Physique quantique - 24 Janvier 2011

Cours 2010-2011: Troisième Leçon

Les qubits supraconducteurs

Nous analysons le principe général de fonctionnement des qubits supraconducteurs incluant une jonction Josephson (JJ) caractérisée par son inductance non linéaire et sa capacité. Nous montrons comment les arguments développés dans la leçon 2 pour traiter une jonction isolée se généralisent dans le cas où elle est couplée à un circuit permettant de manipuler et de détecter le qubit. Nous établissons pour différentes configurations le hamiltonien décrivant l'évolution des deux observables quantiques macroscopiques conjuguées associées à la phase et à la charge de la JJ.

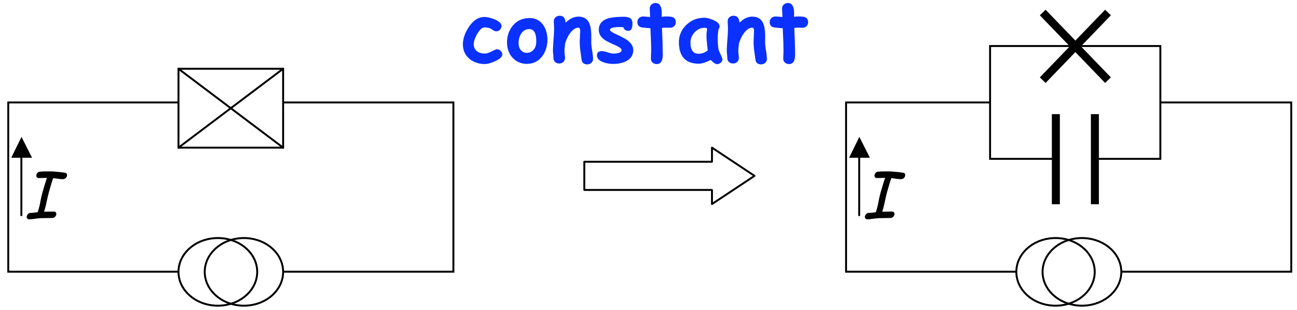
Nous décrivons (& III-A) le qubit de phase dont la phase est bien définie et la charge présente de grandes fluctuations. Nous montrons comment ce qubit peut être accordé en fréquence et détecté par un SQUID en ajustant un paramètre de contrôle (courant ou flux imposé au circuit). Nous décrivons le couplage des qubits de phase entre eux et leur interaction avec un résonateur radiofréquence pour réaliser un dispositif de "circuit QED" analogue à un montage d'Electrodynamique Quantique en Cavité.

Nous analysons (&III-B) le cas de deux types de qubits dont les états sont des superpositions symétrique et antisymétrique de courant (qubit de flux) ou de charge (qubit de charge). Nous donnons ainsi un aperçu de la variété des dispositifs développés en physique mésoscopique pour le traitement quantique de l'information.

III-A

Le qubit de phase

Jonction Josephson alimentée par un courant constant

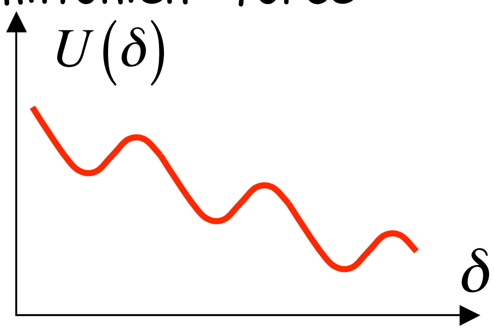


Supposons que la jonction décrite à la leçon 2 est alimentée par une source de courant constant I. La conservation du courant dans le circuit équivalent s'écrit en exprimant les lois de Josephson dc et ac:

$$I = I_0 \sin\delta + \frac{dQ}{dt} = I_0 \sin\delta + C\frac{dV}{dt} = I_0 \sin\delta + \frac{\hbar C}{2e}\frac{d^2\delta}{dt^2} \quad (3-1)$$

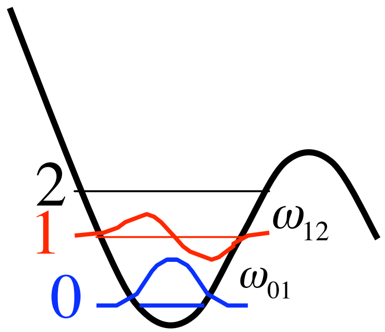
Cette équation décrit l'accélération de δ sous l'effet de la somme de deux «forces». L'une, proportionnelle à $I_0 \sin\delta$, est la force de rappel non-linéaire du résonateur Josephson (voir équ. 2-41). L'autre, proportionnelle à I, est la force appliquée imposée par la source de courant. La somme de ces forces dérive d'un potentiel proportionnel à $-I_0\cos\delta - I\delta$. La comparaison avec le Hamiltonien du circuit Josephson ouvert (équ. 2-33) conduit immédiatement au Hamiltonien «forcé»:

$$H(I) = \frac{2e^2}{C}p^2 - \frac{\hbar}{2e}(I\delta + I_0\cos\delta) \quad (3-2)$$

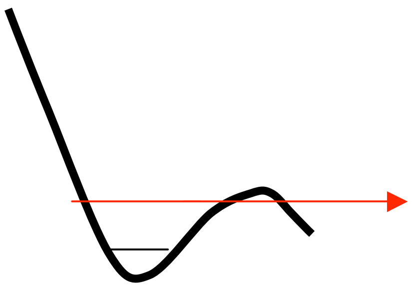


qui régit le mouvement d'une particule quantique effective de coordonnées conjuguées δ et p dans un potentiel de type plan incliné ondulé (« washboard potential »).

Le qubit Josephson de phase (phase qubit)



Pour $I<I_0$, U(δ) présente des minima (autour desquels il est quasi-harmonique) et des maxima. Supposons le système piégé au voisinage d'un minimum. L'état fondamental et le premier état excité dans le puits associé à ce minimum sont séparés par la fréquence ω_{01} (typiquement quelques GHz). Le deuxième état excité est relié au premier par une transition de fréquence $\omega_{12} \neq \omega_{01}$ en raison de l'anharmonicité. On peut donc exciter sélectivement la transition $0 \rightarrow 1$ et réaliser un système effectif à deux niveaux.



Principe de la détection sélective des états: en augmentant I, on abaisse la barrière jusqu'à ce que l'état 1 ait une énergie juste inférieure au maximum. Si le qubit est dans 0, il y reste. S'il est dans 1, la particule effective s'échappe par effet tunnel et δ subit un mouvement accéléré. Lorsque $d\delta/dt$ dépasse la valeur critique, la jonction transite et il apparaît une tension aux bornes du circuit qui fournit un signal de détection sélective du qubit dans l'état 1. La détection sélective de l'état 0 peut se faire en transférant le système de 0 à 1 par une impulsion résonnante de micro-onde sur la transition $0 \rightarrow 1$ (voir plus loin) suivie de la mesure de 1.

Accord du qubit de phase par le courant

La fréquence ω_{01} du qubit dépend du courant I qui contrôle le point de fonctionnement δ_0 de la jonction et donc sa fréquence «classique». La position du minimum de U(δ) qui annule la force agissant sur la particule effective est donnée par $I-I_0\sin\delta_0=0$ soit $\delta_0=$ Arc sin I/I_0. En ce point, le système est classiquement en équilibre et la relation $I=I_0\sin\delta$ exprime simplement que le courant classique passe par la JJ « intrinsèque » sans courant à travers la capacité (dp/dt=0 classiquement).

$$U(\delta)=U(\delta_0)+\frac{(\delta-\delta_0)^2}{2}\frac{d^2U(\delta_0)}{d\delta^2}=Cte+\frac{I_0\hbar\cos\delta_0}{4e}(\delta-\delta_0)^2 \quad (3-3)$$

La fréquence classique de l'oscillateur Josephson linéarisé en ce point de fonctionnement est:

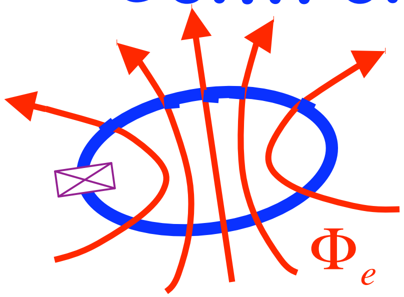
$$\omega(I)=\sqrt{\frac{2eI_0\cos\delta_0}{\hbar C}}=\sqrt{\frac{2eI_O}{\hbar C}}\left[1-\frac{I^2}{I_0^2}\right]^{1/4} \quad (3-4)$$

Cette fréquence dépend ainsi de I et s'annule pour $I=I_0$. La fréquence du qubit ω_{01} vaut environ $0.95\omega(I)$, le facteur correctif étant dû à l'anharmonicité de l'oscillateur. Ainsi, en variant le courant de contrôle I on peut accorder le qubit à une fréquence donnée.

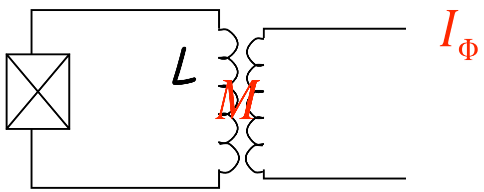
En manipulant le qubit à l'aide d'un courant I variable on peut ainsi à la fois accorder sa fréquence de résonance et détecter son état (en abaissant la hauteur de la barrière), à condition d'opérer de façon séquentielle. Nous allons maintenant analyser une variante dans laquelle le contrôle et la détection se font par couplage inductif du qubit à des circuits extérieurs (contrôle et détection par le flux).

