
    - $\underline{Z}$ définie négative à l'équilibre : propriété préc. $Z = 0$.

Quel algorithme pour le calcul de l'équilibre ?

- **Comment émerge l'équilibre ?**
  - Un problème mathématique complexe.
  - n équations, n inconnues, non-linéaire, # sol. possibles.
  - 3 pts de vue : centralisé global, local, économique et (dé)centralisé.
- **Le calcul et l'ordinateur ?**
  - Comment faire si l'on dispose d'un ordinateur ?
  - Et de données exhaustives sur Z(p).
  - Une réponse : *l'algorithme de Scarf.*
- **L'équilibre : calcul après un choc.**
  - $Z(p,a) = 0$
  - $(\partial \underline{Z})dp + (\partial_a \underline{Z})da=0.$
  - Si $Det((\partial \underline{Z})(p))$ différent de 0, alors $dp= -(\partial \underline{Z})^{-1}(\partial_a \underline{Z})da.$
- **Un algorithme approprié : la méthode de Newton.**
  - $dp= -(\partial \underline{\mathbf{Z}})^{-1}Z)dt$
  - Calcule le bon équil. après choc,
  - Rapproche de l'équilibre en tout état de cause :
  - $d||\underline{Z}||=2\underline{Z}.d\underline{\mathbf{Z}}=2\underline{Z}\ (\partial \underline{\mathbf{Z}})(-(\partial \underline{\mathbf{Z}})^{-1}\underline{Z})dt<0.$
- **L'équilibre comme produit des forces du marché.**

Walras, les forces du marché et l’équilibre :

- Question : le marché résout-il « approximativement », les équations de l’équilibre ?
  - Un des mérites de Walras selon Schumpeter.
  - les prix de la théorie: des attracteurs, pas des prédicteurs stricts.
  - Comment s’exerce cette attraction ?
  - Une question pour Walras.
  - Une évidence ou une question non avenue pour la plprt.
  - Et pour une grande partie de la théorie économique moderne…
- Pertinence : questions et réponse.
  - Pertinence de la question ;
  - cf l’expérience de planification centralisée.
  - Pertinence de la réponse : tâtonnement
  - douteuse.
- **Actualité de la question.**
  - Beaucoup de contributions :
    - Hicks, Samuelson, Arrow-Hurwcz, Hahn, Negishi.
  - Un sujet pratiquement abandonné, sans avoir été résolu ?

Le tâtonnement de Walras.

