

*Physique quantique - 7 Février 2011*

# **Cours 2010-2011: Cinquième Leçon**

## **Synthèse et reconstruction d'états en Electrodynamique des Circuits**

Nous décrivons dans cette leçon des expériences de manipulation et de synthèse d'états non classiques d'oscillateurs harmoniques réalisées en couplant des résonateurs radiofréquence à des qubits supraconducteurs, dans des dispositifs d'électrodynamique des circuits.

Nous commençons par décrire la préparation déterministe d'états de Fock à nombre de photons défini (§V-A), puis nous généralisons à la synthèse d'états arbitraire d'un résonateur (§V-B).

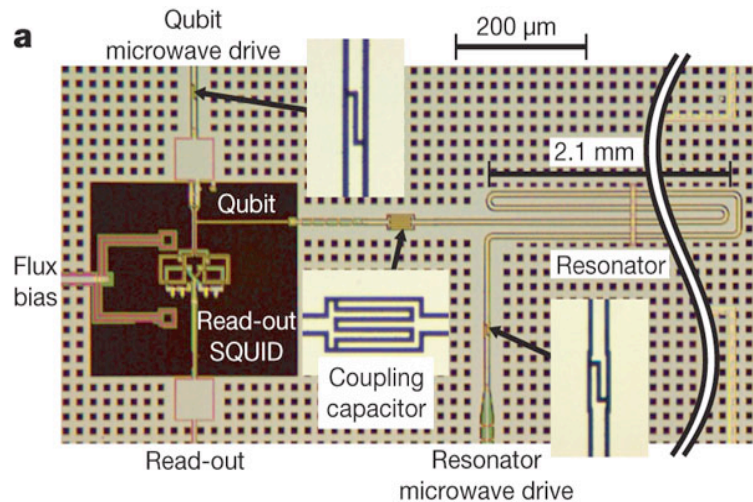
Nous décrivons enfin une expérience récente ayant permis de préparer des états intriqués du champ dans deux résonateurs spatialement séparés (§V-C). Nous comparons ces expériences à celles réalisées en électrodynamique quantique en cavité et en physique des ions piégées, que nous avons rappelées à la première leçon de ce cours.

V-A

# Préparation déterministe d'états de Fock en électrodynamique des circuits

*M.Hofheinz et al, Nature 454, 310 (2008)*

# Génération d'états de Fock dans un résonateur supraconducteur



Microphotographie montrant le qubit de phase (à gauche) et le résonateur coplanaire à 6.56 GHz (à droite) couplés par une capacité. Le qubit et le résonateur sont chacun couplés à une source rf. Le qubit de phase est accordé autour de la fréquence du résonateur en variant le flux (flux bias). Il est mesuré par un SQUID.

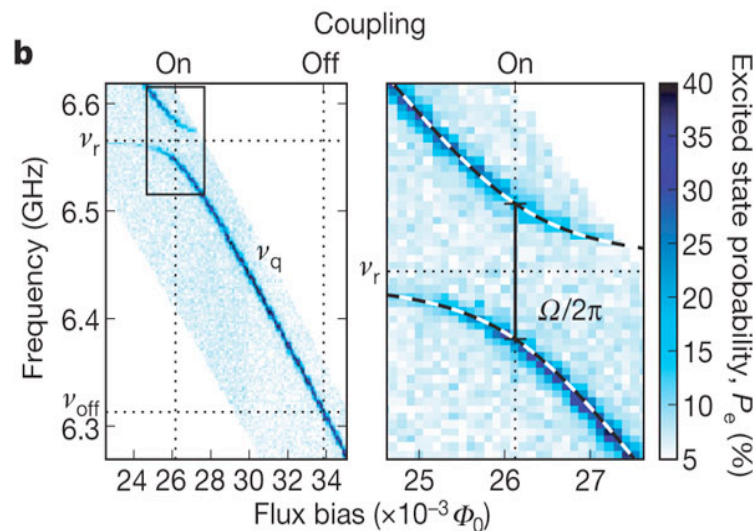
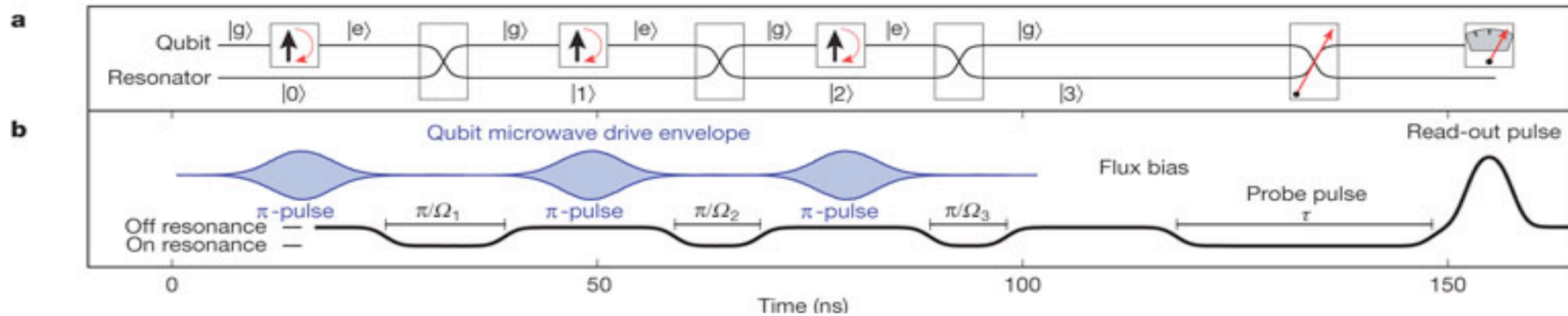


Figure montrant avec un code couleur (code sur l'échelle de droite) la probabilité de mesurer le qubit dans son état excité en fonction de la fréquence d'excitation (en ordonnée) et du désaccord du qubit par rapport au résonateur (en abscisse). Le spectre micro-onde obtenu montre l'anticroisement à résonance, la distance minimale des niveaux mesurant la fréquence de Rabi du vide  $\Omega/2\pi = 36$  MHz.

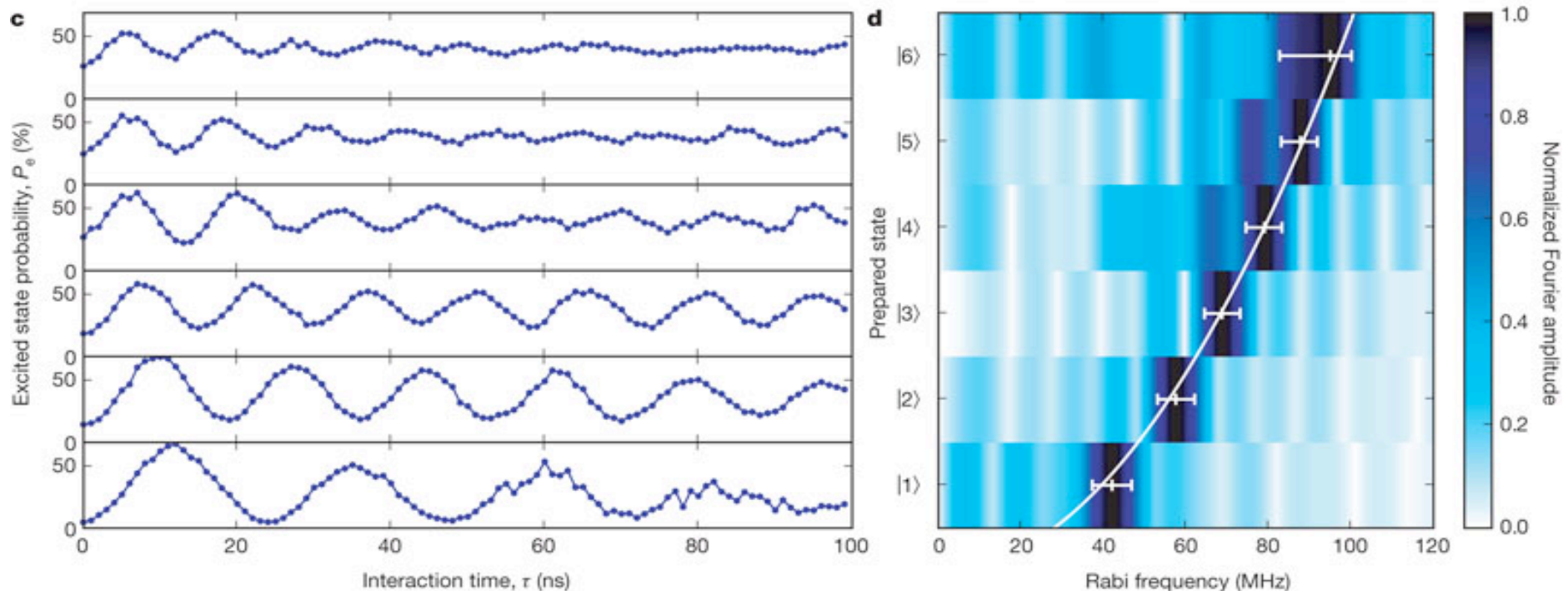
# Préparation et mesure des états de Fock



**Séquence d'opérations introduisant les photons un à un dans le résonateur:** On part du système qubit (Q)-résonateur (R) dans l'état  $|g,0\rangle$ . Le qubit Q étant désaccordé par rapport à R, on lui applique un pulse rf  $\pi$  le portant dans e, puis on réalise l'accord Q-R pendant un temps  $\pi/\Omega_1 = \pi/\Omega$  échangeant les énergies de Q et R suivant la transformation  $|e,0\rangle \rightarrow |g,1\rangle$ . Après avoir rétabli le désaccord Q-R, un second pulse  $\pi$  de rf remet Q dans e, puis Q et R sont remis à résonance pendant le temps  $\pi/\Omega_2 = \pi/\Omega\sqrt{2}$ , réalisant la transformation  $|e,1\rangle \rightarrow |g,2\rangle \dots$  et ainsi de suite pour introduire 3, 4 ...n photons dans R. Une fois l'état de Fock  $|n\rangle$  préparé, R est remis en résonance avec Q pendant un temps variable  $\tau$  (probe pulse) et enfin le qubit est détecté dans l'état e. On recommence un grand nombre de fois pour chaque valeur de  $\tau$  pour reconstruire  $P_e(\tau)$ . On vérifie que pour un n donné,  $P_e(\tau)$  est une sinusoïde amortie de fréquence  $(\Omega\sqrt{n})/2\pi$ .