Contrôle du qubit de phase par le flux

a



b



Au lieu de contrôler le qubit par un courant dc, on peut le faire de façon inductive par un flux magnétique Φ_e envoyé à travers le circuit (fig. a).

En pratique, on produit Φ_e à l'aide d'un transformateur supraconducteur (fig. b). M est l'inductance mutuelle des 2 circuits et L la self-inductance "classique" du circuit du qubit (attention au changement de notation par rapport à la leçon 2 où L était l'inductance non-linéaire intrinsèque de la JJ). Le courant contrôle I_Φ produit le flux $\Phi_e = M\, I_\Phi$ à travers le circuit du qubit. Un courant induit I apparaît dans L qui s'oppose au flux incident, produisant un flux total:

$$\Phi = \Phi_e - LI \quad (3-5)$$

Appliquant la relation (2-48) on obtient la condition satisfaite par la phase de la JJ:

$$\delta = 2\pi \frac{\Phi_e - LI}{\Phi_0} \quad ; \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (3-6)$$

ce qui permet d'exprimer l'énergie magnétique de l'inductance L en fonction de δ:

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{\Phi_0^2}{2L}\left[\frac{\delta}{2\pi} - \frac{\Phi_e}{\Phi_0}\right]^2 \quad (3-7)$$

et conduit, en ajoutant les contributions capacitive et inductive intrinsèque de la JJ, au hamiltonien du qubit contrôlé par le flux Φ_e:

$$H = \frac{2e^2}{C} p^2 + \frac{\Phi_0^2}{2L}\left[\frac{\delta}{2\pi} - \frac{\Phi_e}{\Phi_0}\right]^2 - \frac{\Phi_0}{2\pi} I_0 \cos\delta \quad (3-8)$$

Contrôle du qubit par le flux (suite)

On peut aussi retrouver le Hamiltonien (3-8) par un raisonnement classique de circuit. Exprimons la loi de Kirschoff aux trois éléments en parallèle, la jonction Josephson intrinsèque, sa capacité C et l'inductance L qui conduisent les courants élémentaires I_J, I_C et I_L sous la tension V. Les lois de l'effet Josephson donnent:

$$I_J = I_0 \sin\delta \quad ; \quad I_C = C\frac{dV}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi}C\frac{d^2\delta}{dt^2} \quad ; \quad (\Phi_0 = \frac{h}{2e}) \quad (3-9)$$

et la loi de l'induction classique:

$$-L\frac{dI_L}{dt} + M\frac{dI_\phi}{dt} = V \rightarrow I_L = -\frac{1}{L}\int Vdt + \frac{MI_\Phi}{L} = -\frac{\Phi_0}{2\pi L}\int\frac{d\delta}{dt}dt + \frac{\Phi_e}{L} = \frac{\Phi_e - \frac{\delta}{2\pi}\Phi_0}{L} \quad (3-10)$$

On exprime enfin la conservation du courant:

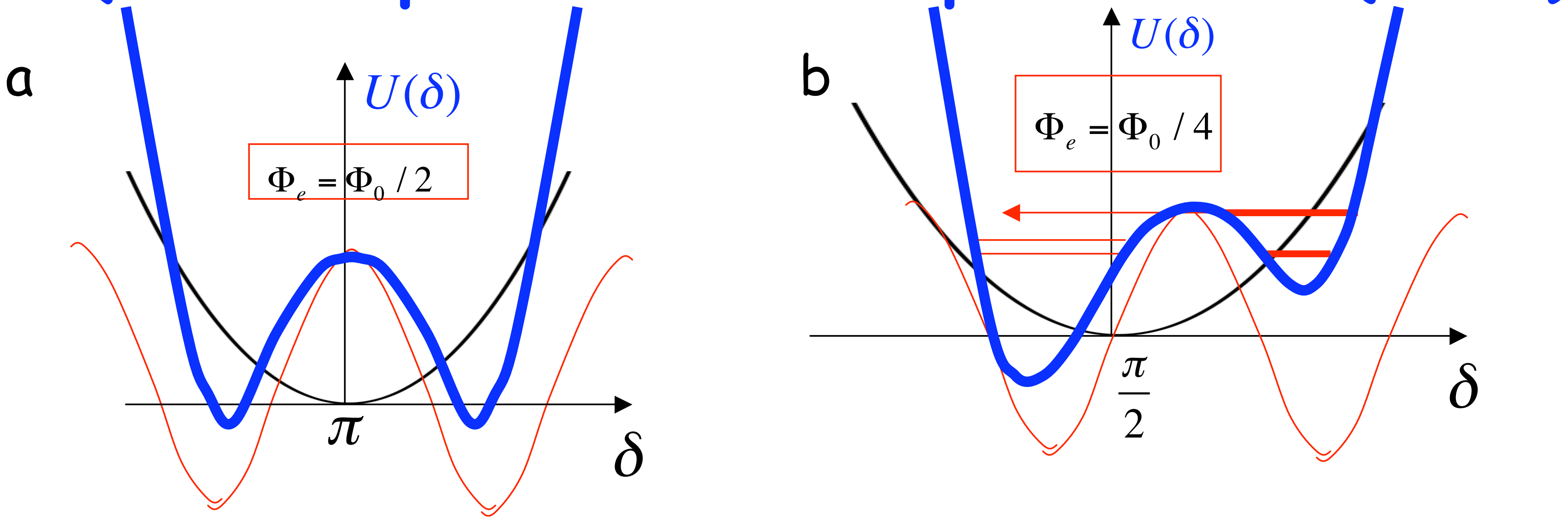
$$I_C + I_J = I_L \quad \rightarrow \quad \frac{\Phi_0 C}{2\pi}\frac{d^2\delta}{dt^2} = -I_0\sin\delta + \frac{\Phi_e - \frac{\delta}{2\pi}\Phi_0}{L} \quad (3-11)$$

Cette équation décrit la dynamique d'une particule effective dans le potentiel obtenu en intégrant la fonction de δ au second membre. On retrouve le Hamiltonien (3-8). Les valeurs d'équilibre δ_O de la phase du qubit s'obtiennent en annulant le membre de droite de (3-11). On trouve:

$$\delta_0 = 2\pi\frac{\Phi_e - LI_0\sin\delta_0}{\Phi_0} \quad (3-12)$$

Noter que (3-12) a trois solutions correspondant à des équilibres stables ou instables (minimum et maximum de U(δ). Voir plus loin).

Qubit de phase contrôlé par le flux (suite)



Le potentiel U(δ) (trait bleu) est la somme d'une parabole (trait noir) et d'une fonction cosinus (trait rouge). En changeant le flux de contrôle Φ_e, on varie la phase du cosinus au minimum de la parabole et on change la forme du potentiel. Quand $2\pi I_0 L/\Phi_0 \geq 1$, on obtient un double puits. Le potentiel est symétrique pour $\Phi_e/\Phi_0=1/2$ (Fig.a), fortement dissymétrique pour $\Phi_e/\Phi_0=1/4$ (Fig.b). Considérons d'abord le cas dissymétrique (b). Pour un choix convenable de L, le puits de droite admet un petit nombre d'états liés dont les deux plus profonds forment le qubit. La détection se fait par effet tunnel, comme dans le cas du qubit contrôlé en courant, en jouant sur le flux pour varier la hauteur de la barrière. Le système «fuit» vers le puits de gauche plus profond qui possède une grande densité de niveaux excités au voisinage du sommet de la barrière. En ajustant Φ_e on peut également régler la fréquence du qubit en changeant la courbure des puits.

Ordre de grandeur de la variance de phase

En développant le Hamiltonien du qubit autour de son point d'équilibre $\delta=\delta_0$, on le met sous la forme de celui d'un oscillateur harmonique:

$$H \approx E_C p^2 + \frac{E_J}{2}\left(\delta - \delta_0\right)^2 \quad (3-13)$$

de fréquence angulaire voisine de ω_{01}:

$$\omega_{oh} \approx \omega_{01} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2E_C E_J} \quad (3-14)$$

avec la variance de δ dans l'état fondamental donnée par:

$$\frac{E_J}{2}\left\langle\left(\delta - \delta_0\right)^2\right\rangle = \frac{\hbar\omega_{01}}{4} \quad (3-15)$$

En éliminant E_J entre (3-14) et (3-15) et en notant que $E_C=2e^2/C$, on obtient une estimation simple reliant $\nu_{01}=\omega_{01}/2\pi$ au quantum de flux, à la capacité de la jonction et à la variance de δ:

$$\left\langle\left(\delta - \delta_0\right)^2\right\rangle = \frac{e}{\Phi_0 C \nu_{01}} \quad (3-16)$$

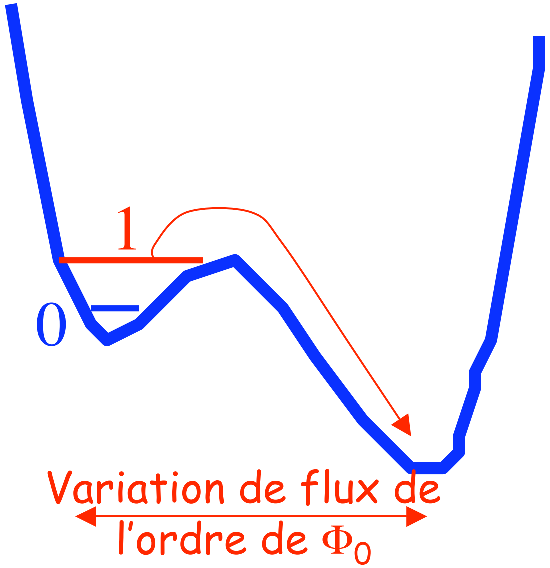
La capacité typique de la JJ du qubit de phase étant $C \sim 10^{-12}$F, on obtient, en injectant les valeurs de e et Φ_0:

$$e = 1{,}6.10^{-19}\,Coulomb \quad ; \quad \Phi_0 = 2.10^{-15}\,T.m^2 \quad ; \quad C \approx 10^{-12}\,F \quad \rightarrow \quad \left\langle\left(\delta - \delta_0\right)^2\right\rangle \approx \frac{8.10^7}{\nu_{01}}\,rad^2 \quad (3-17)$$

Pour une fréquence typique de qubit ν_{01}= 5GHz, on a $\Delta\delta = \sqrt{\langle (\delta-\delta_0)^2 \rangle} \sim 0.13$ radian. La phase de ce qubit est relativement bien définie. On a par contre $\Delta p \sim 1/(2\Delta\delta) \sim 5$ et la charge est diffuse.

