

1 Le problème d'affectation quadratique

Supposons que M firmes doivent être affectées à M localisations. Le **problème d'affectation quadratique** est défini par l'ensemble des hypothèses suivantes:

(i) chaque firme est **indivisible** et la quantité de sol disponible en chaque localisation, normalisée à 1, est telle qu'une **seule** firme puisse s'y installer;

(ii) chaque firme produit une quantité fixe de biens et utilise une unité de sol ainsi qu'une quantité fixe de biens produits par les autres firmes.

Deux firmes, $i = 1, 2$, et **deux** localisations, $r = A, B$. La firme 1 est localisée en A et la firme 2 en B . La firme i produit q_i unités du bien i et consomme q_j unités du bien j provenant de l'autre firme j , quelle que soit sa localisation. Cette firme reçoit également un nombre $a_i > 0$ en provenance du reste du monde, nombre qui ne dépend pas de sa localisation. Enfin, chaque bien i transporté de son lieu de production à une autre localisation par une compagnie de transport génère un coût $t_i > 0$.

Soit p_{ir} le prix du bien i à la localisation r et R_r la rente versée par une firme pour l'usage en r d'une unité de sol. Le profit de la firme 1 localisée en A s'exprime alors de la manière suivante :

$$\pi_{1A} = a_1 + p_{1A}q_1 - p_{2A}q_2 - R_A$$

le profit de la firme 2 localisée en B étant donné par une expression similaire.

Les prix d'équilibre doivent satisfaire les deux conditions suivantes

$$p_{1B} = p_{1A} + t_1 > p_{1A} \quad (1)$$

$$p_{2A} = p_{2B} + t_2 > p_{2B} \quad (2)$$

Le prix du bien 1 en B est égal à son prix en A augmenté du coût de transport correspondant t_1 .

Sans perte de généralité, supposons que $R_A \geq R_B$.

Si les firmes ont un comportement concurrentiel, la firme 1 peut se garantir un profit plus élevé en s'implantant en B . En effet, si elle s'établit dans la localisation B , son profit devient :

$$\pi_{1B} = a_1 + p_{1B}q_1 - p_{2B}q_2 - R_B$$

En utilisant les expressions (1) et (2), on vérifie aisément que:

$$\pi_{1B} - \pi_{1A} = t_1q_1 + t_2q_2 + R_A - R_B > 0 \quad (3)$$

En conséquence, la firme 1 est toujours incitée à se délocaliser.

Si les localisations ont des caractéristiques exogènes identiques, il n'existe pas d'équilibre concurrentiel dans le problème d'affectation quadratique.

2 Le problème de la localisation des équipements (SPLP)

Etant donnée une certaine répartition spatiale des besoins d'un bien à satisfaire, l'objectif du modèle est de déterminer le nombre et la localisation des équipements qui minimisent la somme des coûts de production et de transport.

Du côté de la demande, les **besoins** sont donnés et répartis entre un nombre donné de localisations $j = 1, \dots, N$, le besoin en j étant noté par δ_j .

Du côté de l'offre, les équipements peuvent être localisés en un nombre fini de **localisations potentielles** $i = 1, \dots, M$ où la production s'effectue à rendements croissants. Le coût d'installation F_i et le coût marginal de production c_i sont constants.

Enfin, le coût d'acheminement d'une unité de bien du site i vers le site j est donné par une constante positive t_{ij} .

Formellement, le **SPLP** est défini par le programme mathématique suivant :

$$\min Z = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (c_i + t_{ij}) \delta_j x_{ij} + \sum_{i=1}^M F_i y_i \quad (4)$$

où x_{ij} représente la **part** de la demande exprimée en j et satisfaite par un équipement localisé en i , et y_i est une variable 0 – 1, égale à 1 si un équipement est implanté en i et 0 dans le cas contraire.

(4) rend compte de tous les coûts de production et de transport qui doivent être pris en compte pour satisfaire l'ensemble des besoins sous les **contraintes** :

$$0 \leq x_{ij} \leq y_i \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N \quad (5)$$

(5) implique qu'aucune demande ne peut être satisfaite à partir d'un site où aucun équipement n'est installé.

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (6)$$

(6) signifie que l'ensemble des besoins en i doit être couvert par les équipements effectivement construits.

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M \quad (7)$$

(7) représente les contraintes d'**indivisibilité** des équipements.