# Oscillation de Rabi dans un état de Fock

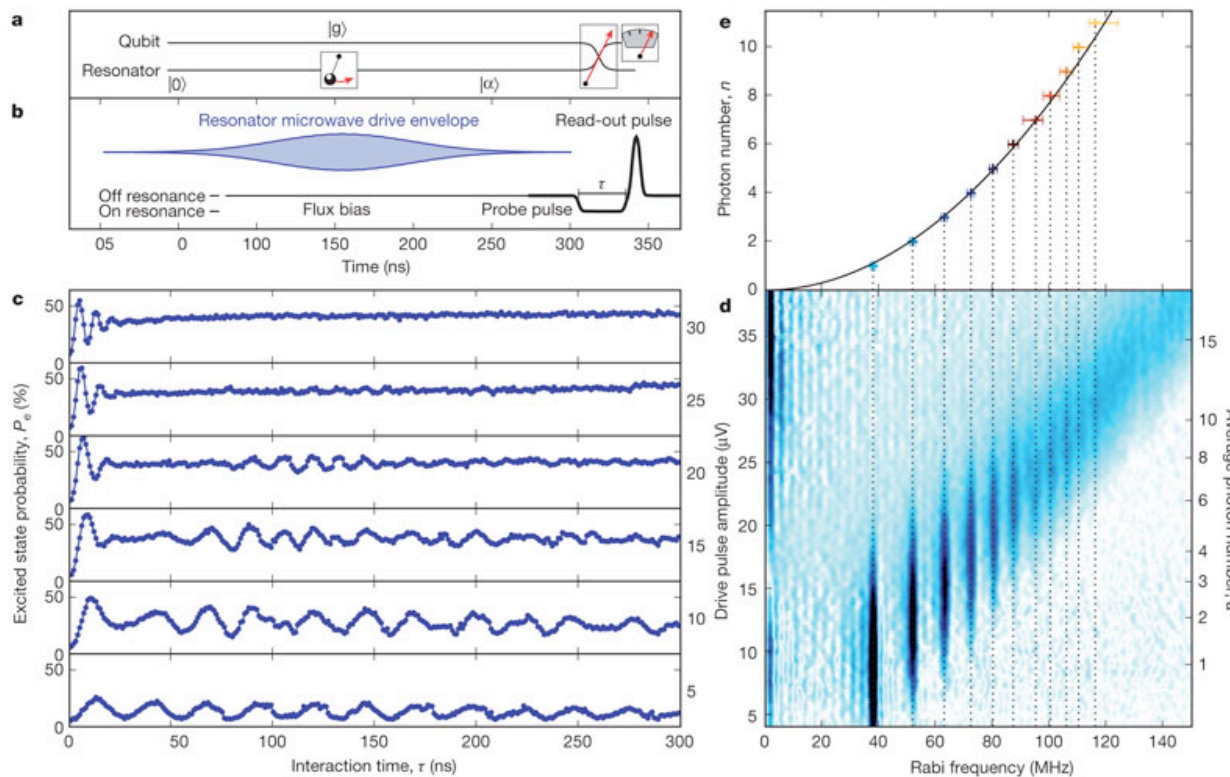
La figure de gauche montre l'oscillation de Rabi dans des champs contenant de 1 à 6 photons. L'augmentation en  $\sqrt{n}$  de la fréquence est clairement observable. La figure de droite, montre avec un codage couleur le spectre de Fourier de l'oscillation pour les 6 valeurs de  $n$ . La composante dominante du spectre tombe bien sur une courbe parabolique, démontrant la loi en  $\sqrt{n}$  de la fréquence de Rabi. Cette expérience montre que les méthodes de circuit QED permettent de préparer un état de Fock arbitraire. La limite en  $n$  est fixée par la décohérence: il faut pouvoir appliquer la séquence de préparation plus vite que l'état ne décroît (voir plus loin).





# Oscillation de Rabi dans un état cohérent: « effondrement et renaissance »

Un champ cohérent d'amplitude  $\alpha$  est injecté dans R pendant que Q est hors résonance dans l'état  $g$ . Q et R sont ensuite mis en résonance pendant un temps  $\tau$  variable, puis l'état  $e$  est mesuré (schéma de principe, figs a et b). La statistique est accumulée comme dans le cas des états de Fock. La fig.c montre les oscillations de Rabi obtenues pour des amplitudes croissantes (de bas en haut) du champ cohérent. On observe le battement entre les fréquences en  $\sqrt{n}$  du signal, chacune correspondant à un état de Fock du développement de chaque état cohérent. L'effondrement et la renaissance des oscillations est observable.



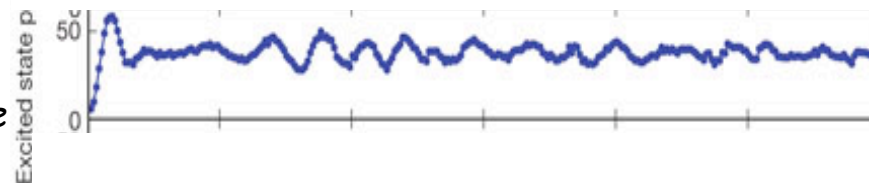
A droite, la fig.d montre l'amplitude (code couleur) des composantes de Fourier du signal de Rabi en fonction de leur fréquence (en abscisse) et de l'amplitude  $\alpha$  du champ (en ordonnée). La fig.e montre les fréquences des différentes composantes de Fourier en fonction de leur rang, c-à-d du nombre de photons. Les points se placent bien sur une courbe parabolique.

# Comparaison avec des expériences d'ions piégés et d'électrodynamique quantique en cavité atomique

La préparation déterministe d'états de Fock d'un mode de vibration d'un oscillateur mécanique a été réalisée avec des ions piégés, suivant la même méthode que celle réalisée en électrodynamique des circuits (voir leçon 1). Les oscillations de Rabi dans un champ cohérent (dont le spectre discret de la transformée de Fourier met en évidence le caractère granulaire de l'énergie de l'oscillateur) a été observée en 1996 sur des ions piégés et en électrodynamique en cavité avec des atomes de Rydberg (leçon 1). Les figures-ci dessous comparent les résultats de ces deux expériences avec celle d'électrodynamique des circuits.

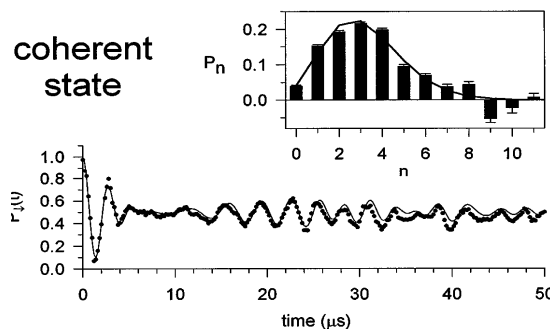
Electrodynamique des circuits:

M.Hofheinz et al, Nature 454, 310 (2008)

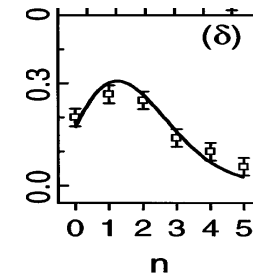
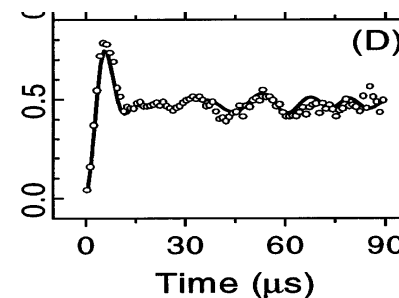


Une même « signature » d'un état cohérent dans 3 expériences

Ions piégés:  
Meekhof et al, PRL, 76, 1796 (1996).



CQED:  
Brune et al, PRL, 76, 1800 (1996)



V-B.

Synthèse d'état arbitraire d'un résonateur  
radiofréquence  
en électrodynamique des circuits



# Principe de la synthèse d'état arbitraire d'un résonateur en électrodynamique des circuits

La méthode déterministe de préparation des états de Fock d'un résonateur R utilise un qubit Q couplé à R et combine deux types d'opérations: des rotations de Q impliquant un échange d'énergie avec une source rf classique et des oscillations de Rabi échangeant une excitation entre Q et R. En combinant ces opérations avec des déphasages des états de Q (équivalent à des rotations de Q autour de Oz), il est en fait possible de synthétiser de façon déterministe non seulement des états de Fock, mais n'importe quel état pur arbitraire  $|\psi\rangle$  donné par sa décomposition sur la base des états de Fock:

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \quad (5-1)$$

où les  $C_n$  sont des amplitudes complexes quelconques. En partant de l'état  $|g,0\rangle$ , une suite programmée de rotations de Q et d'oscillations de Rabi Q-R conduit à l'état final  $|g\rangle|\psi\rangle$ , produit tensoriel (non-intriqué) de R dans l'état cherché et de Q dans l'état  $|g\rangle$ . Pour programmer de façon simple la suite des opérations, il est commode d'envisager le processus inverse: comment passer de l'état  $|g\rangle|\psi\rangle$  à  $|g\rangle|0\rangle$  par une suite de telles opérations? Une fois ce problème résolu, il suffit d'appliquer la suite d'opérations inverses pour passer de  $|g\rangle|0\rangle$  à  $|g\rangle|\psi\rangle$ . Cette procédure systématique a été proposée par Law et Eberly dans un article de 1996 (PRL **76**, 1055) et illustrée en 2003 sur un ion piégé (Ben Kish et al, PRL **90**, 037902), système obéissant à une équation d'évolution analogue à celle de l'Electrodynamique en Cavité. La même procédure a été appliquée récemment en électrodynamique des circuits. Nous analysons le principe de la méthode avant de décrire cette dernière expérience.