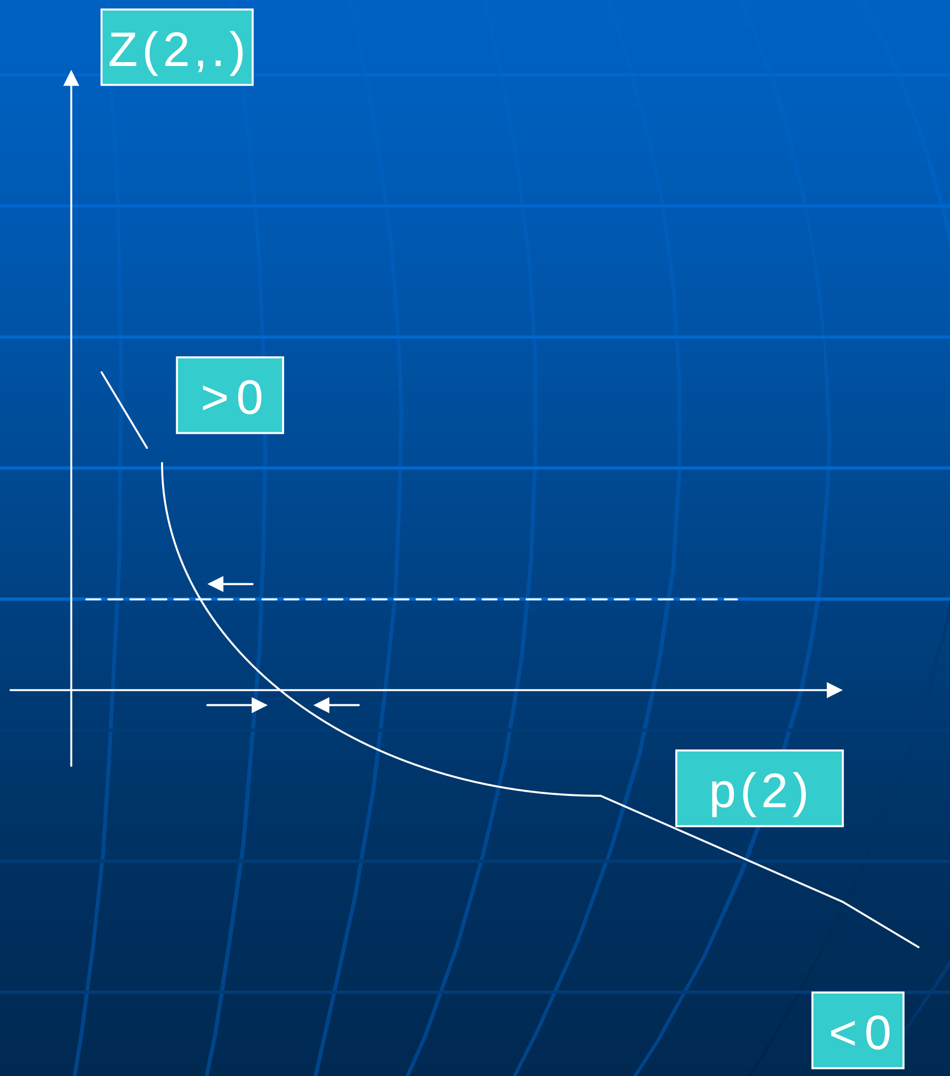
- La proposition de Walras : Les forces du marché, principe algorithmique.
  - Le héraut walrassien : Annonce p et reçoit Z(p) :
  - Révision successives sans transactions : forces du marché.
  - $p \rightarrow Z_h(p)>0$, $dp_h > 0$, resp. < 0.
  - Transactions : équilibre.
- Interprétation :
  - Vison centralisée : le « crieur » de la place de Paris.
  - Information forte : demande notionnelle.
  - Traitement de l'information rudimentaire.
    - Réaction marché par marché.
    - Comparer méthode de Newton : interactions entre les marchés.
- La proposition de Walras formalisée en temps continu.
  - $dp/dt = Z(p(t)$ (TS)
  - $dp/dt = CZ(p(t)$ (TD), C matrice diagonale positive.

Le tâtonnement de Walras.

- Remarques sur les propriétés du tâtonnement :
  - Dépendance par rapport au numéraire.
    - Si p sur la sphère il y reste. (TS)
    - Le choix du numéraire a de l'importance.
  - L'algorithme est il conclusif ?
    - p(0), p(t)$\rightarrow$ équilibre
    - Convergence locale ou globale du tâtonnement.
    - **Stabilité** locale ou globale (de l'équilibre)
- Relation entre calcul et multiplicité.
  - Pour le tâtonnement walrassien.
    - Convergence globale non ambiguë - unicité
    - mais unicité ne garantit pas.
  - Pour les autres algorithmes.
    - Problème avec la multiplicité.
    - Ts les équilibres son t'ils atteignables ?

