Unicité et stabilité (suite)

2006-2007.

5.

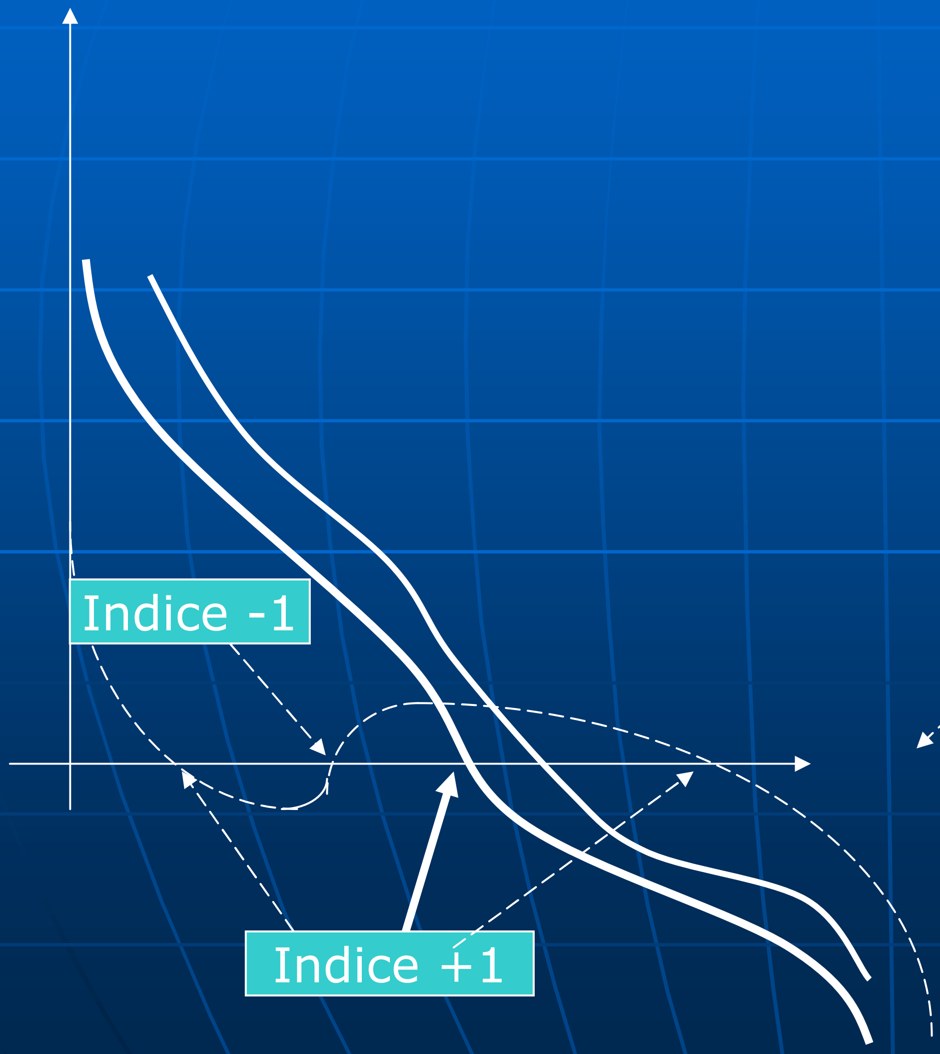
Le point.