Détection de l'état du qubit par un SQUID

Lorsque le qubit transite d'un puits à l'autre, δ varie environ de π, ce qui correspond à un changement de l'ordre de I_0 du courant dans la boucle du qubit et à une variation du flux de l'ordre de LI_0 ou encore Φ_0 (la réalisation du qubit exige la condition $LI_0 \sim \Phi_0$). Cette variation brusque de l'ordre d'un quantum de flux est mesurée par un SQUID couplé inductivement au qubit (Il apparaît une tension aux bornes du SQUID quand le qubit est détecté). Le circuit de contrôle par le flux est utilisé pour accorder le qubit et pour l'amener au seuil de détection différentiel des deux états au moment de la mesure.



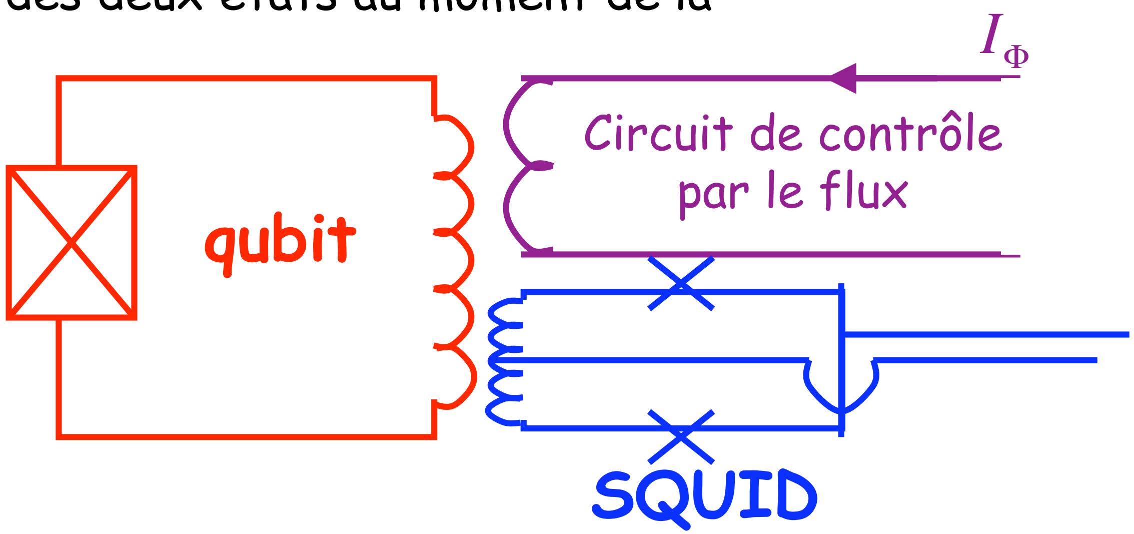
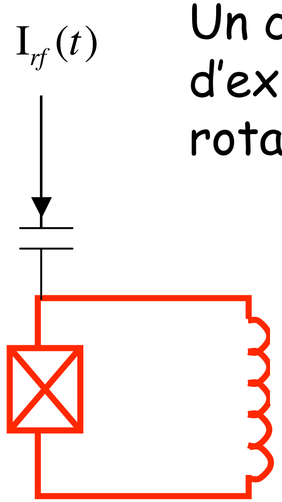


Schéma de principe du qubit de phase avec son circuit de contrôle par le flux et le SQUID de détection.

Manipulation de l'état du qubit par impulsion de radiofréquence



Un courant alternatif $-I_{rf}\, sin(\omega t-\varphi)$ de fréquence voisine de ω_{01} permet d'exciter le qubit à travers une capacité et de réaliser des opérations de rotation de son vecteur de Bloch. Le hamiltonien du qubit devient:

$$H(t) = H_{QB} + \frac{\Phi_0}{2\pi}\delta I_{rf} \sin(\omega t - \varphi) \quad (3-18)$$

Le terme d'interaction, proportionnel à la variable de position de la particule fictive représentant le qubit, rappelle le terme de couplage dipolaire électrique dans un atome. On développe le sinus en ne gardant que le terme résonant (approximation RWA) et on passe en représentation tournant à la fréquence angulaire ω. On obtient:

$$H_{QB}^{(r)} = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + i\frac{\Phi_0\langle 0|\delta|1\rangle I_{rf}}{8\pi}\left[\sigma_- e^{i\varphi} - \sigma_+ e^{-i\varphi}\right] = \frac{\hbar}{2}\left[\Delta\sigma_z - \Omega\sin\varphi\,\sigma_x + \Omega\cos\varphi\,\sigma_y\right] \quad (3-19)$$

où on a introduit les matrices de Pauli du qubit:

$$\sigma_+ = |1\rangle\langle 0| = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2} \quad ; \quad \sigma_- = |0\rangle\langle 1| = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} \quad (3-20)$$

ainsi que le désaccord de fréquence Δ et la fréquence de Rabi Ω:

$$\Delta = \omega_{01} - \omega \quad ; \quad \Omega = \frac{\Phi_0\langle 0|\delta|1\rangle I_{rf}}{2h} \quad (3-21)$$

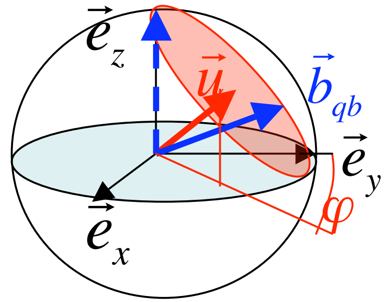
En prenant $\langle 0|\delta|1\rangle \sim 0{,}1$, on trouve $\Omega/2\pi \sim 3.10^{16}$ Hz/A. Un courant rf de 1nA donne une fréquence de Rabi d'environ 30 MHz, soit un temps de 15 ns pour un pulse π.

Rotations du vecteur de Bloch du qubit

L'application pendant un temps t d'une impulsion radiofréquence fait évoluer le qubit dans le référentiel tournant à la fréquence ω suivant l'opération unitaire:

$$U_{rf}(t) = \exp\left[-i\frac{H_{QB}^{(r)}t}{\hbar}\right] = \exp\left[-i\frac{\Delta t}{2}\sigma_z + i\frac{\Omega t}{2}(\sin\varphi\,\sigma_x - \cos\varphi\,\sigma_y)\right]$$

$$= \exp\left[-i\frac{\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}}{2}\vec{u}.\vec{\sigma}\,t\right] \qquad (3-22)$$



où σ est l'opérateur vectoriel de composantes σ_x, σ_y , σ_z et $\vec{\mathbf{u}}$ le vecteur unitaire:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}}\left[-\Omega\sin\varphi\vec{e}_x + \Omega\cos\varphi\vec{e}_y + \Delta\vec{e}_z\right] \qquad (3-23)$$

$(\vec{e}_x\ ,\vec{e}_y\ ,\vec{e}_z :$ *vecteurs unitaires sur axes de la sphère de Bloch*$)$