# Opérations élémentaires pour la synthèse des états quantiques d'un résonateur

La méthode de Law et Eberly appliquée à l'électrodynamique des circuits combine:

- Des rotations d'angle  $\phi$  ajustable de Q autour de l'axe Ox de la sphère de Bloch, réalisées à l'aide d'impulsions rf (Q étant désaccordé de R):

$$R_x(\phi) = e^{-i\phi\sigma_x/2} = \cos\frac{\phi}{2}I - i\sin\frac{\phi}{2}\sigma_x \quad (5-2)$$

- Des rotations de Q autour de Oz d'angle  $\chi$ , réalisées en induisant un déphasage entre les états e et g de Q. On laisse évoluer librement le qubit, désaccordé de  $\Delta$  par rapport au résonateur, pendant un temps t tel que  $\Delta t = \chi$ . On réalise ainsi:

$$R_z(\chi) = e^{-i\chi\sigma_z/2} \quad (5-3)$$

- Des opérations d'échange d'énergie (swaps) par oscillation de Rabi entre Q et R, mis à résonance. Rappelons que l'évolution pendant le temps  $\tau$  du système Q+R dans la base des états combinés  $|g, n+1\rangle$ ,  $|e, n\rangle$  est décrite par l'opérateur:

$$U_S = e^{-i\frac{\Omega\sqrt{n+1}\tau}{2}\sigma_x} = \cos\frac{\Omega\sqrt{n+1}\tau}{2}I - i\sin\frac{\Omega\sqrt{n+1}\tau}{2}\sigma_x \quad (5-4)$$

soit en explicitant (voir leçon 1):

$$\begin{aligned} |g, n+1\rangle &\xrightarrow{U_S} \cos\frac{\Omega\sqrt{n+1}\tau}{2}|g, n+1\rangle - i\sin\frac{\Omega\sqrt{n+1}\tau}{2}|e, n\rangle \\ |e, n\rangle &\xrightarrow{U_S} -i\sin\frac{\Omega\sqrt{n+1}\tau}{2}|g, n+1\rangle + \cos\frac{\Omega\sqrt{n+1}\tau}{2}|e, n\rangle \end{aligned} \quad (5-5)$$

# Synthèse d'état en électrodynamique des circuits: un exemple

Illustrons la méthode sur un exemple concret. Proposons-nous de préparer l'état  $|\psi\rangle = |1\rangle + i|3\rangle$  et commençons par déterminer la suite d'opérations conduisant de  $|g\rangle|\psi\rangle$  à  $|g\rangle|0\rangle$ . Le principe est de supprimer pas à pas la composante de l'état contenant le plus grand nombre de photons, de façon à revenir progressivement à l'état  $|0\rangle$ . On commence donc par appliquer une oscillation de Rabi Q-R de durée  $\tau_3 = \pi/\Omega\sqrt{3}$  ajustée pour effectuer la transformation:

$$|g, 3\rangle \xrightarrow{\tau_3 = \pi/\Omega\sqrt{3}} -i|e, 2\rangle \quad (5-6)$$

Partant de l'état  $|g, \psi\rangle$  cette transformation donne (voir equ. 5-5):

(5-7)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|g, 1\rangle + i|g, 3\rangle] \xrightarrow{\tau_3} |\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\Omega\tau_3}{2}\right) |g, 1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\Omega\tau_3}{2}\right) |e, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |e, 2\rangle$$

Par construction, la composante à 3 photons a disparu. On applique ensuite la rotation  $\exp[-i\pi\sigma_x/2] = -i\sigma_x$  sur Q qui échange  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  et conduit à l'état combiné de Q et R:

$$|\Psi_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |g, 0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ |g, 2\rangle + \cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |e, 1\rangle \right] \quad (5-8)$$

L'étape suivante doit supprimer la composante à 2 photons en transformant la superposition de  $|g, 2\rangle$  et  $|e, 1\rangle$  dans l'équ.(5-8) en  $|e, 1\rangle$  par une oscillation de Rabi. Pour cela, il faut d'abord ajuster les phases pour introduire un déphasage de  $\pi/2$  entre les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ . Ceci est réalisé par une rotation autour de Oz de  $3\pi/2$ ,  $R_z = \exp[-3i\pi\sigma_z/4]$  qui conduit à l'état:

$$|\Psi_3\rangle = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |g, 0\rangle + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[ |g, 2\rangle + i \cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |e, 1\rangle \right] \quad (5-9)$$

En appliquant ensuite une oscillation de Rabi de durée convenable on transforme le terme entre [ ] dans l'équ.(5-9) en l'état  $|e, 1\rangle$  (voir page suivante).

# Synthèse d'état: un exemple simple (suite)

L'oscillation de Rabi Q-R pour supprimer l'état à 2 photons dans (5-9) a un angle différent de celle qui a supprimé l'état  $n=3$ . Une oscillation d'angle  $\pi$ , pendant un temps  $\pi/\Omega\sqrt{2}$ , transforme la composante  $|g,2\rangle$  de (5-9) en  $|e,1\rangle$ , mais introduit une nouvelle composante  $|g,2\rangle$  due à l'évolution de la partie  $|e,1\rangle$  de (5-9). Il faut appliquer  $U_S$  pendant un temps différent de  $\pi/\Omega\sqrt{2}$ . Pour calculer ce temps, on exprime le terme entre crochets dans (5-9) sous la forme:

$$|g,2\rangle + i \cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |e,1\rangle = \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)} \left[ \cos\frac{\Theta}{2} |g,2\rangle - i \sin\frac{\Theta}{2} |e,1\rangle \right] \quad (5-10)$$

en définissant l'angle  $\Theta$  par les relations:

$$\cos\frac{\Theta}{2} = 1 / \sqrt{1 + \cos^2\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \quad ; \quad \sin\frac{\Theta}{2} = -\cos\frac{\pi}{2\sqrt{3}} / \sqrt{1 + \cos^2\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \quad (5-11)$$

On en déduit d'après (5-5) que l'évolution de  $|\Psi_3\rangle$  pendant un temps  $\tau$  conduit à:

$$|\Psi_4\rangle = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |g,0\rangle + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \left[ \cos\left(\frac{\Theta + \Omega\sqrt{2}\tau}{2}\right) |g,2\rangle - i \sin\left(\frac{\Theta + \Omega\sqrt{2}\tau}{2}\right) |e,1\rangle \right] \quad (5-12)$$

$$\text{Soit pour } \tau = \frac{\pi - \Theta}{\Omega\sqrt{2}} : \quad |\Psi_4\rangle = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |g,0\rangle - i \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} |e,1\rangle \quad (5-13)$$

La composante  $n=2$  a bien disparu. En appliquant un pulse rf d'angle  $\phi=\pi$  à Q, on échange à nouveau  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ :

$$|\Psi_5\rangle = -i \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) |e,0\rangle + \sqrt{1 + \cos^2\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} |g,1\rangle \right] \quad (5-14)$$

Une rotation  $R_Z$  créant un déphasage  $\pi/2$  entre les composantes de  $|\Psi_5\rangle$  conduit à  $|\Psi_6\rangle$ , superposition de  $|e,0\rangle$  et  $|g,1\rangle$  qu'une oscillation de Rabi d'angle ajusté change en  $|\Psi_7\rangle = |e,0\rangle$ . Un pulse rf final le transforme en  $|\Psi_8\rangle = |g,0\rangle$ . Huit opérations sont ainsi requises pour passer de  $|g,\Psi\rangle$  à  $|g,0\rangle$ . En appliquant en ordre inversé les 8 opérations inverses, on synthétise donc à partir de  $|g,0\rangle$  l'état cherché  $|g\rangle [ |1\rangle + i |3\rangle ]$ .

# Synthèse d'état arbitraire: autre exemple

Dans l'exemple précédent, toutes les opérations de rotation de Q correspondent à un angle  $\phi$  égal à  $\pi$ . Il existe des cas où cet angle doit aussi être ajusté de façon plus subtile. Proposons nous par exemple de générer l'état:

$$|\psi\rangle = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle \quad (5-15)$$

On commence comme précédemment par une oscillation de Rabi d'angle  $\pi$  dans  $\{|g,2\rangle, |e,1\rangle\}$ :

$$|g,\psi\rangle = |g,0\rangle + |g,1\rangle + |g,2\rangle \longrightarrow |\Psi_1\rangle = |g,0\rangle + \left[ \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}} |g,1\rangle - i \sin \frac{\pi}{2\sqrt{2}} |e,0\rangle \right] - i |e,1\rangle \quad (5-16)$$

La composante sur  $n=2$  a disparu. Pour supprimer ensuite la composante sur l'état  $n=1$  il faut s'arranger pour que  $|\Psi\rangle$  ne contienne plus qu'un terme  $|g,1\rangle$ , sans contribution de  $|e,1\rangle$  car ce terme ferait, sous l'effet de l'oscillation de Rabi réapparaître un terme à deux photons en  $|g,2\rangle$ . Le terme à un photon dans (5-16) est associé à l'état de Q:

$$|\psi_{Q1}\rangle = \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}} |g\rangle - i |e\rangle = \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} |g\rangle - i \sin \frac{\theta}{2} |e\rangle \right];$$

avec  $\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}} / \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$  ;  $\sin \frac{\theta}{2} = 1 / \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$  (5-17)