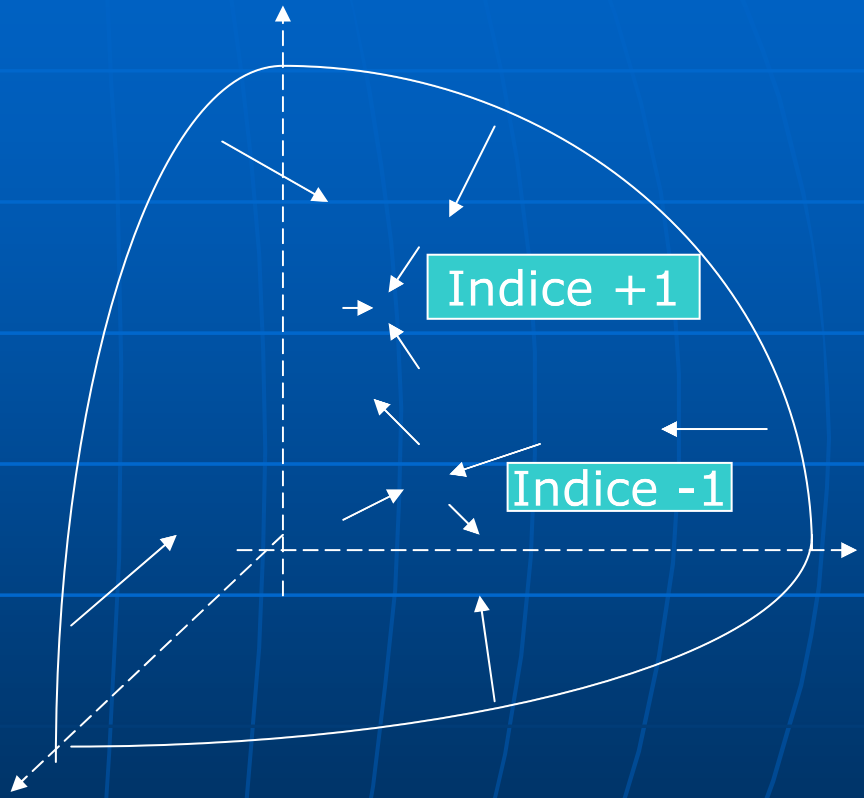
- Une économie abstraite :
  - Un espace des biens, R^n, w, u(h,.),Y(j)$\subset R^n$
  - Deux déclinaisons.
    - Economie d'échanges : u(h,.), w(h).
    - Une économie de production.
  - Deux questions :
    - Existence, Calcul : tâtonnement ….
- Un outil :
  - La fonction d'excès de demande (éco. d'échanges strict.convexe).
  - $Z : p \in R^n_+ \rightarrow Z(p) \in R^n$
  - $\underline{\boldsymbol{Z}} : p \in R^{n-1}_+ \rightarrow \underline{\boldsymbol{Z}}(p) \in R^{n-1}$, numéraire-sphère, S^n, simplexe,U^n.
  - Z(p*)=0
  - Si économie de production avec rdts constants… $Z(p) \in Y$
- Philosophie:
  - Unicité paraît plausible….stabilité aussi ?
  - Difficulté analytique ….

Technique mathématique pour l'unicité.

- Un ingrédient supplémentaire : Z est différentiable.
  - p, $\underline{\mathbf{Z}}$(p), différentiable, numéraire choisi et oublié
  - Considérons le Jacobien ($\partial\underline{\mathbf{Z}}$)(p), matrice (n-1, n-1)
- Le concept d'économies régulières.
  - Economie régulière : En tt équilibre p*,Det(($\partial\underline{\mathbf{Z}}$)(p*))#0.
  - <u>Presque toutes les économies sont régulières.</u>
  - Un théorème à la fois « intuitif » et « profond ». (Sard, Thom)
- Techniques de démonstration; Suite.
  - Indice équilibre est 1, Sign (Det(($\partial\underline{Z}$)(p*)) =sign $(-1)^{n-1}$
  - Ss réserve des conditions au bord;
  - **Σindices = *1*. (Poincaré-Hopf).**
- THM : *Si tous les équilibres ont l'indice +1, alors, l'économie a un seul équilibre.*
  - Elle est régulière.
  - Est-ce mieux que : ∀p, Sign (Det(($\partial\underline{Z}$)(p)) =sign $(-1)^{n-1}$?
  - Légèrement pour deux raisons
    - (($\partial\underline{Z}$)(p) a des propriétés particulières au voisinage de l'équilibre.
    - Idées a priori sur la zone de l'équilibre.

Indices visualisés





Un théorème d'unicité.

- Les intuitions économiques derrière l'unicité ou la convergence.
  - Version différentielle de la loi de la demande
  - $\underline{Z}$ définie négative : $\forall$p,dp, dp.$(\partial \underline{Z})_p$.dp<0.
  - Version affaiblie :
  - $\underline{Z}$ définie négative sur $\underline{Z(p)}^{\perp}$, $\forall$p,dp, $\underline{Z}$dp=0, dp.$(\partial \underline{Z})_p$.dp <0. (id.)
  - Version locale :
  - $\underline{Z}$ définie négative à l'équilibre : propriété préc. Z=0.
- THM :
  - Si en tout équilibre, la matrice $(\partial \underline{Z})(p^*)$ est définie négative,
  - alors il existe un équilibre unique.
  - Le tâtonnement est localement convergent…
  - Preuve.
    - Matrice déf. négative $\Rightarrow$ le polynome caractéristique $[(\partial \underline{Z})(p^*)-\lambda I]$ pas de valeur propre positive,
    - son signe en zéro= sign Det..= signe à l'infini= sign $(-1)^{n-1}$ .indice +1.
    - Tâtonnement, voir plus loin….