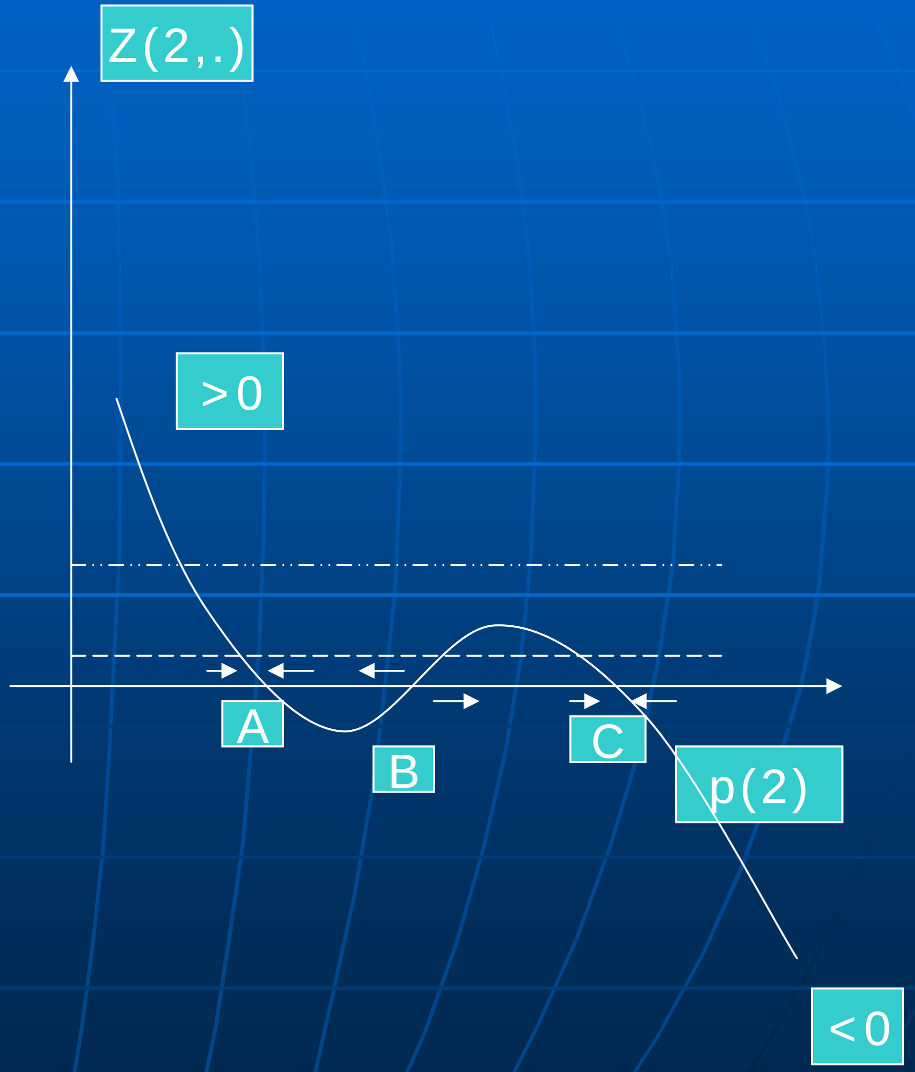
Retour sur calcul, multiplicité et robustesse : un cas simple.

- Exemple
  - 2 biens, p(1)=1
  - Equilibre déterminé par
  - Z(2, p(2))=0
- « Monotonie » de Z
  - Unicité.
  - Algorithme de Scarf dégénéré.
  - Tâtonnement, Newton identiques.
  - Globalement convergents.
- Robustesse.
  - Retour à l'équilibre après variation de prix.
  - Après choc >0 d'offre.



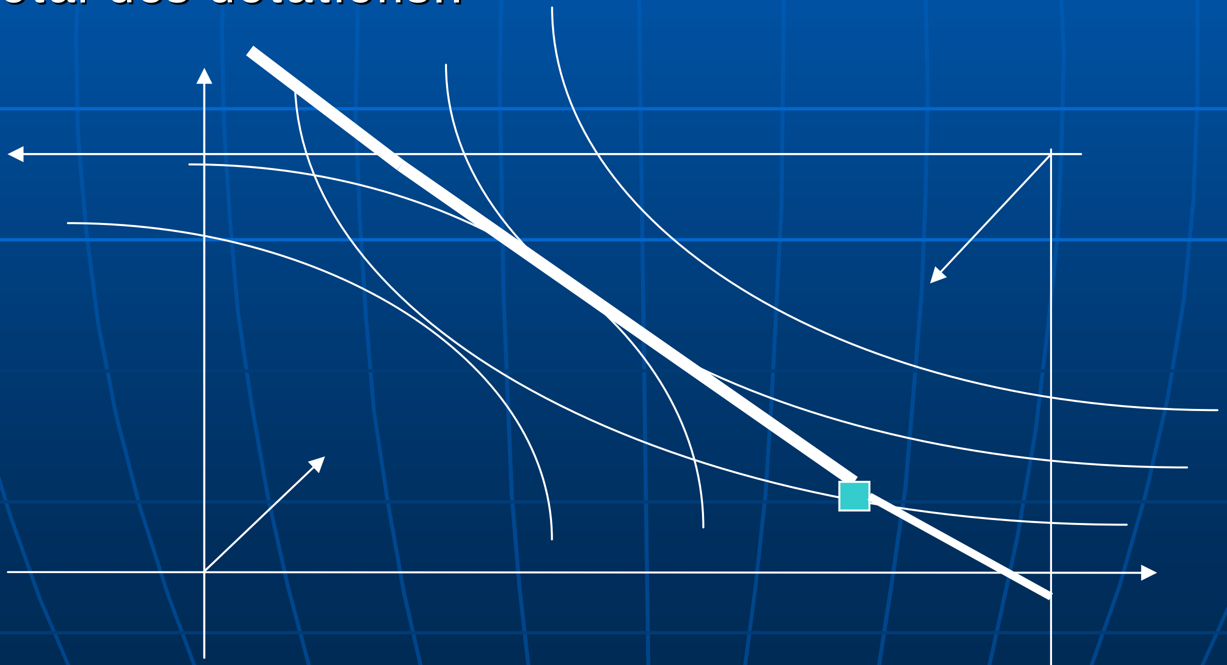
Intuitions sur la multiplicité le calcul et la fragilité.