Il existe toujours une solution optimale qui est telle que tout marché local soit fourni par un seul équipement, ce qui implique que les contraintes (5) peuvent être remplacées par les contraintes suivantes

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N$$

Les contraintes d'indivisibilité (7) sont remplacées par les contraintes de **non-négativité** suivantes

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (8)$$

où, à la solution optimale, y_i n'excédera jamais 1 puisque $x_{ij} \leq 1$.

Autrement dit, **on suppose les équipements parfaitement divisibles**, le coût d'installation d'un équipement de taille y_i étant égal à $F_i y_i$. Cela équivaut à supposer des rendements d'échelle constants au niveau de chaque établissement.

Etant données les contraintes (5), on aura, à l'optimum :

$$y_i = \max_{j=1, \dots, N} \{x_{ij}\} \quad i = 1, \dots, M$$

Dans ce cas, le **SPLP** devient un programme linéaire standard appelé **relaxation** du programme.

Puisque l'ensemble des solutions possibles est plus large sous (8) que sous (7), la valeur optimale du problème initial est supérieure ou égale à celle d'un problème où les contraintes sur les variables entières ont été relâchées.

Le **dual** du programme linéaire relâché est défini comme suit :

$$\max Z_D = \sum_{j=1}^N \lambda_j \quad (9)$$

sous les contraintes :

$$\lambda_j - \mu_{ji} \leq (c_i + t_{ij})\delta_j \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^N \mu_{ji} \leq F_i \quad i = 1, \dots, M \quad (11)$$

$$\mu_{ji} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N \quad (12)$$

λ_j sont les variables duales associées aux contraintes (6);

μ_{ji} sont les variables duales associées aux contraintes (5) réécrites comme suit :

$$y_i - x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N$$

L'interprétation économique des **variables duales** est la suivante :

λ_j est la disponibilité à payer des consommateurs localisés en j pour que leur besoin δ_j soit satisfait;

μ_{ji} est le montant que ces mêmes consommateurs proposent pour qu'un équipement soit installé en i .

L'ensemble des consommateurs desservis par l'équipement i peut être vu comme un “club” dont les droits payés par les consommateurs en j sont précisément donnés par μ_{ji} .

La maximisation de (9) implique la maximisation de la recette totale, soumis aux contraintes suivantes :

(i) la **disponibilité à payer** par les consommateurs localisés en j , **nette** des **droits** qu'ils payent pour obtenir le bien en provenance de i , n'excède jamais le **coût d'approvisionnement** de ces mêmes consommateurs depuis la localisation j (voir (10)) ;

(ii) la **somme** des **droits** payés par **tous** les consommateurs approvisionnés à partir de l'équipement i n'excède pas le coût fixe d'installation d'un équipement en ce lieu (voir (11));

(iii) les droits μ_{ji} sont non négatifs mais peuvent être nuls (voir (12)).
s sur les disponibilités à payer λ_j .

Chaque équipement peut être interprété comme un agent distinct qui vise à maximiser son propre profit

$$\pi_i = \sum_{j=1}^N [\lambda_j - (c_i + t_{ij})\delta_j]x_{ij} - y_i F_i \quad i = 1, \dots, M$$

où chaque terme entre crochets représente le profit brut obtenu grâce aux ventes sur le marché j , le dernier terme représentant le coût fixe que le producteur i doit encourir lors de la mise en place d'un établissement **fractionnel** de taille y_i .

En **programmation linéaire**, il est bien connu, qu'à l'optimum, les conditions de complémentarité suivantes sont vérifiées

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow \lambda_j^* - \mu_{ji}^* = (c_i + t_{ij})\delta_j \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N \quad (13)$$

La condition (13) signifie qu'un flux positif de bien en provenance de i vers j implique que la disponibilité à payer des consommateurs localisés en j , après déduction de leur contribution à la construction d'un équipement en i , est juste égale au coût d'approvisionnement de ces mêmes consommateurs à partir de cet établissement

$$y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \mu_{ji}^* = F_i \quad i = 1, \dots, M \quad (14)$$

La condition (14) signifie que, là où est construit un équipement, la somme des droits payés par tous les consommateurs couvre exactement le coût fixe d'ouverture de cet établissement. Si la disponibilité à payer des consommateurs en j est positive

$$\lambda_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^M x_{ij}^* = 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (15)$$

La condition (15) signifie que leur besoin est satisfait par l'ensemble des équipements existants

$$\mu_{ji}^* > 0 \Rightarrow y_i^* = x_{ij}^* \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N \quad (16)$$

La condition (16) signifie qu'un droit positif payé par des consommateurs localisés en j pour l'implantation d'un équipement en i implique que la part des besoins de j satisfaite à partir de i est égale à la "fraction" de l'équipement effectivement construit en i .