Matrices jacobiennes.

$$\left(\partial Z\right)_{(p)} = \begin{pmatrix} \partial Z_1/\partial p_1 & \partial Z_1/\partial p_2 & \cdots & \partial Z_1/\partial p_n \\ \partial Z_2/\partial p_1 & \partial Z_2/\partial p_2 & \cdots & \partial Z_2/\partial p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial Z_n/\partial p_1 & \partial Z_n/\partial p_2 & \cdots & \partial Z_n/\partial p_n \end{pmatrix}$$

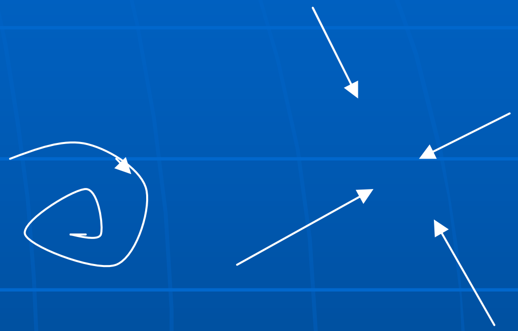
$$\left(\partial Z\right)_{(p)} + \begin{pmatrix} z_1\,\partial Z_1/\partial R & z_2\,\partial Z_1/\partial R & \cdots & z_n\,\partial Z_1/\partial R \\ z_1\,\partial Z_2/\partial R & z_2\,\partial Z_2/\partial R & \cdots & z_n\,\partial Z_2/\partial R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1\,\partial Z_n/\partial R & z_2\,\partial Z_n/\partial R & \cdots & z_n\,\partial Z_n/\partial R \end{pmatrix} = \left(\partial Z\right)_p^c$$

$$p \cdot \left(\partial Z\right)_p^c = 0$$

$$\left(\partial Z\right)_p = \left(\partial Z\right)_p^c - \left(\frac{\partial Z}{\partial R}\right)\left(Z^t\right)$$

La convergence du tâtonnement walrassien.

- Convergence locale
  - ∂**Z** a des vecteurs propres réels et des valeurs propres négatives.
  - CNS : Valeurs propres à partie réelle négative.
  - Unicité + cvgce locale $\Rightarrow$ cvgce tâtonnement W ?



- Convergence globale.
  - Distance entre sit. et l'équ. p*, V=‖p*-p‖,
  - (dV/dt)=
  - 2(p*-p(t)).Z(p(t))
  - =-p*. Z(p(t))
- THM :
  - Si en tout équilibre,   p*. Z(p(t))>0,
  - alors le tâtonnement est globalement stable et l'équilibre unique.
  - V est une fonction de Liapounov

L'intuition de Walras : La loi de la demande ?

- Monotonie faible :
  - $p_h \rightarrow Z_h(p_h,.)$ est décroissante.
  - $p \rightarrow (\partial Z)$ a une diagonale négative.
  - Suffisant avec deux biens seulement.
  - Avec plusieurs biens. Walras.
- Stricte Monotonie forte : Loi de la demande.
  - Normer p, $(\Delta p)(\Delta \underline{\boldsymbol{Z}})<0$
  - $(p_2 - p_1)(\underline{\boldsymbol{Z}}(p_2)-\underline{\boldsymbol{Z}}(p_1))<0$.
  - Version locale.
  - $(\partial \underline{\boldsymbol{Z}})$ négative définie/D $\Rightarrow$ stricte Monotonie/D.
  - Essentiellement ... équivalent ($\Leftrightarrow$ sans st
- THM :
  - Loi de la demande implique unicité de l'équilibre.
  - Cvgce globale du tâtonnement.
  - Preuve
    - unicité : directe ou thm précédent.
    - Cvge : thm précédent

p2- p1

Z(p2)-Z(p1)

L'axiome Faible.