- Exemple
  - Z(2, p(2))=0
- Non monotonie de Z
  - Multiplicité.
  - Algorithme de Scarf
  - Walras = Newton sauf B
- Robustesse.
  - Petits chocs de prix et chocs d'offre A et C OK
  - B non
  - Grand choc d'offre.
- Deux questions :
  - situation plausible ou pathologique ?
  - Quelles complexité introduisent l'augmentation du nombre de biens.

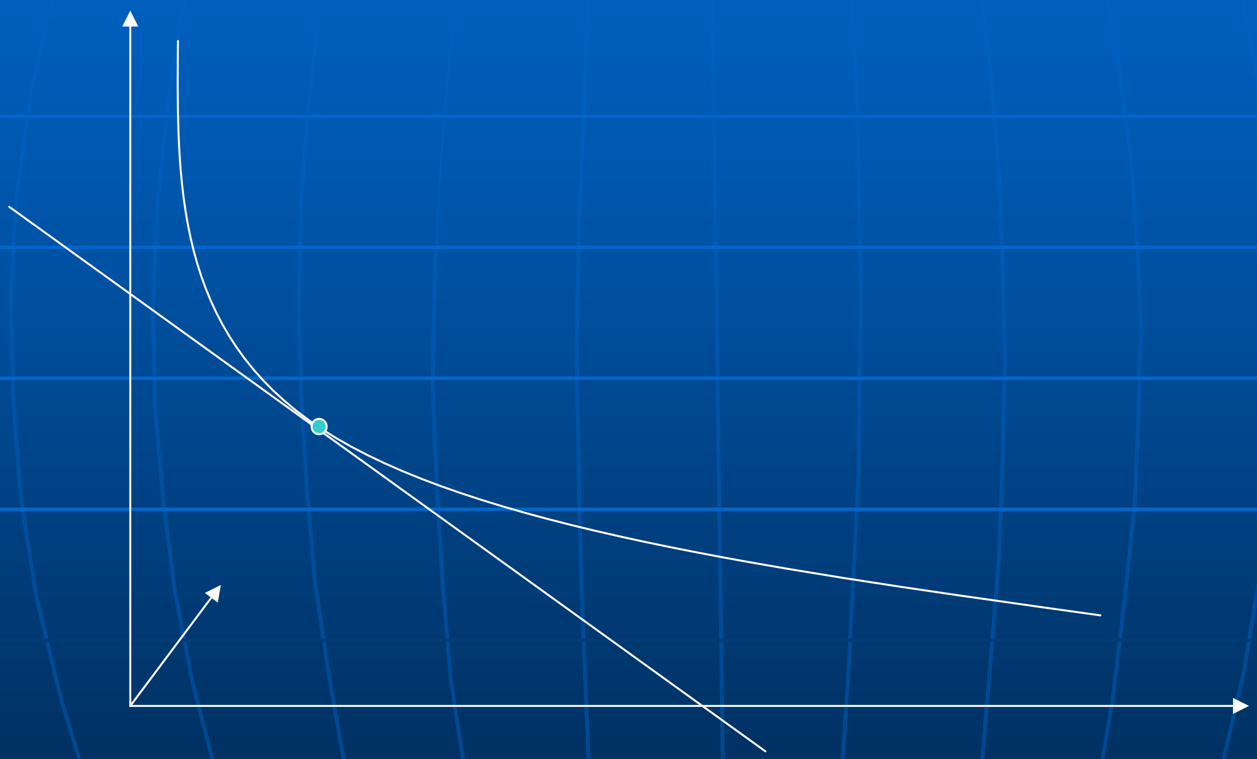


La boîte d'Edgeworth

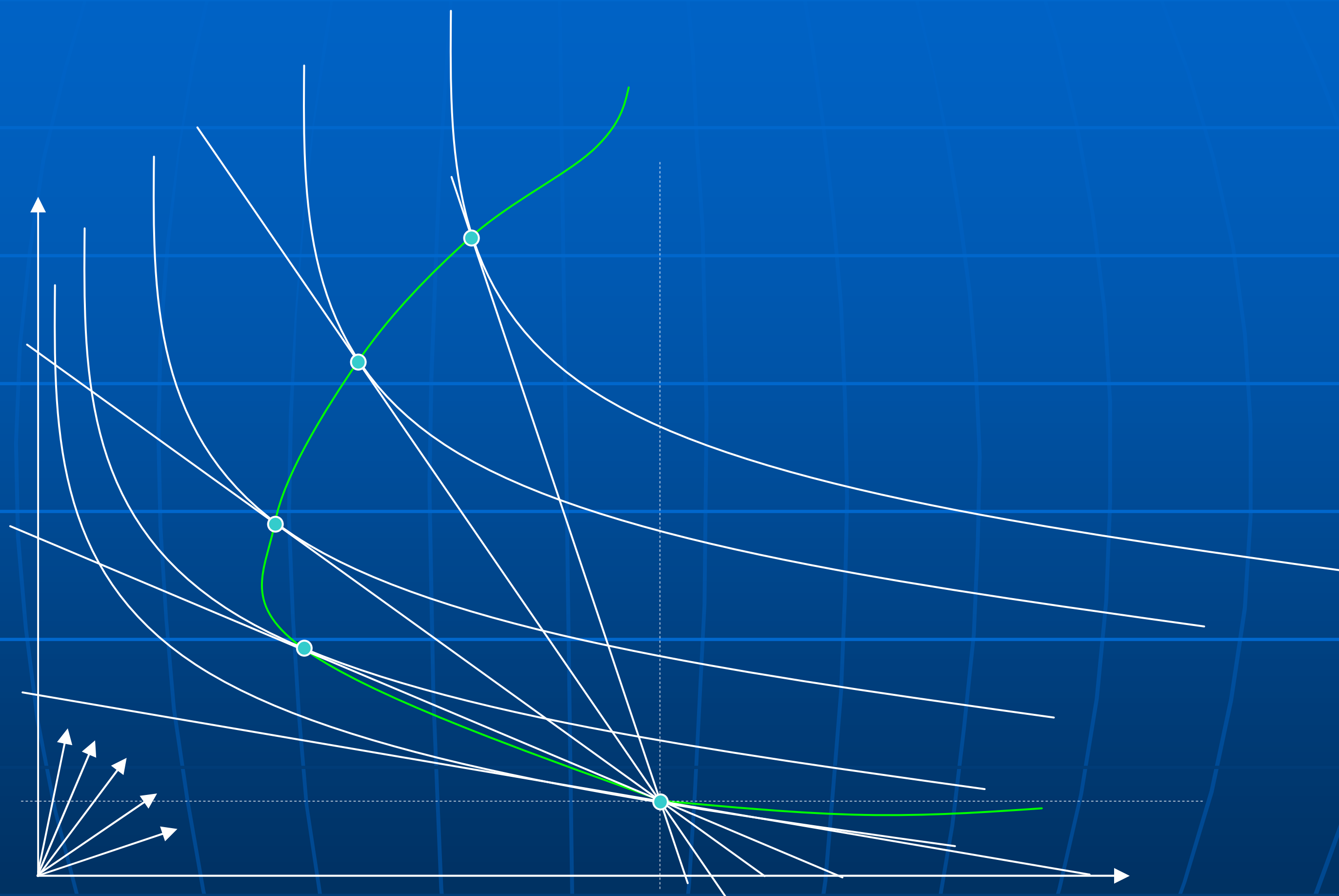
- La situation de demande non monotone **<u>n'est pas pathologique</u>**
- Illustration.
  - 2 agents, 2 biens, pas de production
  - Total des dotations..