Les conditions (13)-(16) impliquent qu'à l'optimum, les équipements **ouverts** réalisent un **profit nul** ($\pi_i = 0$) alors qu'aucun **autre** équipement n'est susceptible d'être mis en place car, compte tenu des disponibilités à payer (λ_j^*) et des droits (μ_{ji}^*) déterminés à l'équilibre, il réaliserait un **profit négatif** ($\pi_i < 0$).

L'économie fonctionne

(i) **comme si le prix du bien sur le marché j (défini par $(\lambda_j^* - \mu_{ji}^*)/\delta_j$) était égal au coût marginal d'approvisionnement ($c_i + t_{ij}$) de ce marché par un équipement construit en i ;**

(ii) **alors que des transferts forfaitaires (μ_{ji}^*) permettent de couvrir les coûts fixes des équipements construits;**

En programmation linéaire, on sait que de telles variables duales existent toujours et qu'elles permettent l'obtention d'un optimum décentralisé au moyen de prix et de transferts forfaitaires.

Malheureusement, la solution du problème dual peut conduire à une solution telle que la solution du primal implique des valeurs fractionnelles pour les variables y_i peut ne pas satisfaire les contraintes d'intégralité (7).
Posons

$$[\lambda_j - (c_i + t_{ij})\delta_j]^+ \equiv \max \{ \lambda_j - (c_i + t_{ij})\delta_j, 0 \} \quad i = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N$$

Ceci implique que le dual peut se réécrire sous la forme condensée suivante:

$$\max \widehat{Z}_D = \sum_{j=1}^N \lambda_j$$

sous la contrainte

$$\sum_{j=1}^N [\lambda_j - (c_i + t_{ij})\delta_j]^+ \leq F_i \quad i = 1, \dots, M$$

Dans ce nouveau cadre, $[\lambda_j - (c_i + t_{ij})\delta_j]^+$ représente les droits que les consommateurs en j sont disposés à payer pour obtenir un équipement implanté en i qui les approvisionne au coût marginal de production et de transport.

Exemple. Les marchés locaux et les localisations potentielles coïncident avec les sommets d'un triangle dont les côtés ont tous une longueur égale à 1. Le besoin en produit est le même sur tous les marchés et $\delta_j = 1$. Le coût de production ne varie pas selon la localisation et $F_i = 2$, $c_i = 0$. Enfin, les coûts de transport sont linéaires avec la distance et l'acheminement d'un produit se fait dans le sens d'une aiguille d'une montre de telle sorte que la matrice (t_{ij}) soit la suivante (les routes admissibles vont de 1 à 2, de 2 à 3 et de 3 à 1) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est moins coûteux d'approvisionner les consommateurs localisés en 1 à partir du site 1, ensuite du site 3, et, enfin, du site 2. Le dual condensé correspondant s'écrit :

$$\max \widehat{Z}_D = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

sous les contraintes suivantes:

$$[\lambda_1]^+ + [\lambda_2 - 1]^+ + [\lambda_3 - 2]^+ \leq 2$$

$$[\lambda_1 - 2]^+ + [\lambda_2]^+ + [\lambda_3 - 1]^+ \leq 2$$

$$[\lambda_1 - 1]^+ + [\lambda_2 - 2]^+ + [\lambda_3]^+ \leq 2$$

Par symétrie, on vérifie que

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = \lambda_3^* = 3/2$$

la valeur optimale du dual étant alors égale à $9/2$.

Les conditions de complémentarité (13)-(16) sont alors satisfaites si et seulement si :

$$y_1^* = x_{11}^* = x_{12}^*$$

l'équipement 1 dessert les marchés 1 et 2

$$y_2^* = x_{22}^* = x_{23}^*$$

l'équipement 2 dessert les marchés 2 et 3

$$y_3^* = x_{31}^* = x_{33}^*$$

l'équipement 3 dessert les marchés 1 et 3.