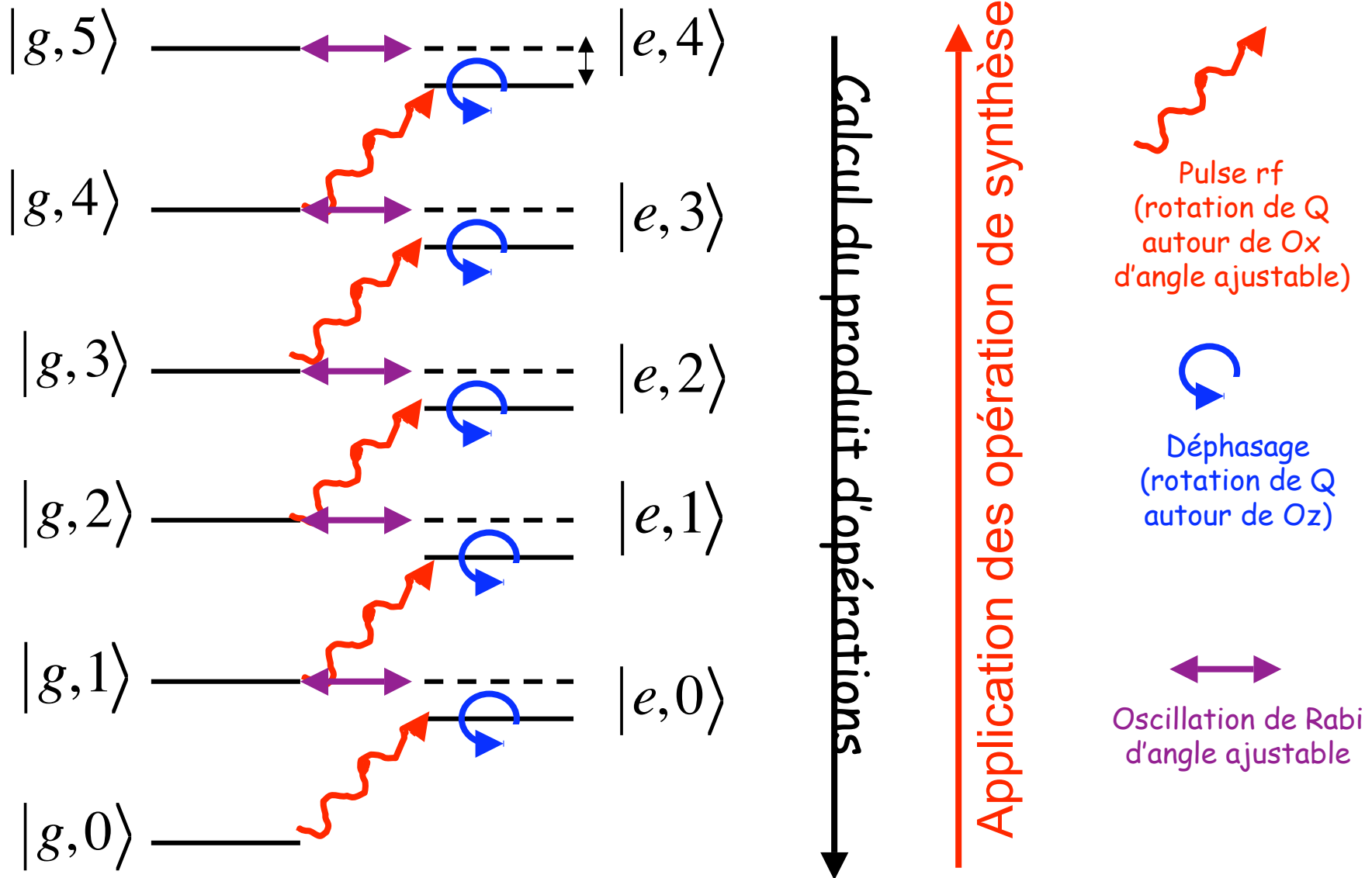
La rotation de Q, qui doit amener cet état sur  $|g\rangle$ , n'est pas, contrairement à ce qui se passait dans le 1er exemple, une rotation d'angle  $\phi=\pi$ , mais la rotation d'angle  $\phi=-\theta$  autour de  $O_x$ :

$$R_x(-\theta) |\psi_{Q1}\rangle = \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} I + i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_x \right] \left[ \cos \frac{\theta}{2} |g\rangle - i \sin \frac{\theta}{2} |e\rangle \right] = \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}} |g\rangle \quad (5-18)$$

L'état  $|\Psi_1\rangle$  devient alors une superposition de  $|g,0\rangle$ ,  $|e,0\rangle$  et  $|g,1\rangle$  qu'une rotation de phase combinée à une oscillation de Rabi d'angle ajusté transforme en superposition de  $|g,0\rangle$  et  $|e,0\rangle$ . Une dernière rotation de Q ramène enfin le système Q-R sur  $|g,0\rangle$ .



# Schéma de principe de la synthèse d'états



# Synthèse arbitraire d'états en électrodynamique des circuits: l'expérience

*M Hofheinz et al. Nature 459, 546-549 (2009)*

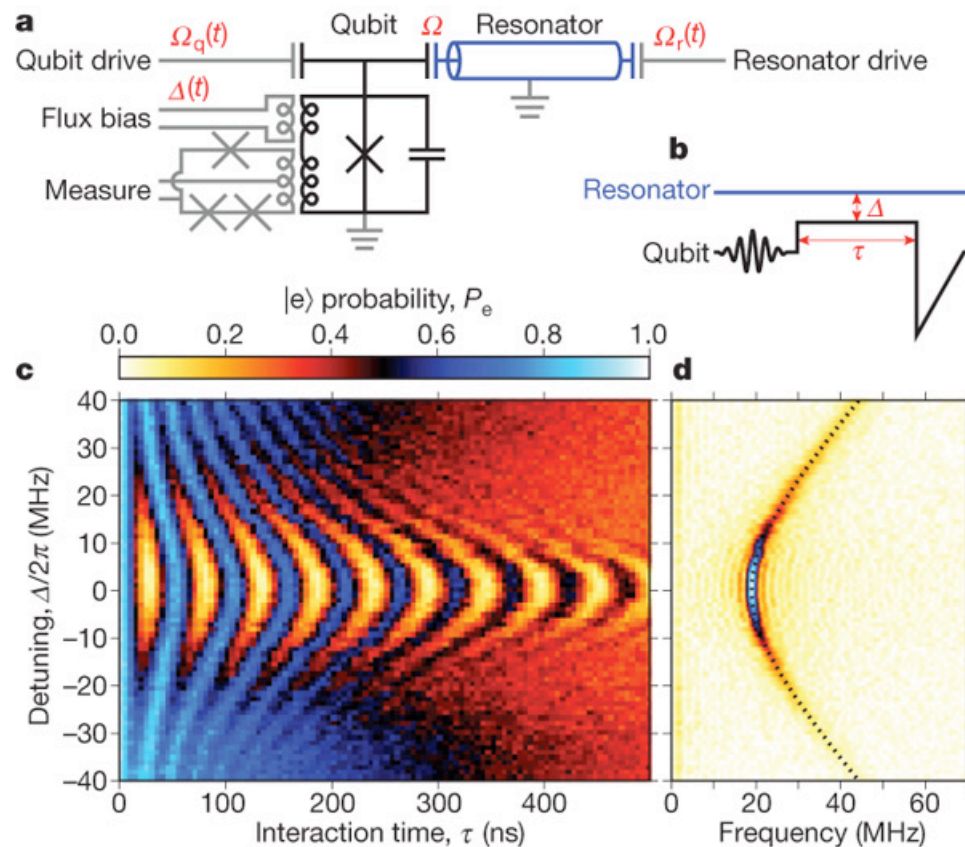


Fig a: Schéma du circuit (description des éléments dans leçons 3 et 4).

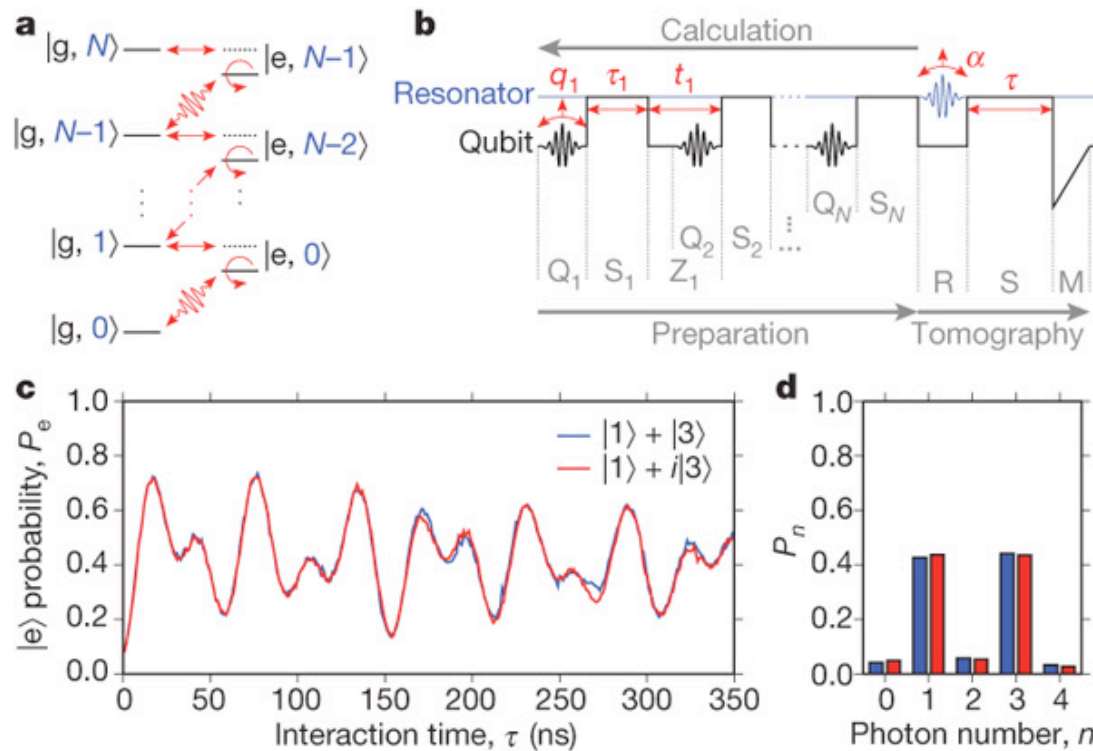
b: Séquence d'opérations pour réaliser l'oscillation de Rabi  $|e,0\rangle \rightarrow |g,1\rangle$ . Le qubit dans  $|g\rangle$ , largement désaccordé de R initialement vide ( $|0\rangle$ ), subit un pulse rf d'angle  $\pi$  (ligne ondulée) qui le porte dans  $|e\rangle$ . On rapproche ensuite Q de résonance (désaccord  $\Delta$ ) et on laisse évoluer pendant le temps  $\tau$ . On mesure enfin Q et, en moyennant un grand nombre de réalisations, on reconstruit  $P_e$ .

c:  $P_e$  codée en couleurs en fonction de  $\Delta$  (ordonnée) et  $\tau$  (abscisse). On observe une oscillation de Rabi de

fréquence minimale  $\Omega/2\pi = 19$  MHz pour  $\Delta=0$ . On voit que la fréquence de l'oscillation augmente et que son amplitude diminue lorsque  $|\Delta|$  s'écarte de 0.

d: Transformée de Fourier du signal de c montrant la variation hyperbolique en  $[\Delta^2 + \Omega^2]^{1/2}$  de la fréquence de Rabi en fonction de  $\Delta$ .