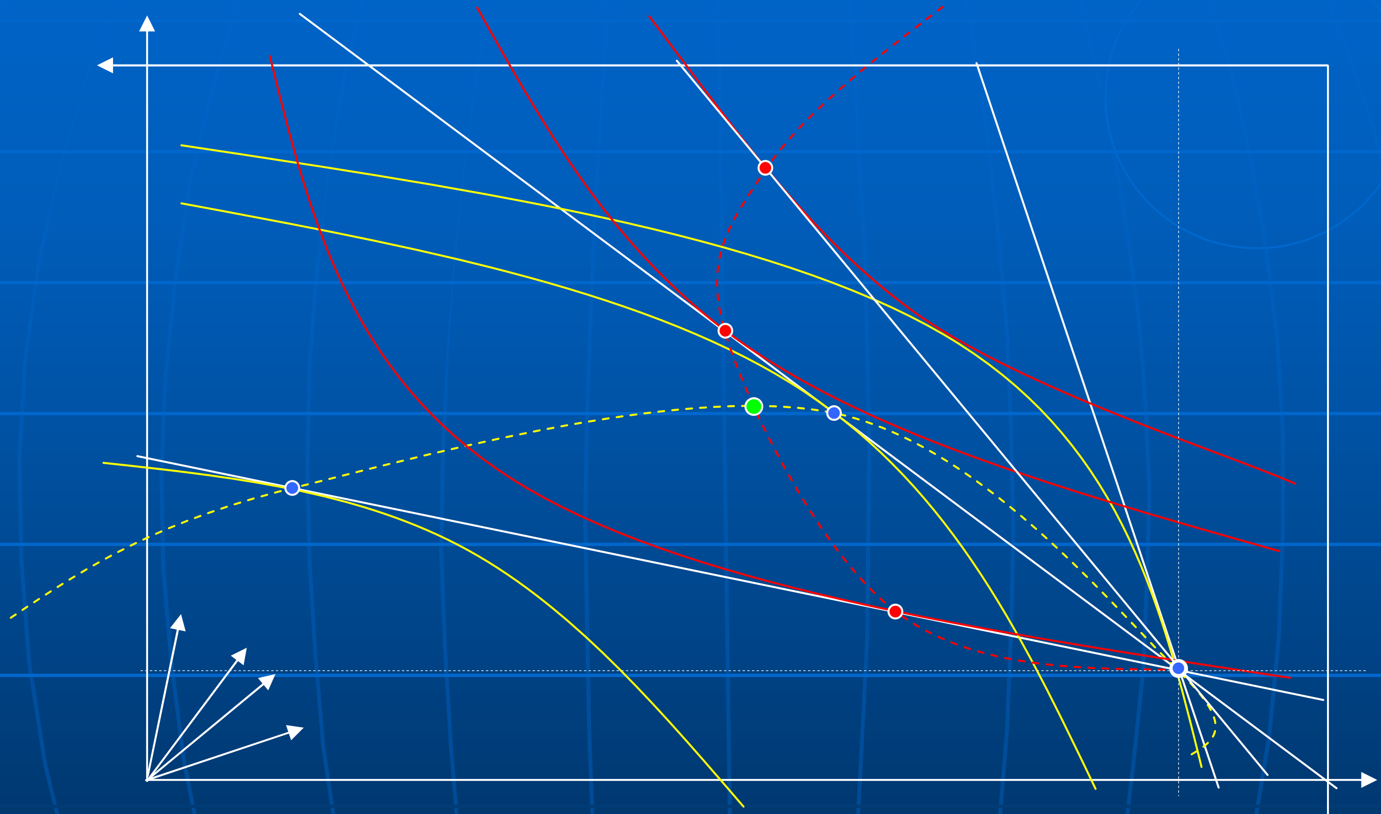
Problème du consommateur.