Le pulse rf produit une rotation du vecteur de Bloch $\vec{b}_{qb}$ associé au qubit de l'angle:

$$\theta = \sqrt{\Delta^2+\Omega^2}\ t \qquad (3-24)$$

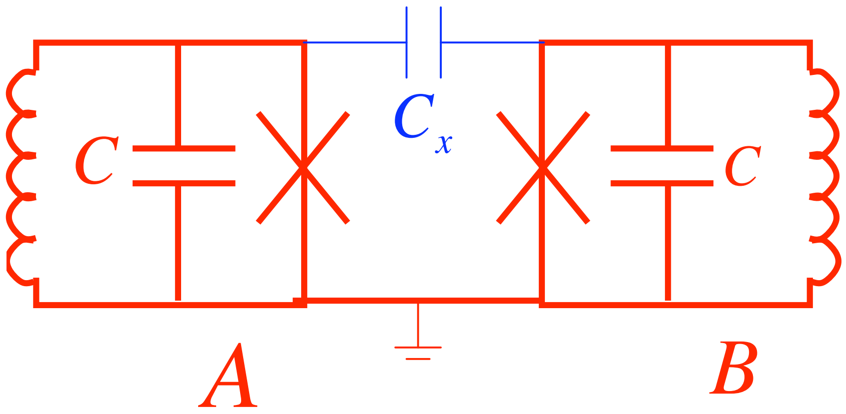
autour de $\vec{\mathbf{u}}$. En ajustant les paramètres Δ, Ω, φ et t, on effectue une rotation quelconque et prépare un état arbitraire du qubit à partir de l'état |0> (vecteur de Bloch le long de e_z). Sont particulièrement utiles les impulsions à résonance (Δ=0) d'angle $\pi/2$, π et 2π dont les actions sur l'état |0> et |1> sont:

$$U_{\Delta=0}(\theta=\frac{\pi}{2},\varphi)\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + e^{i\varphi}\left|1\right\rangle\right) \quad ; \quad U_{\Delta=0}(\theta=\frac{\pi}{2},\varphi)\left|1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e^{-i\varphi}\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right) \quad (3-25a)$$

$$U_{\Delta=0}(\theta=\pi,\varphi)\left|0\right\rangle = e^{i\varphi}\left|1\right\rangle \quad ; \quad U_{\Delta=0}(\theta=\pi,\varphi)\left|1\right\rangle = -e^{-i\varphi}\left|0\right\rangle \qquad (3-25b)$$

$$U_{\Delta=0}(\theta=2\pi,\varphi)\left|0\right\rangle = -\left|0\right\rangle \quad ; \quad U_{\Delta=0}(\theta=2\pi,\varphi)\left|1\right\rangle = -\left|1\right\rangle \qquad (3-25c)$$

Couplage capacitif de deux qubits



Les qubits de phase A et B sont identiques. On les couple par une capacité C_X très petite devant la capacité C des jonctions. Les tensions V_A et V_B aux bornes de C_x sont égales à $2ep_a/C$ et $2ep_b/C$ respectivement (p_a et p_b sont les charges ou « impulsions canoniques » des deux circuits), d'où l'énergie de couplage induite par C_x:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} C_X \left[V_A - V_B\right]^2 = \frac{2e^2 C_X}{C^2}\left[p_A - p_B\right]^2 \quad (3-26)$$

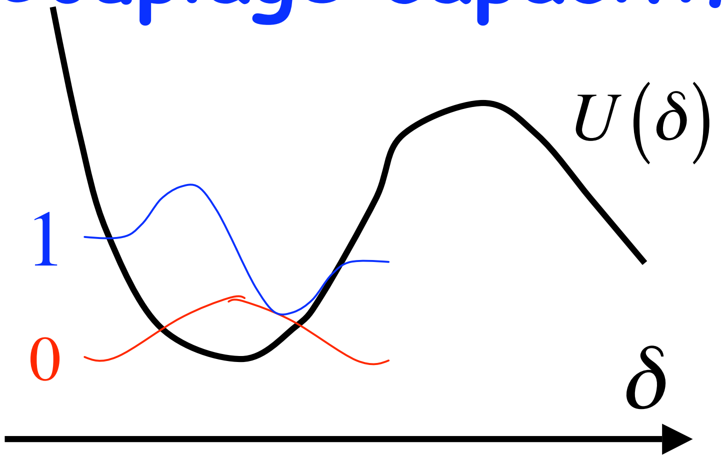
En regroupant ce terme avec les hamiltoniens des deux qbits, on écrit le Hamiltonien total sous la forme:

$$H = H_A + H_B + H_{\text{int}} = H'_A + H'_B + H'_{\text{int}}$$

$$avec \quad H'_i = \frac{2e^2 (C + C_X)}{C^2} p_i^2 + U\left(\delta_i\right) \quad (i = A, B) \quad et \quad H'_{\text{int}} = -\frac{4e^2 C_X}{C^2} p_A p_B \quad (3-27)$$

La « masse » des qubits est légèrement renormalisée, ce qui change un peu leur fréquence commune et il apparaît un terme de couplage proportionnel au produit des « impulsions généralisées ». L'effet de ce couplage est de faire apparaître un doublet de fréquences dans le spectre des deux qubits en interaction.

Couplage capacitif entre deux qubits (suite)



Les opérateurs p_i ont une valeur moyenne nulle dans les états 0 et 1 et possèdent un élément de matrice non nul entre ces états. Le couplage entre les états produit tensoriel (dégénérés en absence de couplage) $|0_A,1_B\rangle$ et $|1_A,0_B\rangle$ est:

$$\langle 0,1|H'_{\text{int}}|1,0\rangle = -\frac{4e^2C_X}{C^2}\left|\langle 0|p|1\rangle\right|^2 \quad (3-28)$$

Pour évaluer cette expression, exprimons l'énergie cinétique de point zéro de l'oscillateur associé à chaque qubit:

$$\frac{2e^2\langle 0|p^2|0\rangle}{C} = \frac{\hbar\omega_{01}}{4} \approx \frac{2e^2\langle 0|p|1\rangle\langle 1|p|0\rangle}{C} \quad (3-29)$$

On a en effet: $$\langle 0|p^2|0\rangle = \sum_j \langle 0|p|j\rangle\langle j|p|0\rangle \approx \langle 0|p|1\rangle\langle 1|p|0\rangle \quad (3-30)$$

où la somme porte sur tous les états j dans le puits (liés ou non), le premier terme donnant à lui seul l'ordre de grandeur. On déduit alors de (3-28) et (3-29):

$$\langle 0,1|H'_{\text{int}}|1,0\rangle \approx -\frac{C_X}{2C}\hbar\omega_{01} = -\hbar\frac{g}{2} \quad avec \quad g = \frac{C_X}{C}\omega_{01} \quad (3-31)$$

Le paramètre $g/2\pi$ est la fréquence d'échange d'énergie entre les qubits. Elle est égale à leur fréquence $\omega_{01}/2\pi$, divisée par le rapport entre C et C_x(généralement de l'ordre de 1000). Le couplage $g/2\pi$ est typiquement de l'ordre de quelques MHz.

Dynamique des deux qubits couplés et intrication quantique

Le hamiltonien des deux qubits couplés s'écrit à résonance ($\omega_{01A} = \omega_{01B} = \omega_{01}$):

$$H = \frac{\hbar\omega_{01}}{2}\left[\sigma_{Az} + \sigma_{Bz}\right] - \frac{\hbar g}{2}\left[\sigma_{A+}\sigma_{B-} + \sigma_{A-}\sigma_{B+}\right] \quad (3-32)$$

Si l'état initial du système est $|0\rangle_A|1\rangle_B$ et qu'on couple les qubits pendant un temps t, le système oscille entre les états $|0\rangle_A|1\rangle_B$ et $|0\rangle_B|1\rangle_A$ à la fréquence g:

$$\left|\Psi_{AB}(t)\right\rangle = \cos\frac{gt}{2}\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + i\sin\frac{gt}{2}\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B \quad (3-33)$$

et se trouve en général dans un état intriqué. Si le couplage est établi pendant un temps $t = \pi/2g$, on a une intrication maximale:

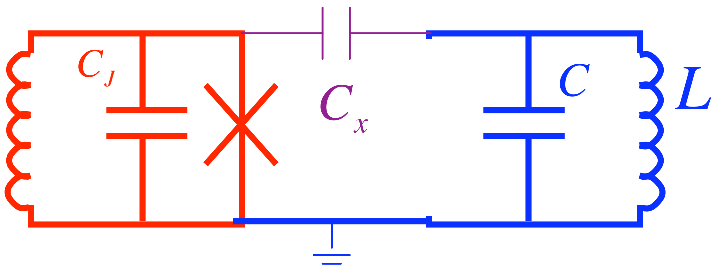
$$\left|\Psi_{AB}(t = \pi / g)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B + i\left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B\right] \quad (3-34)$$

Pour préparer cet état à partir des deux qubits dans l'état fondamental $|0\rangle_A|0\rangle_B$ on peut appliquer d'abord un pulse π au qubit B, puis faire interagir A et B pendant un temps t tel que $gt=\pi/2$. Pour brancher ou débrancher g il suffit de désaccorder brusquement les deux qubits en faisant varier $\omega_{01A}-\omega_{01B}$ sur une plage grande devant g. Lorsque $\omega_{01A}-\omega_{01B} \gg g$ la probabilité de basculement de $|0\rangle_A|1\rangle_B$ à $|1\rangle_A|0\rangle_B$ est négligeable et les qubits sont effectivement découplés. Nous décrirons dans la leçon 4 une expérience ayant démontré l'intrication de deux qubits Josephson et une expérience l'ayant exploitée pour tester les inégalités de Bell.