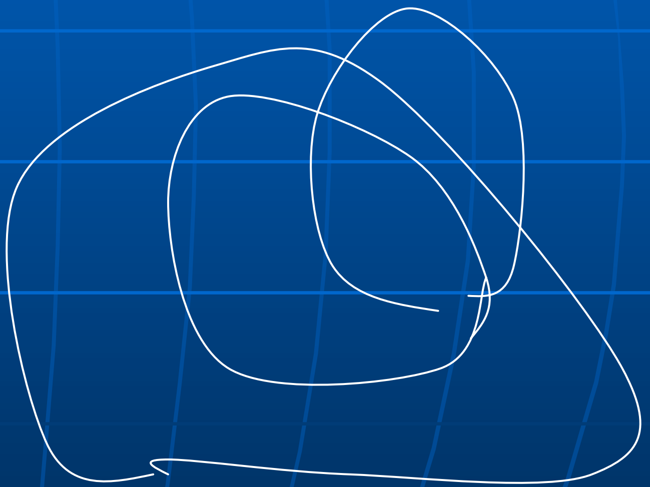
- Axiome :
  - Def. $p.Z(q) \leq 0 \Rightarrow q.\ Z(p) > 0$, $p \# q$, Sans normalisation
  - Interprétation : Axiome Faible de la Préférence Révélée
  - Def équivalente : $(p-q)\mathbf{Z}(q) \leq 0$, $\rightarrow (p-q).\mathbf{Z}(p) < 0$ après normalisation
- Propriétés.
  - Z satisfait la version faible locale de négativité définie :
  - si Z négative définie sur $Z(p)\perp$sur D ouvert convexe alors Z satisfait l 'axiome: $v(\partial Z)v < 0$, $v/v.Z=0$. Essentiellement équivalent.
- Remarques sur l'axiome faible.
  - Loi demande.. $(p-q)[(Z(p)-Z(q)] < 0$, $\Rightarrow$ AF
  - Propriété la plus faible impliquant tjrs unicité/ production ajoutée.
  - Pas préservé par addition.
- THM
  - Axiome faible $\Rightarrow$ Cvgce globale du tât. Walras, Unicité.
  - Preuve :
    - PH
    - $q^*.Z(p) > 0$.

La substituabilité brute.

- Définition :
  - Une hypothèse sur le Jacobien de la demande
    - (∂Z) a une diagonale négative.
    - des termes hors diagonale positifs.
  - Interprétation substituabilité.
    - Plausibilité, niveau agrégé, (dispersion des choix)
    - Préservée par addition,
    - mais pas par plongement dans une éco. de production…
- Propriétés.
    - ($\partial\underline{\mathbf{Z}}$) a une « diagonale dominante » (déf…,dét. signe constant(0))
    - On peut écrire ($\partial\underline{\mathbf{Z}}$)=-r[I-A],
      - A positive et « productive ».
      - $(\partial\underline{\mathbf{Z}})^{-1}$ est une matrice à éléments négatifs.
      - Cdtion de signe déterminant,(1),
    - Vérifie aussi :
      - Version locale de sdn à l'équilibre (comme AF) (2)
      - p*.Z(p)>0 (pour la version finie de SB). (3)
- Résultats : unicité.
  - Preuves : 0,1,2,3, stabilité locale (2), globale (3).

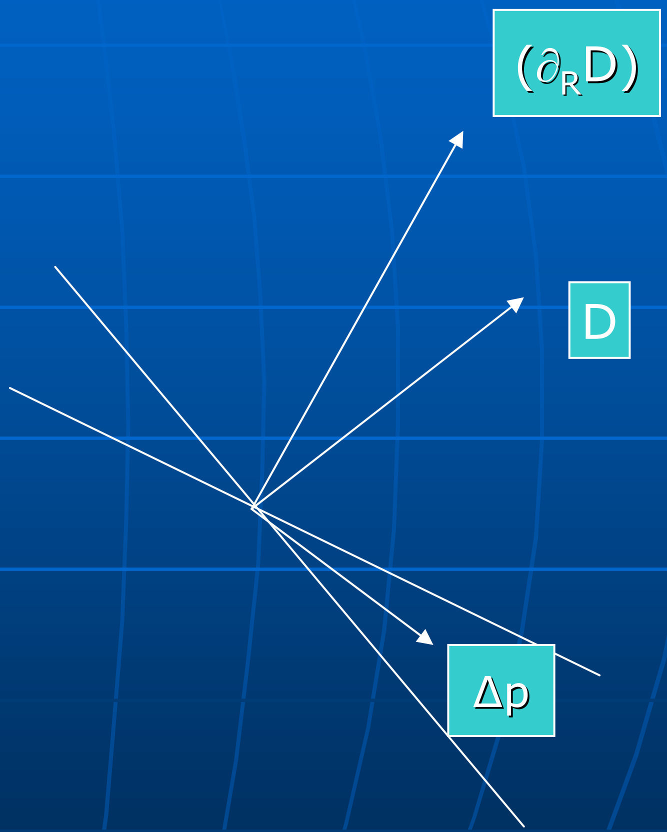
Relations conditions unicité.