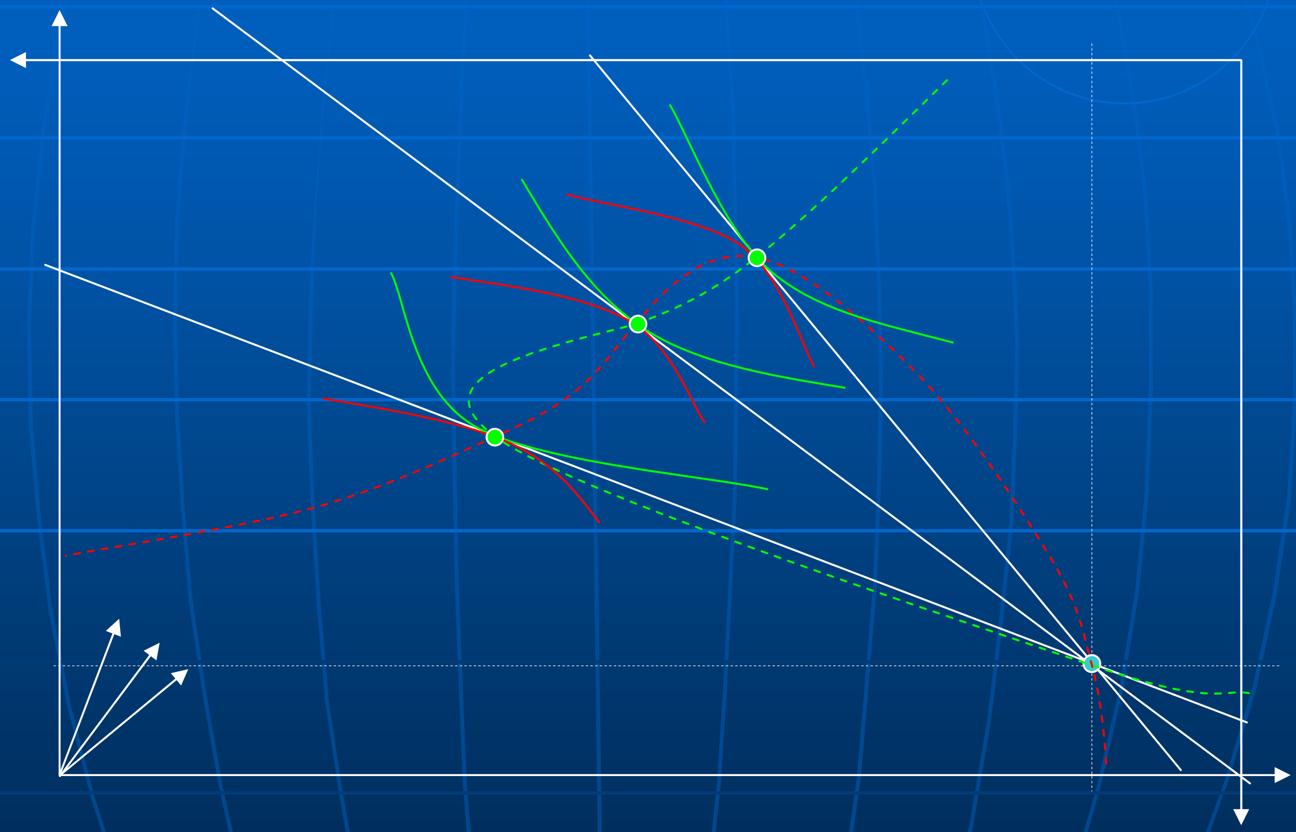
Courbe de demande.