# Synthèse arbitraire d'états (suite)

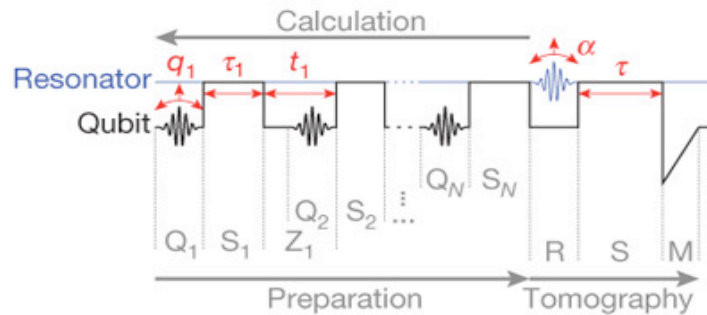


a: schéma de la séquence d'opérations sur le diagramme des niveaux d'énergie du système Q-R (voir 2 p. plus haut).

b: séquence des opérations de préparation et de mesure de l'état de R. Les pulses rf notés  $q_i$  (lignes ondulées) sont appliqués quand Q est loin de résonance avec R. Les oscillations de Rabi qui «swappent» un quantum entre Q et R sont notées  $S_i$ . Elles se font en mettant Q et R à résonance ( $\Delta=0$ ). Les déphasages (rotations autour de  $Oz$ ) marqués  $Z_i$  s'obtiennent en laissant Q évoluer pendant un temps ajusté hors résonance. Les 8 opérations indiquées ici sont celles qui préparent  $|1\rangle + i|3\rangle$ . (voir plus haut). Une fois la préparation

réalisée, on effectue ensuite une séquence de tomographie pour la reconstruction de l'état. On injecte dans R, éloigné de résonance avec Q un champ cohérent d'amplitude  $-\alpha$ , puis on met Q et R à résonance et on laisse l'oscillation de Rabi se produire pendant un temps  $\tau$ . Finalement, on mesure l'état de Q et on reconstruit, après un grand nombre de réalisations, la probabilité  $P_e(\tau)$ . On rappelle plus loin comment cette séquence d'opérations permet de reconstruire complètement l'état de R. c: Lorsqu'on n'injecte pas de champ dans R pendant la phase tomographique ( $\alpha=0$ ), on reconstruit simplement l'oscillation de Rabi  $P_e(\tau)$  dans le champ synthétisé. La figure montre le signal de Rabi en fonction du temps après préparation des états  $|1\rangle + |3\rangle$  (trait bleu) et  $|1\rangle + i|3\rangle$  (trait rouge). Le battement entre les fréquences  $\Omega$  et  $\Omega\sqrt{3}$  est clairement observable. d: La transformée de Fourier du signal de Rabi donne la distribution de probabilité du nombre de photons dans ces deux états (en bleu et en rouge). Cette distribution ne fournit aucune information sur la phase des amplitudes de probabilité et ne permet pas de distinguer les deux états.

# Rappels sur la reconstruction d'états par détermination directe de la fonction $W(\alpha)$



Nous avons rappelé à la leçon 1 comment reconstruire complètement la fonction de Wigner d'un oscillateur au point  $\alpha$  de son espace des phases à partir de l'observation de l'oscillation de Rabi dans l'état de l'oscillateur déplacé de  $-\alpha$ . Cette reconstruction est basée sur la formule reliant  $W(\alpha)$  à la valeur moyenne

de la parité  $\mathcal{P}$  du nombre de quanta dans l'état de l'oscillateur déplacé:

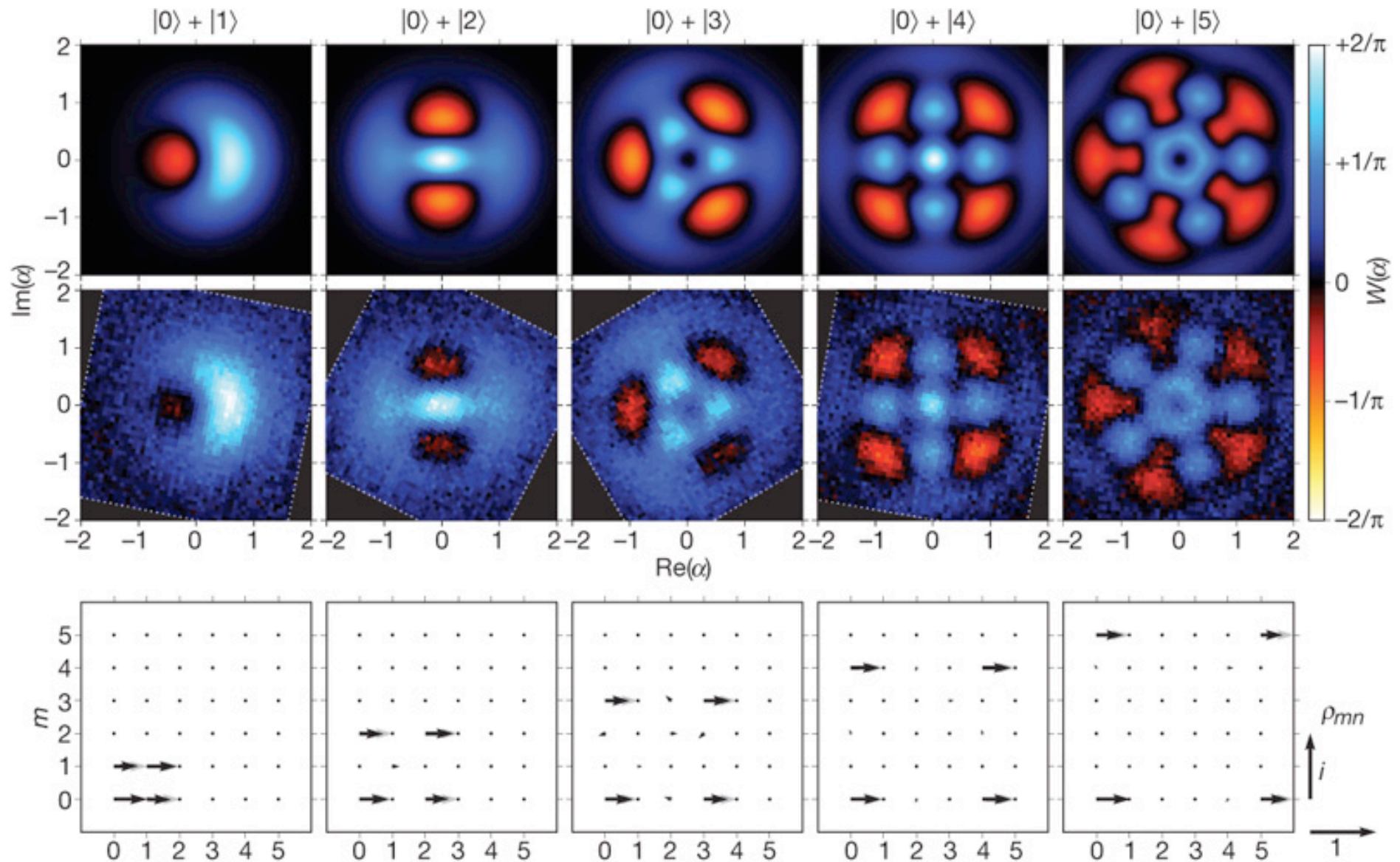
$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} [D(-\alpha) \rho D(\alpha) \mathcal{P}] = \frac{2}{\pi} \sum_n (-1)^n \Pi^{(\alpha)}(n) \quad (5-19)$$

Cette méthode est appliquée dans l'expérience d'électrodynamique des circuits. On commence par synthétiser l'état par la méthode décrite plus haut, puis on injecte dans R un champ d'amplitude  $-\alpha$  pour déplacer cet état dans l'espace des phases. On met ensuite R à résonance avec Q pendant un temps variable  $\tau$  ce qui permet, en répétant la séquence un grand nombre de fois, de reconstruire l'oscillation de Rabi de Q dans le champ déplacé. On en déduit par transformation de Fourier le poids des différentes composantes de fréquence qui donnent la probabilité  $\Pi^{(\alpha)}(n)$  de trouver  $n$  photons dans l'état déplacé de  $-\alpha$ . On en déduit par la relation (5-19)  $W(\alpha)$  pour une valeur de  $\alpha$  et on recommence pour d'autres valeurs pour reconstruire la fonction de Wigner. On obtient enfin  $\rho$  dans la base des états propres de quadrature:

$$\langle x+u/2 | \rho | x-u/2 \rangle = \int dp e^{2ipu} W(x, p) \quad ; \quad \alpha = x + ip \quad (5-20)$$

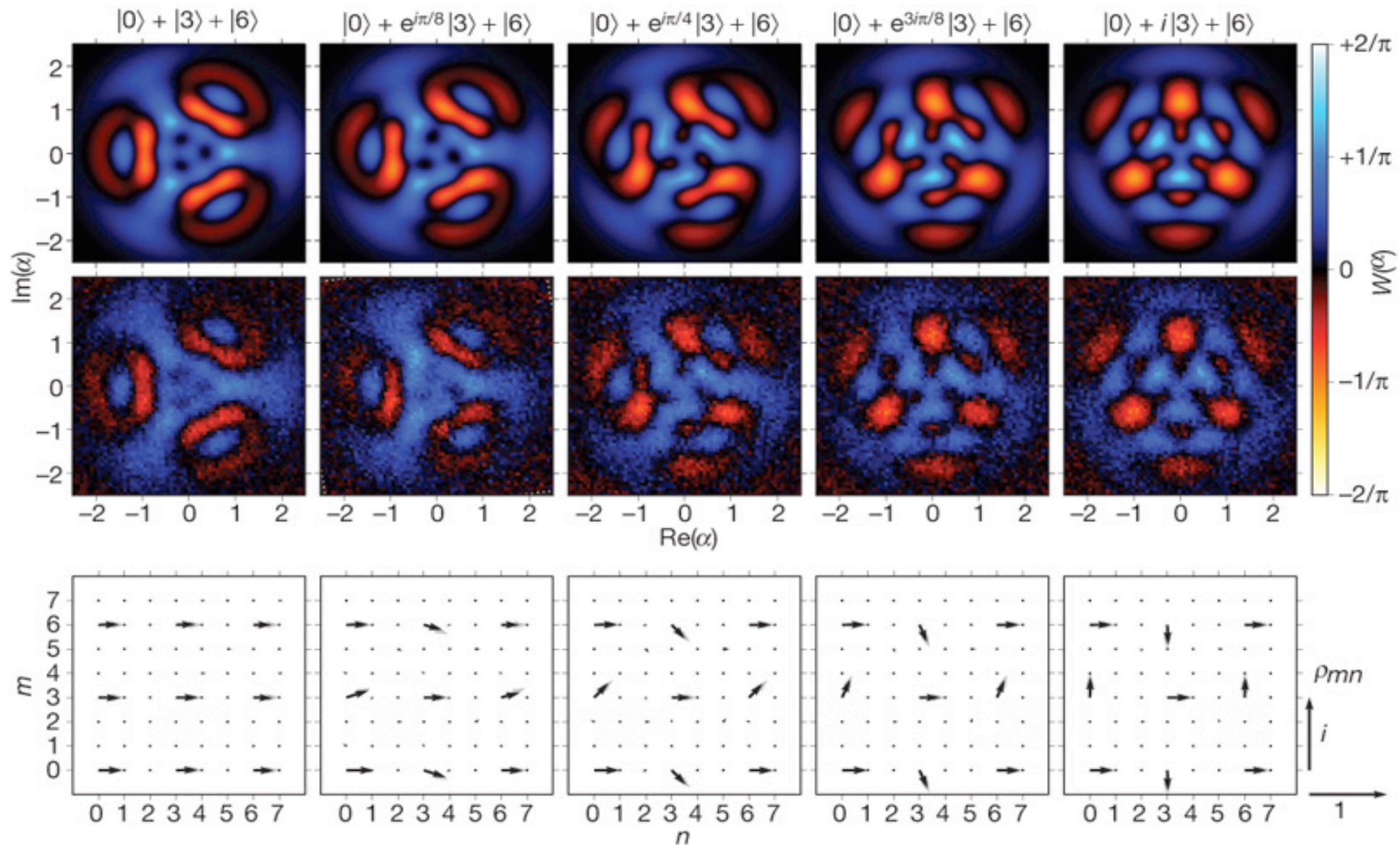
( $|x \pm u/2\rangle$  est l'état propre de valeur propre  $x \pm u/2$  de l'opérateur quadrature  $(a + a^\dagger)/2$ )