Couplage d'un qubit avec un résonateur radiofréquence: Circuit QED

Le résonateur le plus simple est un circuit LC. Le schéma du couplage capacitif de ce circuit avec un qubit de phase est analogue à celui du couplage de deux qubits. On écrit le Hamiltonien quantique du circuit LC:

$$H_R = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad ; \quad [Q,\Phi] = i\hbar \qquad (3-35)$$



$$Q = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{LC}\, C}{2}}\left(a + a^\dagger\right) \quad ; \quad \omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \left(\frac{\langle Q^2\rangle_0}{2C} = \frac{\hbar\omega_{LC}}{4}\right) \qquad (3-36)$$

$$\textit{Différence de potentiel appliquée à } C_X : \frac{2ep}{C_j} - \frac{Q}{C}$$

$$\textit{Energie de couplage} : \frac{1}{2} C_X \left[\frac{2ep}{C_j} - \frac{Q}{C}\right]^2 \quad \rightarrow \quad H'_{\text{int}} = -2e\frac{C_X}{C_J C} pQ \approx -C_X \sqrt{\frac{\hbar\omega_{01}}{2C_J}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{LC}}{2C}}\left(\sigma_+ + \sigma_-\right)\left(a + a^\dagger\right) \qquad (3-37)$$

Au voisinage de la résonance $\omega_{01} \sim \omega_{LC}$ et en négligeant les termes antirésonants:

$$H'_{\text{int}} \approx -\frac{C_X\,\hbar\omega_{LC}}{2\sqrt{CC_J}}\left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger\right) = -\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger\right) \quad ; \quad \Omega = \frac{C_X}{\sqrt{CC_J}}\omega_{LC} = \frac{C_X}{C}\frac{1}{\sqrt{LC_J}} \qquad (3-38)$$

On retrouve le Hamiltonien de Jaynes-Cummings de l'Electrodynamique Quantique en Cavité. On réalise avec ce système des expériences dites de "Circuit QED" (voir leçons 4 et 5).

Electrodynamique Quantique des Circuits: qubit habillé par les photons d'un résonateur

Les états propres du système qubit(A)-résonateur(R) sont à résonance les états "habillés" intriqués (voir leçon 1):

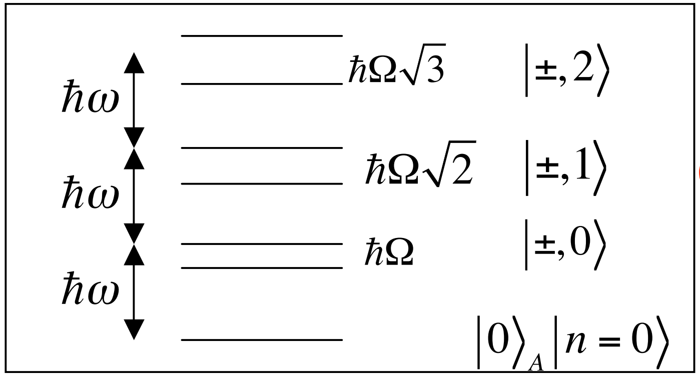
$$\left|\pm,n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|1\right\rangle_A\left|n\right\rangle \pm \left|0\right\rangle_A\left|n+1\right\rangle\right] \quad d'\acute{e}nergies \quad E_{\pm,n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \pm \frac{\hbar\Omega\sqrt{n+1}}{2} \quad (3-39)$$

constituant des doublets séparés par un intervalle proportionnel à √n+1 (fig. a). (|n> : état à n photons de R). L'état fondamental $|0>_A|0>_R$ reste non perturbé. Lorsque le désaccord Δ entre A et R varie, la séparation des états habillés devient:

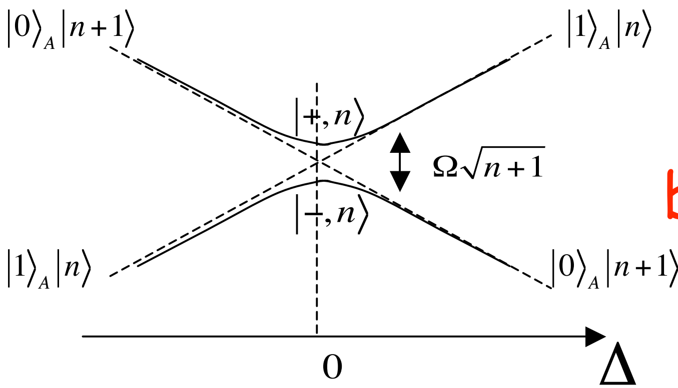
$$\Delta E_n = \hbar\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} \quad (3-40)$$

et les énergies "habillées" varient en fonction de Δ suivant deux branches d'hyperbole avec anticroisement à résonance (fig. b).A résonance ($\Delta=0$), A-R, initialement dans $|1>_A|n>$, évolue en effectuant une oscillation de Rabi qui peut être exploitée pour transférer de l'énergie du qubit au résonateur ou inversement:

$$\left|\Psi(t)\right\rangle_{A,R} = \cos\frac{\Omega\sqrt{n+1}t}{2}\left|1\right\rangle_A\left|n\right\rangle - i\sin\frac{\Omega\sqrt{n+1}t}{2}\left|0\right\rangle_A\left|n+1\right\rangle \quad (3-41)$$



a

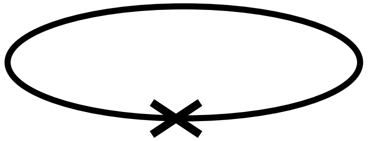


b

III-B:

Qubit de flux et de charge: deux exemples de superpositions quantiques mésoscopiques

Le qubit symétrique de flux (flux qubit)



Considérons un circuit Josephson élémentaire contrôlé par un flux extérieur $\Phi_e = \Phi_0/2$. Le hamiltonien s'écrit (equ.(3-8)):

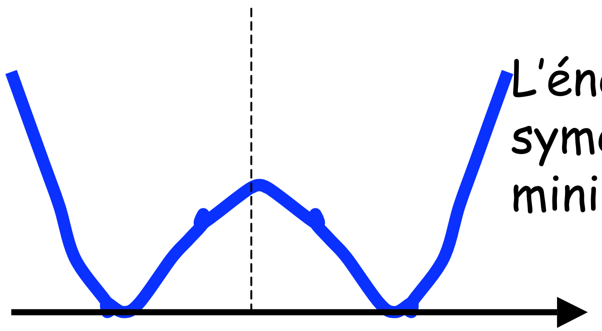
$$H = \frac{2e^2p^2}{C} + \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 L}\delta'^2 + \frac{\Phi_0 I_0}{2\pi}\cos\delta' \quad ; \quad \delta' = \delta - \pi \quad (3-42)$$

On peut à la place de δ' choisir comme variable indépendante le flux total Φ_T à travers la boucle:

$$\delta = 2\pi\frac{\Phi_T}{\Phi_0} \quad ; \quad \delta' = 2\pi\left[\frac{\Phi_T}{\Phi_0} - \frac{1}{2}\right] \quad (3-43) \qquad H = \frac{2e^2p^2}{C} + \frac{1}{2L}\left[\Phi_T - \frac{\Phi_0}{2}\right]^2 - \frac{\Phi_0 I_0}{2\pi}\cos\left[2\pi\frac{\Phi_T}{\Phi_0}\right] \quad (3-44)$$

Enfin, le courant I est relié à Φ_T par la relation:

$$\Phi_T = \Phi_e - LI \quad \rightarrow \quad I = -\frac{\Phi_0}{L}\left[\frac{\Phi_T}{\Phi_0} - \frac{1}{2}\right] \quad (3-45)$$



L'énergie potentielle du qubit en fonction de δ' (resp. Φ_T) est symétrique autour de l'axe $\delta' = 0$ (resp. $\Phi_T = \Phi_0/2$) avec 2 minima pour:

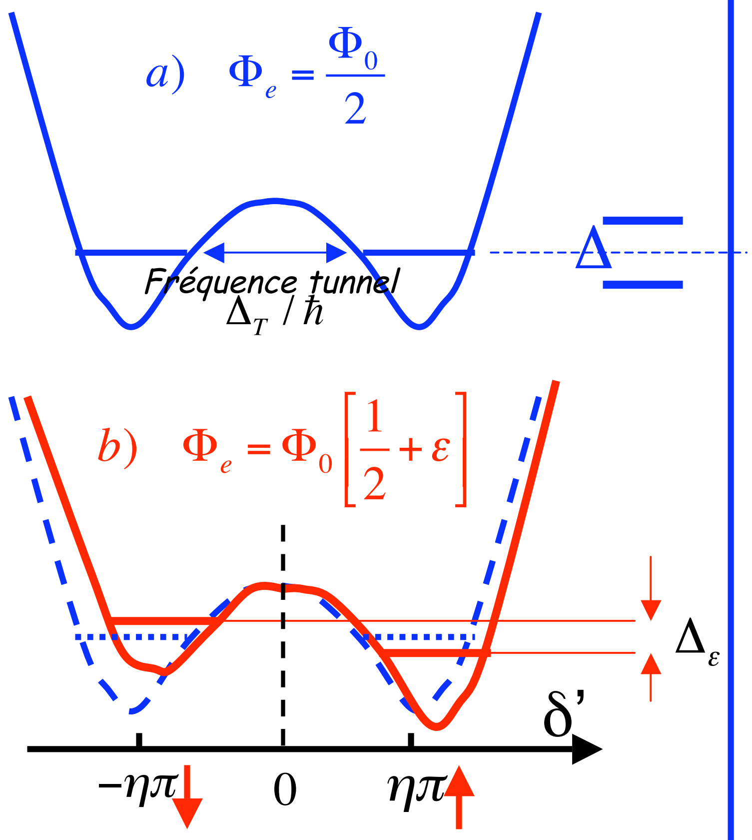
$$\delta'_\pm = \pm\eta\pi \quad \rightarrow \quad \Phi_{T\pm} = \frac{\Phi_0}{2} \pm \eta\frac{\Phi_0}{2} \quad ; \quad (\eta < 1) \quad (3-46)$$

correspondant aux courants opposés:

$$I_\pm = -\frac{\Phi_0}{L}\left[\frac{\Phi_{T\pm}}{\Phi_0} - \frac{1}{2}\right] = \mp I_q \quad avec \quad I_q = I_0 \sin\eta\pi = \frac{\eta\Phi_0}{2L} \quad (3-47)$$

Classiquement, le circuit a deux états stables avec courants permanents opposés.