Equilibre

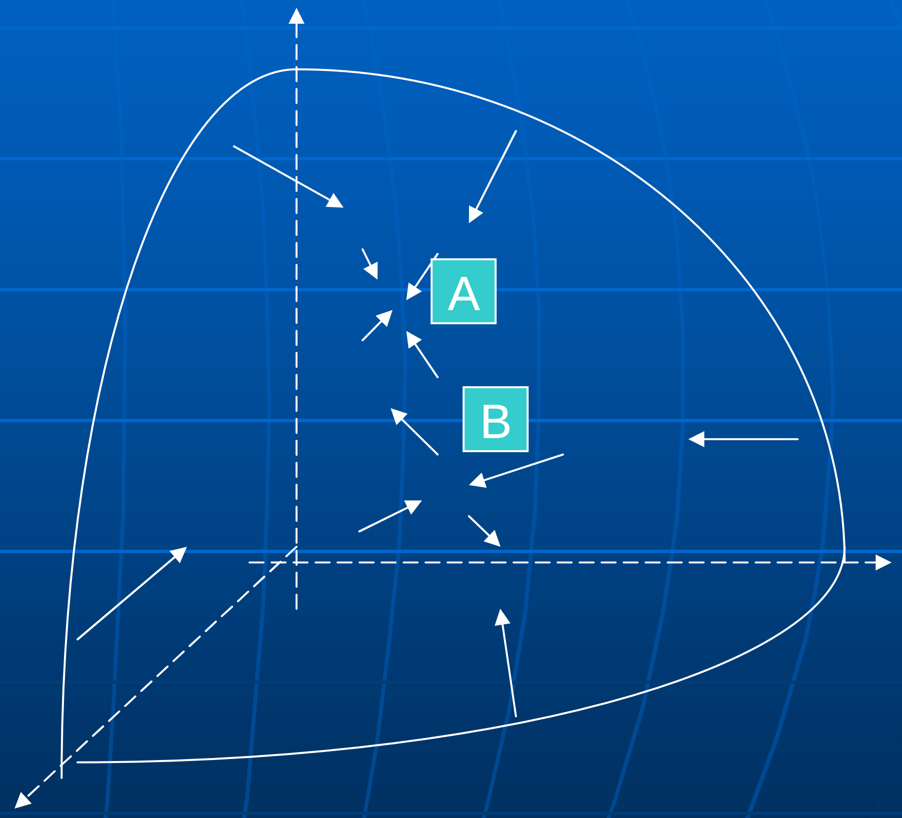


Equilibres



L’accroissement de complexité du au nombre de biens.

- Passons de 2 à 3 biens.
  - Z(p) champ de vecteurs tangents à la sphère.
  - Si le champ est rentrant il a au moins un zéro.
  - Analogie hydraulique.
- Noter
  - les dérivées de Z « visualisées » autour de zéro.
  - Le tâtonnement walrassien
    - localement convergent A
    - Ou non, B.
  - Newton tjrs localement convergent.

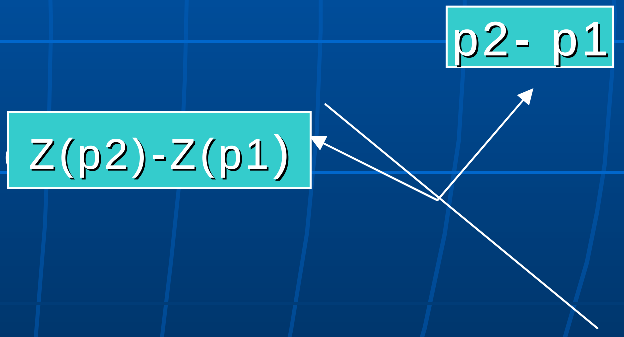


L'unicité : stratégie de preuve.

- Dans une économie avec consommateur représentatif.
  - Unicité vient de l'optimalité.
- Dans une économie donnée
  - Conditions sur l'excès de demande agrégée Z
  - Plausibilité éco : offre et demande individuelle/agrégée.
  - Conditions sur la demande.
    - Loi de la demande.
    - Axiome Faible de la Préfèrence Révélée.
    - Substituabilité brute.
- Dans un ensemble d'économies.
  - Se déplacer dans l'ensemble,
    - en repérant le chgt éventuel de nombre d'équilibres.
  - Point de vue du graphe de la correspondance de Walras.

L'intuition de Walras : La loi de la demande ?

- Monotonie faible :
  - $p_h \to Z_h(p_h,.)$ est décroissante.
  - $p \to (\partial Z)$ a une diagonale négative.
  - Suffisant avec deux biens seulement.
  - Avec plusieurs biens. Walras.
- Stricte Monotonie forte : Loi de la demande.
  - Normer p.
  - $(\Delta p)(\Delta \underline{\boldsymbol{Z}})<0$
  - $(p_2 - p_1)(\underline{\boldsymbol{Z}}(p_2)-\underline{\boldsymbol{Z}}(p_1))<0.$
  - $(\partial \underline{\boldsymbol{Z}})$ négative définie/D $\Rightarrow$ stricte Mon
  - presque équivalent ($\Leftrightarrow$ sans stricte)



- THM :
  - Loi de la demande implique unicité de l'équilibre.
  - Cvgce du tâtonnement.
  - Preuve immédiate pour 1.