Comme $x_{1j}^* + x_{2j}^* + x_{3j}^* = 1$, il en résulte que $y_i^* = 1/2$. Les trois égalités précédentes impliquent donc que :

$$x_{11}^* = x_{12}^* = x_{22}^* = x_{23}^* = x_{31}^* = x_{33}^* = 1/2$$

$$x_{13}^* = x_{21}^* = x_{32}^* = 0$$

En conséquence, le problème où les contraintes sur les variables entières ont été relâchées conduit à une solution où la “moitié” d’un équipement est implanté en chaque localisation.

Les coûts totaux de production sont égaux à 3 et les coûts totaux de transport à $3/2$. Ce résultat contredit les contraintes d’intégralité (7), problème dû à l’absence de solution optimale pour laquelle chaque marché est approvisionné par un seul établissement.

Revenons au problème initial (4)-(7) dont la solution optimale est donnée par :

$$y_1^* = y_2^* = 1$$

$$x_{11}^* = x_{22}^* = x_{23}^* = 1$$

ce qui implique que les coûts totaux de production sont égaux à 4 et les coûts totaux de transport à 1.

Du fait de l’indivisibilité des établissements, on dépense davantage en coûts fixes de production sans pour autant permettre une réduction correspondante des coûts de transport. On obtient une valeur de (4) égale à 5 qui est strictement supérieure à la valeur optimale du problème relâché, à savoir $9/2$.

La différence $Z - \widehat{Z}_D$ est appelée **écart de dualité**. C’est précisément l’existence de cet écart qui rend problématique, mais pas impossible, la décentralisation de la configuration optimale, même en tenant compte d’un plus grand nombre d’instruments, à savoir des prix concurrentiels et des droits.

Néanmoins, les choses ne sont pas aussi négatives qu’elles ne semblent l’être de prime abord.

Tout d’abord, la solution du dual du **SPLP** relâché est dans la pratique “souvent” un nombre entier, ce qui rend possible la décentralisation des décisions de location par un système de prix non linéaire.

Ensuite, des résultats récents montrent que le **SPLP** et le dual sont reliés entre eux selon des relations a priori non évidentes. Supposons que les coûts marginaux de production soient identiques entre les localisations et que les coûts de transport t_{ij} satisfassent l’inégalité triangulaire et la propriété de symétrie suivantes

$$t_{ij} \leq t_{ik} + t_{kj}$$

$$t_{ij} = t_{ji}$$

On montre que la valeur optimale de Z n’excède jamais celle de Z_D de plus de 74 % :

$$\max Z_D \leq \min Z \leq [(e + 2)/e] \max Z_D \quad (17)$$

En d’autres termes, il existe toujours une configuration spatiale des équipements et un système de tarification binaire permettant de couvrir au moins la fraction $e/(e + 2) \approx 0.576$ du coût total supporté.

La borne supérieure de (17) n’est pas considérée comme la meilleure possible. En effet, il semble qu’actuellement, cette limite se situe aux environs de 1,463 au lieu de $(e+2)/e$, auquel cas le gestionnaire du système serait certain de couvrir au moins 68 % de son coût total.

On peut même aller plus loin car l'écart de dualité est, dans de nombreux problèmes pratiques, souvent beaucoup plus faible que celui donné par (17).

Ainsi, dans le cas où toutes les localisations i et les marchés j sont alignés, on peut montrer que

$$\min Z = \max Z_D$$

de sorte que le SPLP peut toujours être décentralisé au moyen d'un système de prix non linéaires dès que l'espace est linéaire.

Ce résultat nous invite cependant à la prudence : un résultat valable dans une économie unidimensionnelle peut cesser de l'être dans une économie bidimensionnelle.

Enfin, il n'y a pas d'écart de dualité si et seulement si le noyau de l'économie correspondant au SPLP est non vide. Ce résultat a deux implications majeures : la possibilité de décentraliser la solution optimale d'un SPLP signifie qu'il existe une règle de fixation des prix telle qu'aucun groupe de consommateurs localisés en certains marchés ne puisse accéder à une meilleure situation pour eux-mêmes en quittant les autres.

Ces résultats suggèrent qu'un équilibre concurrentiel non linéaire approximé peut exister puisque l'approximation obtenue par le relâchement des contraintes d'intégralité dans le SPLP est souvent bonne.