Synthèse et reconstruction des états  $|0\rangle + |n\rangle$  avec  $n=1, 2, 3, 4$  et  $5$ . Les fonctions de Wigner  $W(\alpha)$  théoriques (première ligne) et expérimentales (deuxième ligne) sont comparées. Les zones en rouge correspondent aux valeurs négatives de  $W$ . La troisième ligne montre les matrices densités reconstruites correspondantes (flèche horizontale: nombre réel, flèche verticale: nombre imaginaire). Les valeurs expérimentales sont en noir et théoriques en gris.

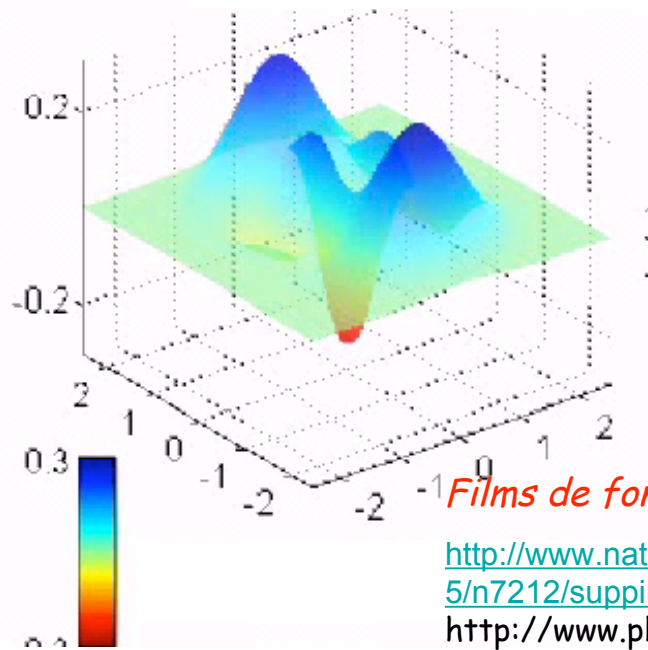




Synthèse et reconstruction d'états  $|0\rangle + \exp(ik\pi/8)|3\rangle + |6\rangle$  avec  $k=0, 1, 2, 3, 4$ . Les fonctions de Wigner théoriques (première ligne) sont comparées aux fonctions mesurées (deuxième ligne). La troisième ligne montre les matrices densité correspondantes. Mêmes conventions qu'à la page précédente.

# Comparaison avec l'Electrodynamique Quantique en Cavité

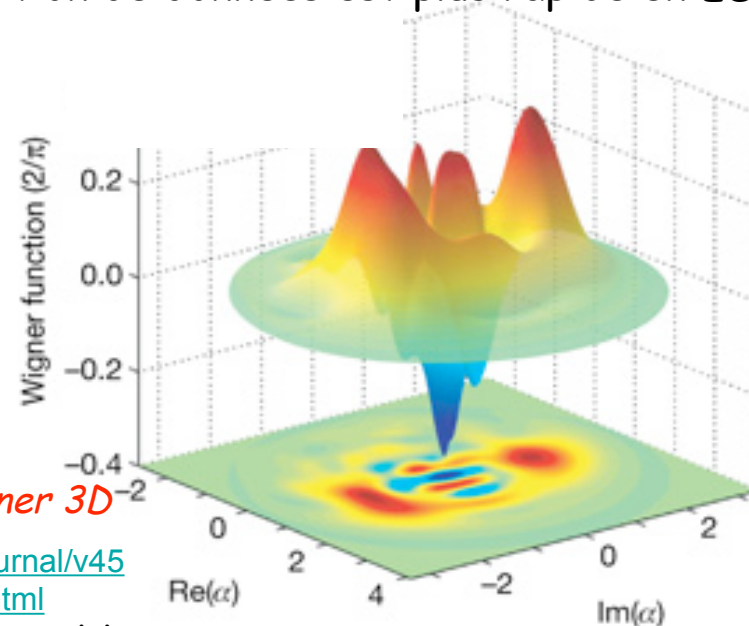
L'électrodynamique des circuits (EDC) et l'électrodynamique quantique en cavité (CQED) permettent de préparer et reconstruire des états non-classiques du champ, en utilisant des techniques similaires. La reconstruction des états en fonction du temps permet dans les deux cas de réaliser des films de la décohérence. L'acquisition de données est plus rapide en EDC.



Films de fonctions de Wigner 3D

<http://www.nature.com/nature/journal/v455/n7212/supinfo/nature07288.html>

[http://www.physics.ucsb.edu/~martinisgroup/movies/Movie\\_odd.avi](http://www.physics.ucsb.edu/~martinisgroup/movies/Movie_odd.avi)



$$|\alpha e^{ix}\rangle - |\alpha e^{-ix}\rangle \quad (\alpha = \sqrt{2} \quad ; \quad \chi = 0,5\pi)$$

État « chat » préparé et reconstruit en électrodynamique des circuits à USBC (groupe Martinis)

$$|\alpha e^{ix}\rangle + |\alpha e^{-ix}\rangle \quad (\alpha = \sqrt{3,5} \quad ; \quad \chi = 0,37\pi)$$

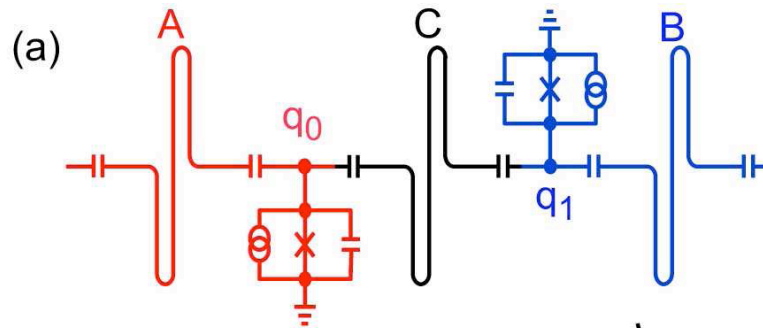
Etat « chat » préparé et reconstruit en Electrodynamique quantique en cavité à l'ENS (voir cours 2009-2010)

V-C

Synthèse d'états intriqués non-locaux de  
type **NOON** dans deux résonateurs

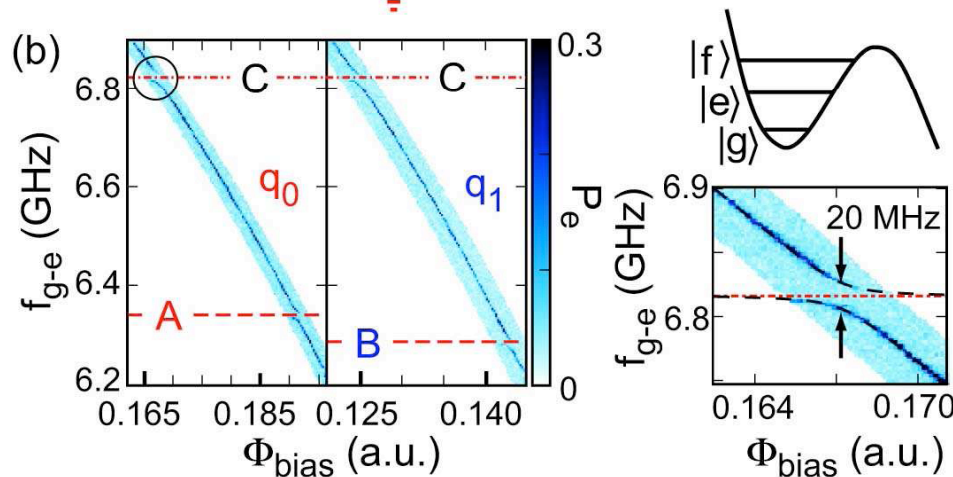
*H. Wang et al, arXiv 1011.2862v1 [quant phys] Novembre 2010, à paraître dans PRL*

# Expérience de synthèse d'états NOON en Circuit QED



Le but de l'expérience est de préparer des états **NOON** de deux résonateurs **A** et **B** de la forme:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |N\rangle_B) \quad (5-21)$$



On utilise un circuit comprenant trois résonateurs A, B et C et deux qubits de phase  $q_0$  et  $q_1$  couplés respectivement à A et C (qubit  $q_0$ ) et B et C (qubit  $q_1$ ). Chaque qubit possède trois niveaux essentiels à l'expérience: les deux niveaux logiques du qubit,  $g$  et  $e$ , et un troisième niveau,  $f$ , relié à  $e$  par une transition à une fréquence différente de celle de

la transition  $e \rightarrow g$ . Les fréquences des résonateurs sont toutes différentes, de façon à permettre un couplage sélectif des qubits avec chacun d'eux. Dans une expérience préliminaire on effectue la spectroscopie des qubits en traçant les courbes de leurs fréquences  $f_{ge}$  et  $f_{ef}$  en fonction du flux qui les accorde ( $\Phi_{\text{bias}}$ ). Ces courbes ont des anticroisements correspondant aux fréquences d'accord avec les résonateurs A et C pour le qubit  $q_0$  et B et C pour le qubit  $q_1$ . Le repérage de ces fréquences d'accord permet de calibrer les flux de contrôle mettant en résonance sélectivement les qubits avec les résonateurs sur les transitions  $g \rightarrow e$  et  $e \rightarrow f$ .