Le qubit symétrique de flux (suite)



a): Potentiel du qubit de flux symétrique (bleu).
b): potentiel dissymétrisé (rouge) avec niveaux d'énergie déplacés avant prise en compte de l'effet tunnel

Pour $\Phi_e=\Phi_0/2$, les états d'énergie du qubit sont les combinaisons symétrique et antisymétrique des états fondamentaux des 2 puits. Leur énergie diffère d'une quantité Δ_T, $\hbar$ fois la fréquence de l'effet tunnel à travers la barrière entre les puits. [Note: ne pas confondre l'effet tunnel de l'observable macroscopique δ avec celui des paires de Cooper de la JJ].

Ecartons-nous un peu de la condition d'équilibre en ajustant le flux de contrôle à la valeur $\Phi_e=\Phi_0[(1/2)+\varepsilon]$. La dégénérescence des états des deux puits est levée, avant même de prendre en compte l'effet tunnel. Ceci est dû à la déformation du potentiel, un puits s'abaissant et l'autre s'élevant. Le potentiel devient:

$$U(\delta',\varepsilon) = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 L}\left[\delta' - 2\pi\varepsilon\right]^2 + \frac{\Phi_0 I_0}{2\pi}\cos\delta' \quad (3-48)$$

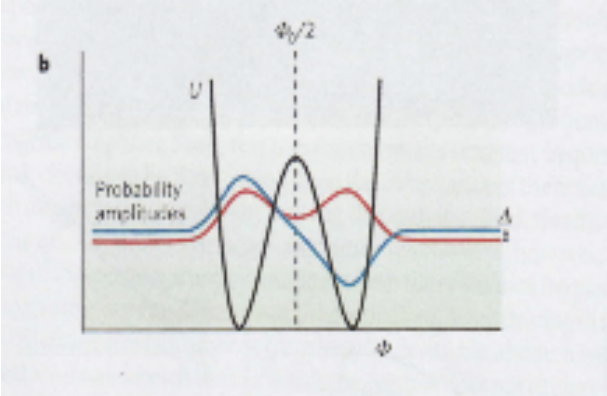
Un calcul pertubatif montre que les états du qubit, avant prise en compte de l'effet tunnel, sont déplacés en sens opposés d'une quantité proportionnelle à ε, égale à la différence d'énergie des deux minima. On trouve une levée de dégénérescence:

$$\Delta_{+\varepsilon} - \Delta_{-\varepsilon} = \Delta_\varepsilon = -2I_q\left[\Phi_e - \frac{\Phi_0}{2}\right] \quad (3-49)$$

Lorsqu'on ajoute l'effet tunnel, la distance ΔE entre les états varie de façon hyperbolique quand Δ_ε est balayé autour de 0:

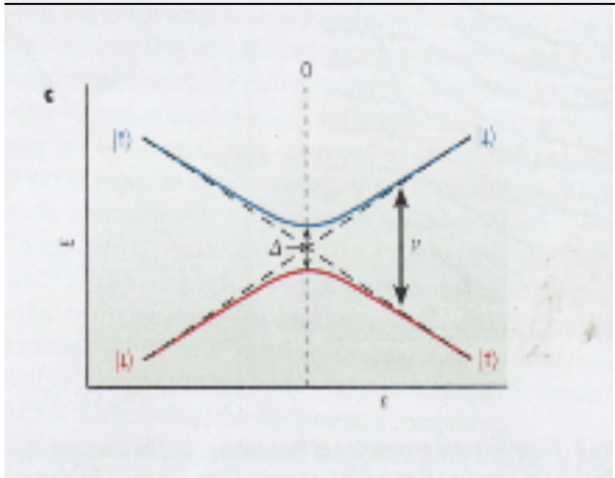
$$\Delta E = \sqrt{\Delta_T{}^2 + \Delta_\varepsilon^2} \quad (3-50)$$

Propriétés du qubit de flux symétrique



Fonctions d'onde (en fonction de Φ_T) de l'état fondamental (rouge) et excité (bleu) du qubit de flux à résonance (Φ_e=Φ_0/2). Les états des puits correspondent à des courants opposés, c.à.d. à des moments magnétiques opposés du qubit, notés |↑> et |↓>. Les états propres du qubit sont des états superpositions d'états de moments magnétiques opposés:

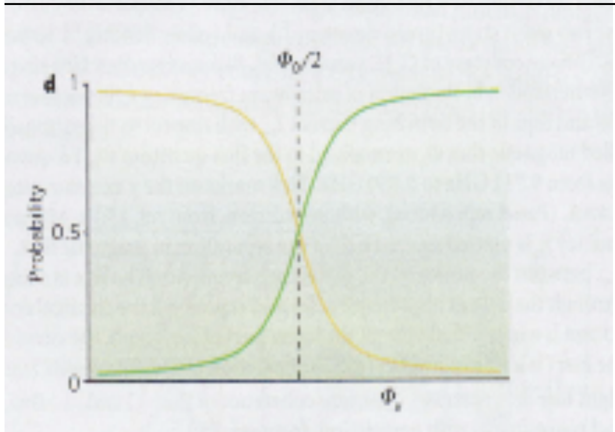
$$\left|\Psi_{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\uparrow\right\rangle \pm \left|\downarrow\right\rangle\right] \quad (3-51)$$



Energies des états du qubit en fonction de Φ_e-Φ_0/2.

L'état de base est |↓> pour Δ_ε<<0, |↑> pour Δ_ε >>0. A résonance les états propres sont des superpositions à poids égaux de |↓ > et |↑>. La flèche indique la fréquence de résonance magnétique pour un désaccord Φ_e-Φ_0/2. Loin de l'anticroisement (|Δ_ε|>>Δ_T), les énergies, linéaires en Φ_e, sont celles de boucles de courant opposées traversées par un flux translaté d'un demi quantum:

$$E_{\uparrow\downarrow}(\left|\Delta_\varepsilon\right| >> \Delta_T) = \mp I_q\left[\Phi_e - \frac{\Phi_0}{2}\right] \quad (3-52)$$

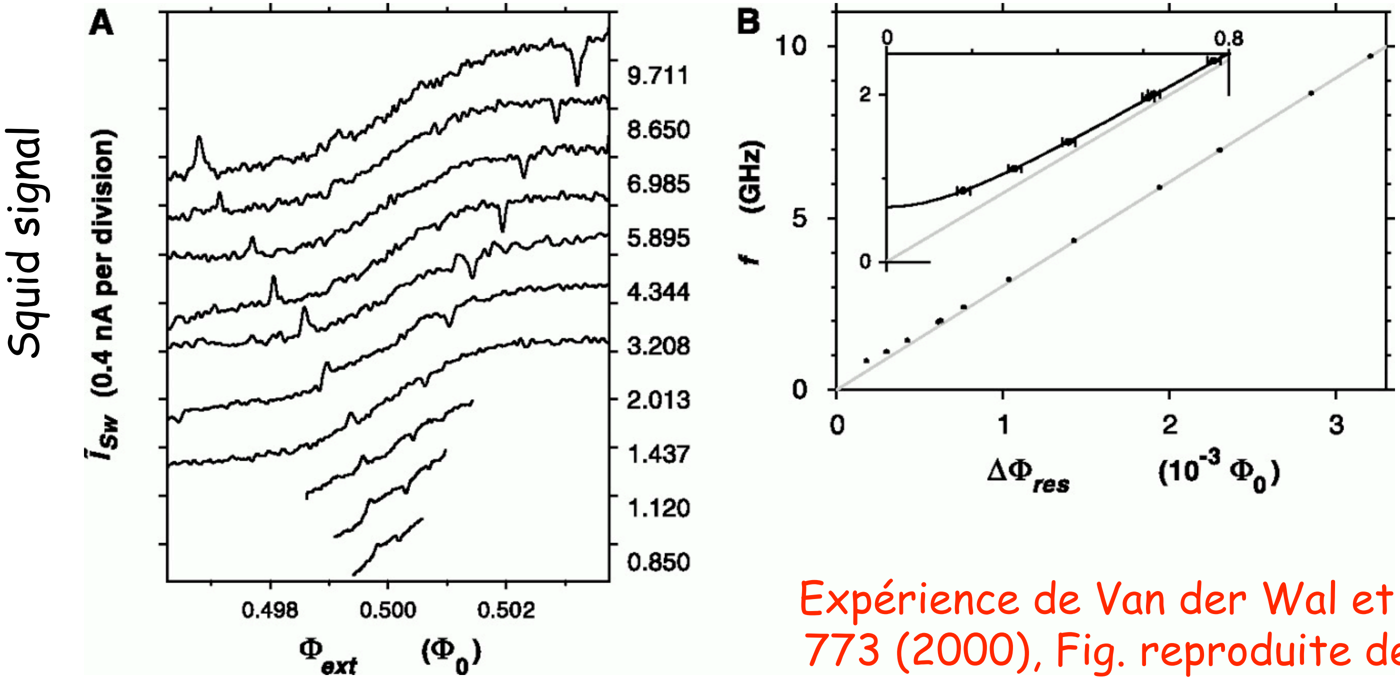


Qubit de flux dans son état fondamental: probabilités de le trouver dans l'état |↓> (en jaune) et |↑> (en vert) en fonction du désaccord Φ_e–Φ_0/2. Lorsque ce désaccord est nul, les deux probabilités sont égales et le qubit est dans l'état $|\Psi_+$>.