- Autres théorèmes d’unicité
  - Absence d’échanges.
- Relations entre les conditions.
  - Demande
  - Axiome faible.
  - Substituabilité Brute
- Plausibilité.
  - AF : trop fin.
  - SB
    - Peu plausible sauf argument d’agrégation
  - Loi de la demande.
    - Sens économique.
    - Extension par addition



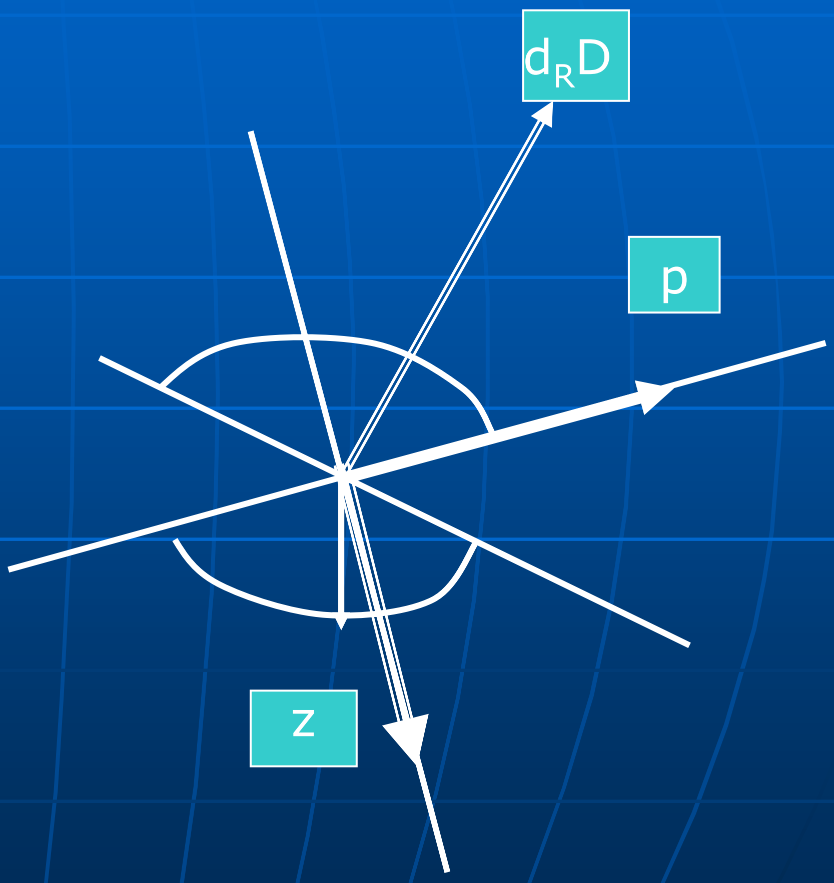
La loi de la demande

- Commentaire :
  - Préservé par addition.
- Loi de la demande individuelle », cas de revenus exogènes
  - Effet de richesse à R donné.
  - Dérivée de la demande : $(\partial_p D)=(\partial_p M) + (\partial_R D)(D)^T$
  - $\Rightarrow \exists\ \Delta p/\ (\Delta p)\ (\partial_R D)(D)^T\ (\Delta p) > 0$
  - Effet à comparer à l'effet de substitution
- Niveau individuel
  - Si la fonction d'utilité satisfait
  - $-[x.(\partial^2 u).x]/[x.\partial u(x)]<4,\ \forall x$
  - D(p,.) satisfait la loi ..demande
  - Substituabilité élevée.
- Niveau agrégé (Hildenbrandt)
  - Conditions théoriques agrégation. Preuves empiriques.