# Préparation de l'état $|1,0\rangle + |0,1\rangle$

**Intrication des deux qubits par l'intermédiaire du résonateur C:**  $q_0$ ,  $q_1$  et  $C$  étant préparés dans leur état fondamental, on effectue une rotation d'angle  $\pi$  de  $q_0$  autour de  $Ox$ , suivie d'une opération  $\sqrt{\text{swap}}$  entre  $q_0$  et  $C$  et enfin d'un pulse Rabi échangeant les énergies de  $C$  et de  $q_1$ . La suite de transformations s'écrit:

$$\begin{aligned}
 |g, g\rangle_{q_0 q_1} \otimes |0\rangle_C &\xrightarrow{\text{pulse } \pi_{q_0}} -i |e, g\rangle_{q_0 q_1} |0\rangle_C \xrightarrow{\text{pulse Rabi } \pi/2_{q_0-C}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |e, g\rangle_{q_0 q_1} |0\rangle_C - i |g, g\rangle_{q_0 q_1} |1\rangle_C \right] \\
 &\xrightarrow{\text{pulse Rabi } 3\pi_{q_1-C}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |e, g\rangle_{q_0 q_1} + |g, e\rangle_{q_0 q_1} \right) |0\rangle_C \quad (5-22)
 \end{aligned}$$

Les deux qubits sont ainsi intriqués par l'intermédiaire de leur couplage successif au résonateur  $C$  qui «catalyse» l'intrication et finit non intriqué avec les qubits, dans son état initial. Cette opération est analogue à celle décrite à la leçon 1 (intrication de deux atomes en CQED par l'intermédiaire de leur couplage à la cavité).

**Transfert de l'excitation et de l'intrication aux résonateurs A et B:** On couple ensuite  $q_0$  et  $q_1$  successivement aux résonateurs  $A$  et  $B$ , initialement dans leur état  $|0\rangle$ , pour effectuer un échange d'énergie (pulses Rabi d'angle  $\pi$  résonants  $q_0-A$  et  $q_1-B$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |e, g\rangle_{q_0 q_1} + |g, e\rangle_{q_0 q_1} \right) |0\rangle_A |0\rangle_B &\xrightarrow{\text{pulse Rabi } \pi_{q_0-A}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -i |g, g\rangle_{q_0 q_1} |1\rangle_A |0\rangle_B + |g, e\rangle_{q_0 q_1} |0\rangle_A |0\rangle_B \right] \\
 &\xrightarrow{\text{pulse Rabi } \pi_{q_1-B}} \frac{-i}{\sqrt{2}} \left( |1\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |1\rangle_B \right) |g, g\rangle_{q_0 q_1} \quad (5-23)
 \end{aligned}$$

On prépare ainsi l'état intriqué  $|1,0\rangle + |0,1\rangle$  correspondant à un photon délocalisé entre les deux résonateurs. Les qubits, finalement non-intriqués avec le champ, sont revenus à leur état initial (voir leçon 1 pour états analogues en physique des ions piégés et en CQED).



# Préparation des états NOON avec $N > 1$

Transfert de l'intrication de  $|e,g\rangle + |g,e\rangle$  à  $|f,g\rangle + |g,f\rangle$  par opérations individuelles sur les qubits:

$$|e,g\rangle + |g,e\rangle \xrightarrow{\text{pulses } \pi \text{ sur transition } e \rightarrow f \text{ pour } q_0 \text{ et } q_1} |f,g\rangle + |g,f\rangle \quad (5-24)$$

Couplages de  $q_0$  à A et  $q_1$  à B, résonants sur la transition  $f \rightarrow e$ , échangeant l'excitation des qubits avec les résonateurs (swapping):

$$(|f,g\rangle + |g,f\rangle)|0_A,0_B\rangle \xrightarrow{\text{pulses Rabi } \pi \text{ transition } e \rightarrow f} |e,g\rangle|1_A,0_B\rangle + |g,e\rangle|0_A,1_B\rangle \quad (5-25)$$

Contrairement à la situation précédente, le champ des deux résonateurs et les deux qubits restent intriqués. On peut alors continuer le processus en ré-excitant les qubits de e vers f:

$$|e,g\rangle|1_A,0_B\rangle + |g,e\rangle|0_A,1_B\rangle \xrightarrow{\text{pulses } \pi \text{ sur transition } e \rightarrow f} |f,g\rangle|1_A,0_B\rangle + |g,f\rangle|0_A,1_B\rangle \quad (5-26)$$

On transfère ensuite à nouveau l'excitation  $f \rightarrow e$  aux deux résonateurs A et B (swapping qui prend un temps  $\sqrt{2}$  plus petit qu'à l'étape précédente):

$$|f,g\rangle|1_A,0_B\rangle + |g,f\rangle|0_A,1_B\rangle \xrightarrow{\text{pulses Rabi } \pi \text{ transition } e \rightarrow f} |e,g\rangle|2_A,0_B\rangle + |g,e\rangle|0_A,2_B\rangle \quad (5-27)$$

Pour réaliser des états NOON plus excités, on itère le processus:

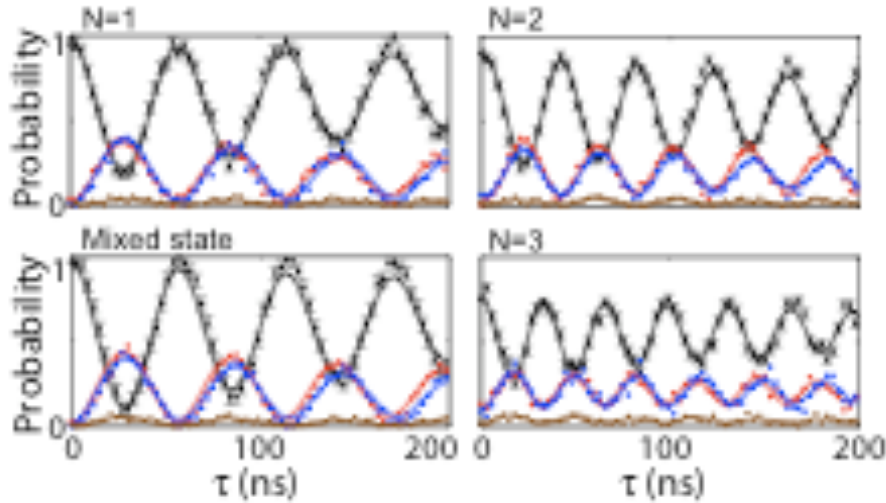
$$|e,g\rangle|2_A,0_B\rangle + |g,e\rangle|0_A,2_B\rangle \xrightarrow{\text{pulses } \pi \text{ } e \rightarrow f} \xrightarrow{\text{pulses Rabi } \pi} \dots \rightarrow |e,g\rangle|(N-1)_A,0_B\rangle + |g,e\rangle|0_A,(N-1)_B\rangle \quad (5-28)$$

A la dernière étape, on met les qubits à résonance avec A et B sur la transition  $e \rightarrow g$  (et non plus  $e \rightarrow f$ ) pour un dernier pulse de Rabi d'angle  $\pi$ :

$$|e,g\rangle|(N-1)_A,0_B\rangle + |g,e\rangle|0_A,(N-1)_B\rangle \xrightarrow{\text{pulses } \pi \text{ Rabi transition } e \rightarrow g} |g,g\rangle(|N_A,0_B\rangle + |0_A,N_B\rangle) \quad (5-29)$$

On obtient un état NOON, séparé des qubits qui retournent à l'état fondamental.

# Distribution de probabilité des nombres de photons dans les états NOON



Une fois l'état préparé, on couple  $q_0$  à A et  $q_1$  à B (A et B mis à résonance pendant un temps  $\tau$  sur la transition  $g \rightarrow e$ ) avant de détecter les qubits. On reconstruit, en répétant la procédure, les probabilités de coïncidences  $P_{e,e}(\tau)$ ,  $P_{e,g}(\tau)$ ,  $P_{g,e}(\tau)$  et  $P_{g,g}(\tau)$ . Les figs ci-contre montrent les résultats pour les états NOON ( $N=1,2$  et  $3$ ) et pour un mélange statistique réalisé en préparant alternativement  $|1,0\rangle$  et  $|0,1\rangle$ . Les courbes  $P_{eg}$  et  $P_{ge}$  sont en rouge et bleu,  $P_{gg}$  en noir et  $P_{ee} \sim 0$  en brun. Pour une distribution quelconque  $\Pi(n_A, n_B)$  des photons, les probabilités attendues sont données par les formules encadrées ci-contre.

$$\begin{aligned}
 P_{e,e}(\tau) &= \sum_{n_A, n_B} \Pi(n_A, n_B) \sin^2 \frac{\Omega \sqrt{n_A} \tau}{2} \sin^2 \frac{\Omega \sqrt{n_B} \tau}{2} \\
 P_{e,g}(\tau) &= \sum_{n_A, n_B} \Pi(n_A, n_B) \sin^2 \frac{\Omega \sqrt{n_A} \tau}{2} \cos^2 \frac{\Omega \sqrt{n_B} \tau}{2} \\
 P_{g,e}(\tau) &= \sum_{n_A, n_B} \Pi(n_A, n_B) \cos^2 \frac{\Omega \sqrt{n_A} \tau}{2} \sin^2 \frac{\Omega \sqrt{n_B} \tau}{2} \\
 P_{g,g}(\tau) &= 1 - P_{e,g}(\tau) - P_{g,e}(\tau) - P_{e,e}(\tau) \quad (5-30)
 \end{aligned}$$

$$\Pi(n_A, n_B) = \frac{1}{2} (\delta_{n_A, N} \delta_{n_B, 0} + \delta_{n_A, 0} \delta_{n_B, N}) \quad (5-31)$$

soit compte tenu de (5-30):

$$P_{e,e}(\tau) = 0 \quad ; \quad P_{e,g}(\tau) = P_{g,e}(\tau) = \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\Omega \sqrt{N} \tau}{2} \right)$$

$$P_{g,g}(\tau) = \cos^2 \left( \frac{\Omega \sqrt{N} \tau}{2} \right) \quad (5-32)$$

Il y a bon accord entre théorie et expérience, mais ce test ne distingue pas  $|1,0\rangle + |0,1\rangle$  d'un mélange statistique de  $|1,0\rangle$  et  $|0,1\rangle$  (comparer la courbe  $N=1$  avec celle de l'état mélange).