Figures d'après J.Clarke et K.Wilhelm, Nature 453, 1031 (2008)

Spectroscopie du qubit de flux symétrique

(qubit de flux à 3 JJ, avec hamiltonien de même forme que dans le cas à 1 JJ)



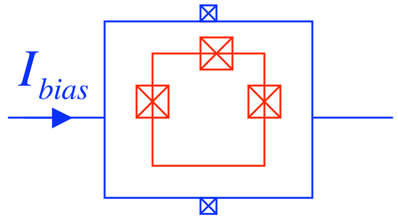


Schéma du dispositif: le qubit de flux est une boucle à 3 JJ insérée dans la boucle du SQUID.

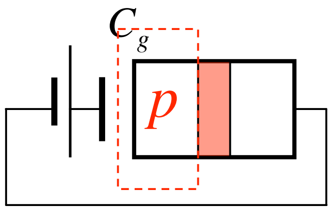
Expérience de Van der Wal et al, Science 290, 773 (2000), Fig. reproduite de Science online.

A: Chaque trace correspond à une fréquence fixe de la rf excitant le qubit. Le signal est mesuré par un SQUID réglé (courant I_{bias}) pour transiter si le qubit est dans l'état |↑>. Le flux de contrôle Φ_e est balayé autour de $\Phi_0/2$ (chaque point est une moyenne du signal du SQUID sur un grand nombre de réalisations de l'expérience). Le signal apparaît positif pour $\Phi_e < \Phi_0/2$ car la rf augmente alors la population de l'état |↑> (état excité du qubit). Il est négatif pour $\Phi_e > \Phi_0/2$ car la rf diminue alors la population de l'état |↑> (état fondamental du qubit).

B: Séparation des pics de chaque trace en fonction de l'écart à résonance $\Phi_e - \Phi_0/2$ (unité sur l'axe horizontal: 10^{-3} Φ_0). L'insert présente une échelle dilatée indiquant clairement la variation hyperbolique des niveaux d'énergie du qubit au voisinage de la résonance (voir equ. (3-50)), manifestation du caractère quantique du système.

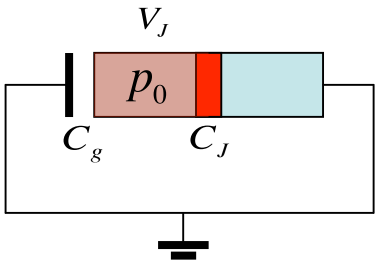
Qubit de charge (charge qubit)

$a)$

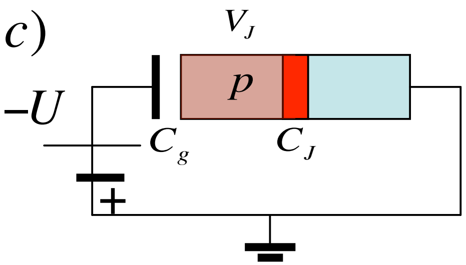


$E_J = I_0\Phi_0 / 2\pi \,;\, C_J$

$b)$



$c)$



Les qubits étudiés jusqu'ici correspondent à la condition $E_J/E_C \gg 1$. La phase (ou le flux) sont bien définis avec des variances faibles autour de une (ou deux valeurs), et la charge présente une grande fluctuation.

Il existe également des qubits avec $E_C/E_J \geq 1$. C'est alors la charge qui est bien définie et la phase diffuse. Un exemple est donné par le circuit de la Fig. a qui définit une 'boîte de Cooper' entre la JJ, de capacité C_J, et une capacité classique C_g. C_J et C_g sont faibles (de l'ordre de 1fF), donnant une grande valeur à E_C. La tension U imposée à la JJ à travers C_g est le paramètre de contrôle du système.

Considérons d'abord le cas U = 0 (fig b). C_J et C_G sont alors en parallèle entre la boîte au potentiel V_J et la masse. La charge $2ep_0$ de la boîte est celle de deux capacités dont les valeurs s'ajoutent:

$$2ep_0 = (C_g + C_J)V_J \quad (3-53)$$

Portons la borne externe de C_g au potentiel -U (figure c). Ce potentiel attire ou repousse des charges supplémentaires d'où:

$$2ep = 2ep_0 + C_gU = C_g(V_J + U) + C_JV_J \quad \rightarrow \quad V_J = \frac{1}{C_g + C_J}\left(2ep - C_gU\right) \quad (3-54)$$

Exprimons la relation de l'effet Josephson ac et l'équation de Hamilton donnant dδ/dt. On en déduit:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{2eV_J}{\hbar} = \frac{4e^2}{\hbar(C_g + C_J)}\left(p - \frac{C_gU}{2e}\right) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial H}{\partial p} \quad \rightarrow \quad H = \frac{2e^2}{(C_g + C_J)}\left(p - \frac{C_gU}{2e}\right)^2 + F(\delta) \quad (3-55)$$

Qubit de charge (suite)

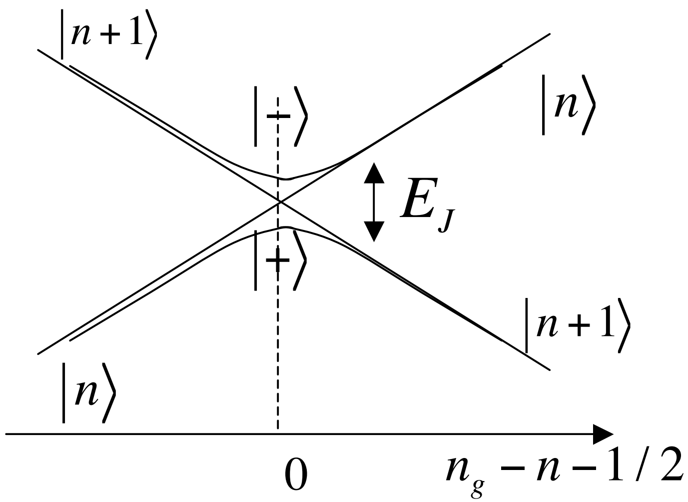
La fonction F(δ) est la contribution magnétique du Hamiltonien, qui exprime la loi de Josephson dc et est la même que celle des qubits de phase ou de flux. On a donc:

$$H = E_C\left(p - \frac{C_g U}{2e}\right)^2 - E_J \cos\delta \quad avec \quad E_C = \frac{2e^2}{(C_g + C_J)} \quad ; \quad E_J = \frac{I_0 \Phi_0}{2\pi} \quad (3-56)$$

En négligeant d'abord E_J, on voit que l'énergie du qubit est donnée par une loi parabolique, les états propres correspondant à un excès de 0,1, 2…. paires de Cooper dans la boîte. Il y a dégénérescence entre les deux états *$|p_\pm = n_g \pm 1/2\rangle$* quand $n_g = C_g U/2e = n+1/2$ (n entier). *La prise en compte du terme Josephson conduit alors aux deux états:*

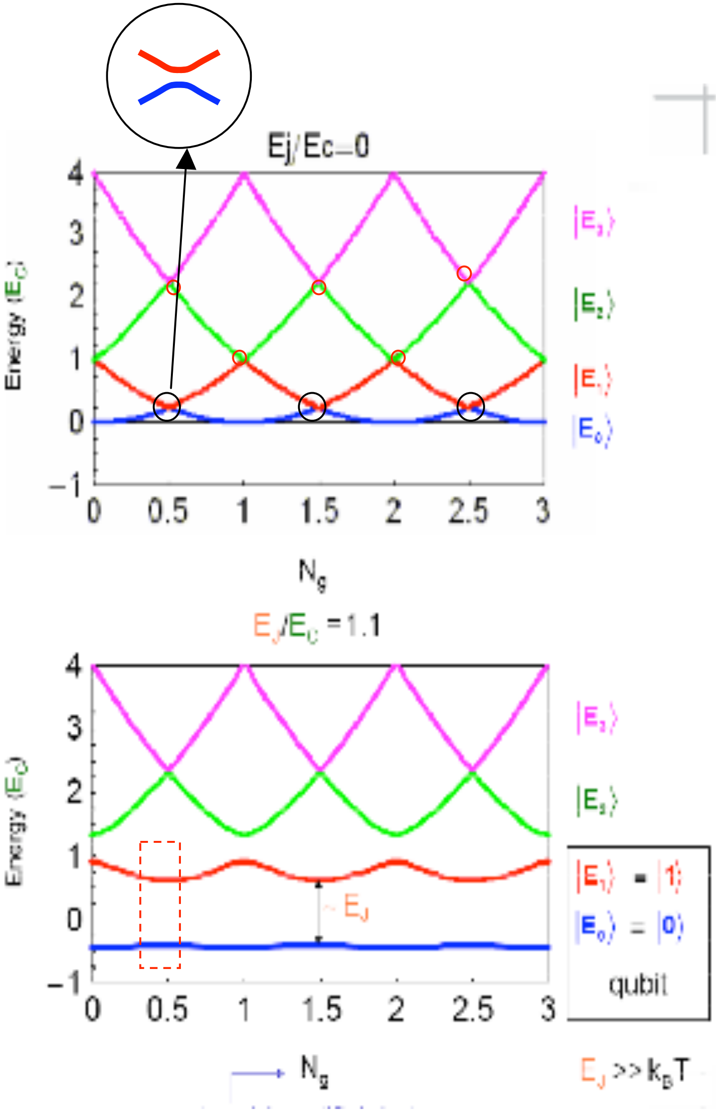
$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|n\rangle \pm |n+1\rangle\right] \quad ; \quad E_\pm = \frac{E_C}{4} \mp \frac{1}{2} E_J \quad (3-57)$$

[Le calcul de l'élément de matrice de cosδ entre états |p> et |p±1> qui lève la dégénérescence est simple car ces états sont en représentation δ de la forme exp(-ipδ/ℏ)].