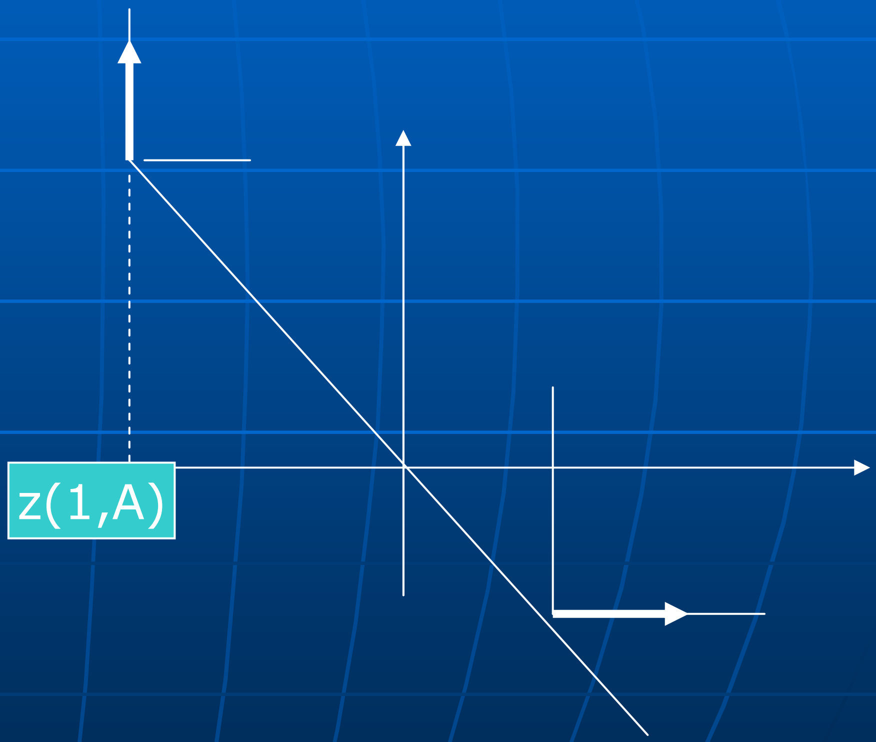
La loi de la demande avec revenus non exogènes.

- Les revenus proviennent des dotations en biens.
  - Les effets de revenu dépendent du signe des échanges avec le marché…
  - Le contre-effet à la substitution peut être « violent ».
- Si suffisamment d'agents/ biens, jouer/effets de revenus eng.. dem?. agrégée loct. quelconque.
- Effet substitution suf. fort : dominer effet revenu (super Cobb-Douglas).



Demande agrégée localement quelconque.

- Si suffisamment d'agents/ biens, jouer/effets de revenus eng.. dem?. agrégée loct. quelconque.
- Exemple :2 biens, 2 agents.
  - Prix (1,1)
  - Pas d'effet de substitution.
  - Effets revenus A$\rightarrow$1, B$\rightarrow$2
  - Ex : 2 biens, 1,2, prix =, deux consommateurs A, B.
  - On peut engendrer Z(1), ∂Z(1) donnés.
  - z(1,A)+z(1,B)=Z(1).
  - ∂Z(1) = - z(1,A)



Le théorème de Sonnenschein-Debreu-Mantel.

- Dans une économie d'échanges :
  - n biens.
  - Prendre Z, p.Z(p)=0, Z continue.
  - Prendre : ε / $p_l \geq \varepsilon$, $\forall$l. : S- ε.
  - Alors $\forall$ ε, on peut trouver une économie d'échanges à n consommateurs, dont la fonction d'excès de demande coincide avec Z sur S- ε.
  - Fonction d'utilité homothétiques !
- Commentaire.
  - Tout est possible :
    - Equilibres en position quelconque.
    - En nombre quelconque (impair..)
    - Propriétés locales quelconques….(pas tout à fait..)
  - Questions théoriques et questions empiriques..

Qu’en penser ?

- Tout peut arriver : c’est la faillite de la théorie…
  - Propriétés qualitatives valables dans tous les mondes possibles : nbre impair, efficacité …
  - Ce qui montrerait que la théorie n’est pas bonne….?
    - Qu’elle est trop simple, trop compliquée…trop générale?
- Une bonne interprétation.
  - Réfutation spectaculaire du « simplisme » parfois reproché au modèle
  - SMD aurait surpris la plupart des constructeurs de la théorie.
  - Beaucoup des questions sont des questions empiriques.
  - Et traitées comme telles….
  - La difficulté à faire dériver des propriétés attendues ou relativement plausibles empiriquement (la vertu algorithmique du marché) de propriétés amont est une question conceptuellement et opérationnellement importante/