# Tomographie complète des états NOON

Pour reconstruire complètement l'état du champ dans les deux résonateurs *incluant les cohérences*, on généralise la méthode de reconstruction du champ dans une seule cavité décrit dans le cours 2009-2010 dans une expérience de CQED. On effectue sur le champ une double translation dans l'espace des phases, produit de l'espace des deux oscillateurs:

$$\rho_{AB} \xrightarrow{\text{Déplacement}} \rho_{AB}^{(\alpha,\beta)} = D_A(-\alpha)D_B(-\beta)\rho_{AB}D_A(\alpha)D_B(\beta) \quad (5-33)$$

La double distribution de la probabilité des nombres de photons dans l'état déplacé s'écrit:

$$\begin{aligned} \Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B) &= \langle n_A, n_B | \rho_{AB}^{(\alpha,\beta)} | n_A, n_B \rangle \\ &= \sum_{\substack{m_A, m_B \\ p_A, p_B}} \langle n_A, n_B | D_A(-\alpha)D_B(-\beta) | m_A, m_B \rangle \langle m_A, m_B | \rho_{AB} | p_A, p_B \rangle \langle p_A, p_B | D_A(\alpha)D_B(\beta) | n_A, n_B \rangle \end{aligned} \quad (5-34)$$

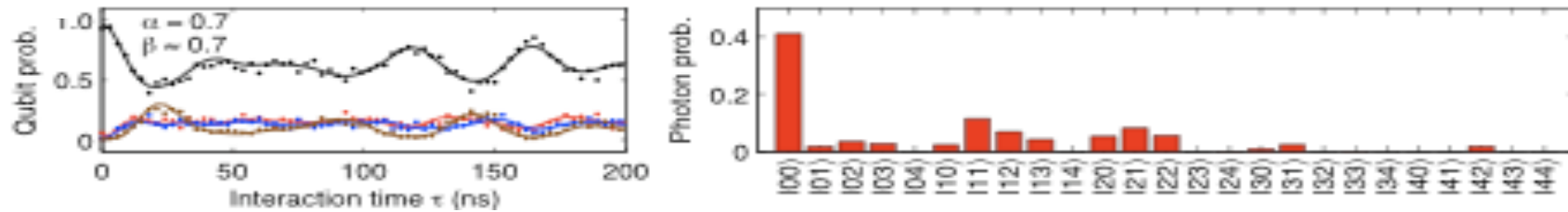
En choisissant un ensemble de déplacements  $(\alpha_k, \beta_l)$  correspondant à un ensemble de points du double espace des phases, on obtient un ensemble d'équations linéaires donnant les  $\Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B)$  en fonction des éléments  $\langle m_A, m_B | \rho_{AB} | p_A, p_B \rangle$  de l'opérateur densité de l'état à mesurer. En inversant ces équations, on peut obtenir en principe un jeu d'équations exprimant ces éléments de matrice comme combinaisons linéaires des  $\Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B)$ :

$$\langle m_A, m_B | \rho_{AB} | p_A, p_B \rangle = \sum_{\substack{n_A, n_B \\ \alpha_k, \beta_l}} C^{p_A, p_B} \Pi^{(\alpha_k, \beta_l)}(n_A, n_B) \quad (5-35)$$

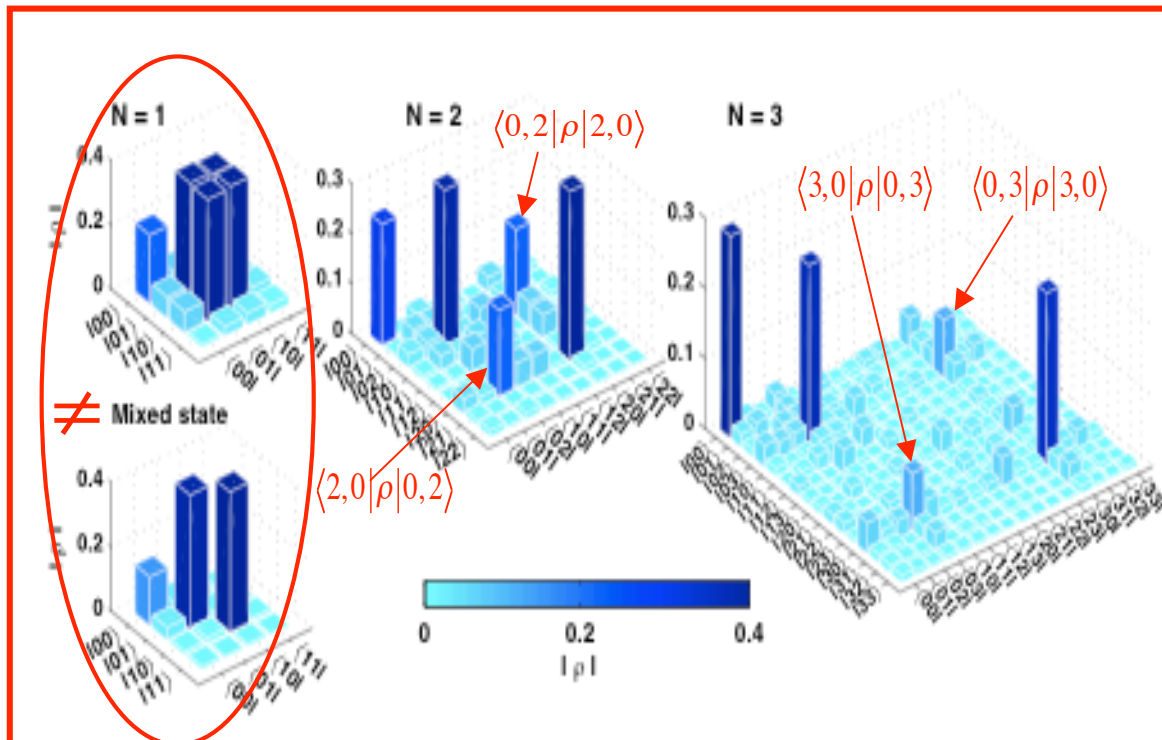
Les doubles distributions de probabilité  $\Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B)$  sont déterminées expérimentalement par l'enregistrement des signaux d'oscillations de Rabi sur les corrélations des deux qubits:

$$P_{e,g}^{(\alpha,\beta)}(\tau) = \sum_{n_A, n_B} \Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B) \sin^2 \frac{\Omega \sqrt{n_A} \tau}{2} \cos^2 \frac{\Omega \sqrt{n_A} \tau}{2}; P_{g,e}^{(\alpha,\beta)}(\tau) = \sum_{n_A, n_B} \Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B) \cos^2 \frac{\Omega \sqrt{n_A} \tau}{2} \sin^2 \frac{\Omega \sqrt{n_A} \tau}{2} \quad (5-36)$$

# Tomographie complète des états NOON (suite)



Reconstruction (à droite) de  $\Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B)$  pour  $N=1$  et  $\alpha=\beta=0,7$  à partir des signaux de Rabi (à gauche) montrant  $P_{eg}(\tau)$  (trait rouge),  $P_{ge}(\tau)$  (trait bleu) et  $P_{gg}(\tau) = 1 - P_{eg}(\tau) - P_{ge}(\tau)$  (trait noir). La reconstruction s'effectue par une méthode de «best fit» des formules (5-36), corrigées en tenant compte des imperfections calibrées de l'expérience (pour une discussion des méthodes d'estimation dans une situation analogue en CQED, voir leçons 6 et 7 du cours 2009-2010).



Les  $\Pi^{(\alpha,\beta)}(n_A, n_B)$  étant connus, les éléments de matrice des états **NOON** sont obtenus par une méthode d'estimation revenant à l'inversion décrite plus haut. La figure ci-contre montre les  $\rho$  reconstruits pour  $N=1, 2$  et  $3$  et pour  $[|1,0\rangle \times |1,0\rangle + |0,1\rangle \times |0,1\rangle]$  (mixed state). Noter la décroissance des  $\langle N,0|\rho|0,N\rangle$  due à la décohérence pendant les séquences (voir p. suivante) et la contribution relative de plus en plus importante de  $\langle 0,0|\rho|0,0\rangle$  lorsque  $N$  augmente,

# Conclusion de la cinquième leçon

Les expériences décrites dans cette leçon démontrent la flexibilité et la versatilité de l'Electrodynamique des circuits pour la synthèse et la reconstruction d'états non-classiques d'un champ stocké dans un ou deux résonateurs radiofréquence. La dimension des champs accessibles est limitée par la décohérence. En gros, le nombre d'opérations nécessaires pour synthétiser un état contenant jusqu' à  $N$  photons est  $\sim kN$  avec  $k \sim 3$  à  $5$ . Le temps d'une opération élémentaire est  $T_{op} \sim 20$  ns et chaque séquence de préparation et détection d'un état à  $N$  photons prend donc un temps  $\sim kNT_{op}$  qui doit être plus court que le temps de décohérence  $T_c/N$  avec  $T_c \sim 1\mu s$ . La décohérence se manifeste donc de façon significative dès que  $N \sim (T_c/kT_{op})^{1/2} \sim 3$ . Cet ordre de grandeur est bien celui indiqué par les résultats de la page précédente. L'allongement des temps de décohérence devrait permettre d'étendre ces études à des champs plus importants. D'autres très belles expériences d'électrodynamique des circuits ont été effectuées, notamment à Yale et à l'ETH en Suisse. Voici pour plus de détails, les sites des groupes concernés à Santa Barbara, Yale et Zurich:

<http://www.physics.ucsb.edu/~martinisgroup/>

<http://www.eng.yale.edu/rslab/>

<http://www.qudev.ethz.ch/>