Noter l'analogie avec le qubit de flux, la charge remplaçant le flux. Lorsqu'on balaye n_g en variant U autour de n_g -n - 1/2 = 0, les niveaux subissent une variation hyperbolique avec anticroisement pour n_g-n- 1/2 =0. En ce point, la distance des niveaux est E_J. Loin de l'anticroisement, le terme en E_J est négligeable et les états propres sont quasiment des états de charge n =n_g-1/2 et n+1= n_g+1/2. Le basculement du qubit de n à n+1 s'accompagne d'une variation du champ électrique qui peut être détectée par un transistor supraconducteur à électron unique (SET).

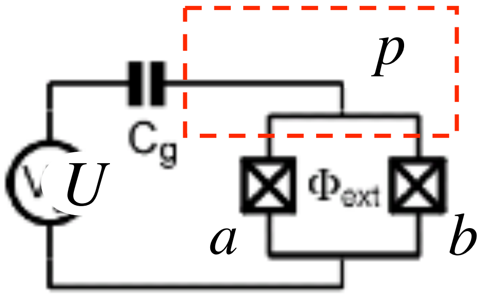
Niveaux d'énergie de la Boîte de Cooper en fonction de E_J/E_C



Pour E_J=0, les états à nombre p = 0,1, 2… de paires ont des énergies variant de façon parabolique en fonction de n_g (donc de U), les paraboles présentant des minima en n_g=0,1,2…Le couplage E_J lève la dégénérescence en tous les points où ces paraboles se coupent (couplage aux ordres supérieur à 1 de la théorie des perturbations pour $\Delta p>1$). Il se crée des bandes de niveaux (représentées par des couleurs différentes: bleu pour la bande fondamentale, rouge pour la première bande excitée…) séparées par des bandes interdites.

Lorsque $E_J \sim E_C$, les anticroisements $\Delta p = 1$ deviennent quasi plats, rendant les deux états d'énergie la plus basse (états 0 et 1 du qubit) peu dépendants de U, donc très peu sensibles aux fluctuations de charge au voisinage de l'anticroisement.

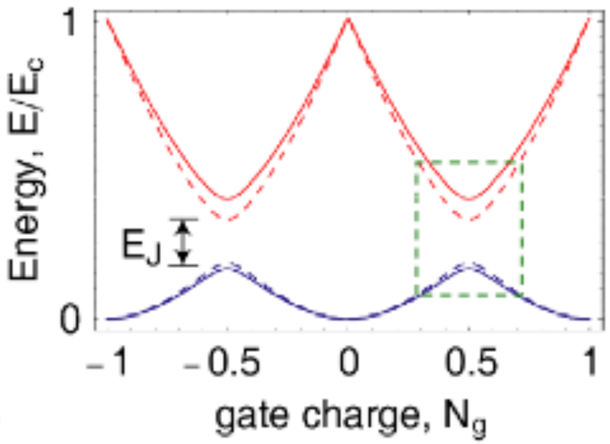
Accord de la boîte de Cooper par flux Φ_{ext}



On remplace la jonction unique par deux jonctions (a) et (b) dans une boucle de type SQUID. La boîte de Cooper (rectangle pointillé rouge) est maintenant limitée par la capacité C_g et les deux jonctions (capacité totale $2C_J$). Le flux Φ_{ext} à travers la boîte module le courant (voir leçon 2, & II-B) et le Hamiltonien du qubit devient:

$$H(\Phi_{ext}, p, \delta_0) = E_C(p - n_g)^2 - E_J(\Phi_{ext})\cos\delta_0 \quad avec$$

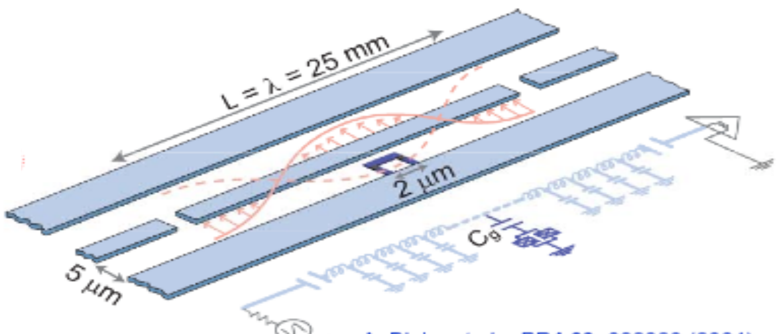
$$E_C = \frac{2e^2}{2C_J + C_g} \quad ; \quad E_J(\Phi_{ext}) = \frac{I_0\Phi_0}{\pi}\cos\left(\pi\frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}\right) \quad ; \quad \delta_0 = \frac{\delta_a + \delta_b}{2} \qquad (3-58)$$



En variant Φ_{ext} on contrôle E_J, donc l'amplitude de l'anticroisement et la séparation en énergie des états du qubit, tout en restant au «soft point» où la dérivée de l'énergie par rapport à n_g est nulle. Ce point de fonctionnement correspond à la sensibilité minimale du qubit aux fluctuations de tension et de charges. Une variante de la boîte de Cooper inclut dans la boucle une 3ème grande JJ qui permet de coupler la charge du qubit au courant dans la boucle, ce qui rend possible une détection élégante du qubit ('quantronium' de Saclay). Une autre variante dans laquelle les JJ sont shuntées par une forte capacité permet de rendre le qubit encore plus insensible aux fluctuations ('transmon' de Yale).

Circuit QED avec boîte de Cooper et résonateur coaxial

Les expériences de circuit QED de Yale et Zurich couplent une variante de boîte de Cooper à un résonateur rf constitué par une ligne coaxiale interrompue par des capacités, analogue à un Fabry-Perot optique ayant un mode propre en onde stationnaire. Le résonateur à capacité et inductance réparties se modélise comme un réseau de circuits LC en série (voir Fig). Le volume $V_r \sim Lb^2$ (L=25mm et b dimension transversale ~5μm de la ligne) est << λ^3, d'où un très grand champ électrique par photon. Le qubit, inséré dans le résonateur, est couplé par sa charge au champ électrique d'un ventre de l'onde stationnaire. On ne détecte pas le qubit directement, mais le champ transmis par le résonateur. Ordre de grandeur de la fréquence de Rabi maximale réalisable:



A. Blais, *et al.* , *PRA* **69**, 062320 (2004)
A. Wallraff *et al.*, *Nature (London)* **431**, 162 (2004)

$$\Omega = \frac{D_{qb}.E_{vac}}{\hbar} \quad avec \quad D_{qb} = 2e \times l_{boîte} \approx 8.10^4 \, ea_0 \quad (l_{boîte} \approx 2\mu m \approx 4.10^4 \; rayon\; de\; Bohr)$$

$$E_{vac} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V_r}} \; avec \quad \omega = 2\pi \times 5.10^9 \, Hz \quad et \quad V_r = Lb^2 = 7.10^{-4} \, mm^3 << \lambda^3$$

$$\rightarrow \quad E_{vac} \approx 0.2\, V/m \; et \; \Omega \approx 10^9 \, Hz \rightarrow \frac{\Omega}{\omega} \approx 2.10^{-2} \qquad (3-59)$$

(à comparer au couplage g/ω ~10^{-3} du dispositif de circuit-QED avec qubit de phase couplé à un résonateur LC décrit plus haut)

Couplage Ω/ω ~ 4 ordres de grandeur plus grand qu'en Cavité QED avec atomes de Rydberg: le dipôle électrique est 10 fois plus grand et le champ par photons mille fois plus grand

Conclusion de la troisième leçon

Nous avons décrit dans cette leçon divers types de qubits supraconducteurs et montré comment on pouvait en principe manipuler leur état quantique, les détecter, les coupler entre eux et les faire interagir avec des résonateurs radiofréquence. Nous avons également évalué les ordres de grandeur des différents paramètres importants pour comprendre la dynamique des qubits. Nous avons négligé jusqu'ici la dissipation, inévitable dès que l'on couple ces systèmes à leur environnement. Nous analyserons rapidement la relaxation de ces systèmes au début de la leçon 4.

Nous serons alors prêts à aborder la description d'expériences d'information quantique réalisées dans les deux ou trois dernières années avec des qubits supraconducteurs, ce qui fera l'objet des leçons 4 et 5. Nous ne serons pas exhaustifs et nous nous contenterons de décrire les expériences du groupe de Santa Barbara (Martinis et al) réalisées avec des qubits de phase. Nous verrons que ces expériences ont permis de contrôler l'état d'un qubit (par impulsion radiofréquence), d'intriquer des qubits entre eux et avec des oscillateurs, de réaliser des expériences de test des inégalité de Bell et de générer et reconstruire des états arbitraires d'oscillateurs quantiques. Nous comparerons ces expériences avec celles réalisées sur des ions piégés et dans des expériences d'électrodynamique quantique en cavité.