

Chaire de Physique Quantique

Cours 2009-2010

Synthèse et reconstruction d'états quantiques

*Sept leçons suivies d'un séminaire
du 18 Janvier au 1^{er} Mars 2010*

Notes de cours de cette année et des années passées sur:
www.cqed.org/college/collegeparis.html

Cours 2009-2010: Première Leçon

18 Janvier 2010

Le cours 2009-2010 porte principalement sur **l'estimation et la reconstruction** de l'état d'un système physique microscopique à partir de mesures partielles ou complètes effectuées sur ce système. Ces questions vont nous faire approfondir le concept d'état en physique quantique et à distinguer cet état - objet mathématique résumant toute l'information que l'on peut avoir sur l'objet microscopique qu'il décrit- du système physique lui-même. Le caractère intrinsèquement probabiliste de la théorie quantique va nous conduire à introduire et à utiliser des éléments de la théorie classique des probabilités et de l'estimation.

Nous envisagerons également, pour certains systèmes particuliers, la question de la préparation d'un état quantique arbitraire. Nous illustrerons les concepts généraux par la description d'expériences récentes effectuées sur des champs piégés dans des cavités, dans le cadre de l'électrodynamique en cavité et de l'électrodynamique des circuits (Cavity QED et Circuit QED).

Nous serons amenés à rappeler pour commencer certains résultats essentiels sur la mesure établis dans les cours précédents.

Plan général du Cours

1. Rappels sur états quantiques et mesure (Leçon 1)

Qu'est ce que l'état d'un système physique? Impossibilité de le connaître à partir d'une réalisation unique. Impossibilité de le cloner de façon parfaite. Etat pur et mélange statistique. Exemples simples: qubit, moment angulaire $J > 1/2$. Rappel sur les mesures projectives et les mesures POVM avec quelques exemples simples sur qubits et oscillateurs harmoniques.

2. Introduction à l'estimation des états (Leçon 2)

Une brève introduction à la théorie de l'estimation classique: Loi de Bayes, estimation par maximum de vraisemblance, information de Fisher et limite de Rao-Cramer. Estimation d'un état à partir de mesures incomplètes sur N échantillons dans le cas d'un qubit. Estimation par tomographie (mesures indépendantes sur les différents échantillons). Estimation optimale par mesure collective sur les N échantillons.

Plan général du cours (suite)

3. Le clonage des états quantiques de qubits (I) (Leçon 3)

Comment obtenir des copies identiques d'un état donné de fidélité optimale. Notion de clonage universel et symétrique. Circuit logique de clonage optimal. Clonage de 1 en 2, de 1 en M , puis de N en M exemplaires. Limite de la fidélité du clonage. Lien entre clonage et estimation.

4. Le clonage des états quantiques de qubits (II) (Leçon 4)

Clonage par amplification de photons. Limite de la fidélité de clonage imposée par l'impossibilité de communication super-luminale. Clonage comme stratégie d'attaque en cryptographie. Conséquence pour la sécurité du partage de clés cryptographiques.

5. Représentation d'états par fonction de Wigner (Leçon 5)

La fonction de Wigner W comme description quasi-classique d'un oscillateur. Les propriétés de W . Exemples de fonctions de Wigner. Les aspects intrinsèquement quantiques de W . Comment déterminer W par tomographie quantique ou par mesure de la parité du nombre de photons. Décohérence de la fonction de Wigner.

Plan général du Cours (fin)

6. Reconstruction d'états à partir de mesures complètes ou incomplètes (leçon 6)

Reconstruction directe après mesure d'un quorum d'observables.
Reconstruction par le principe d'entropie maximale dans le cas de mesures portant sur un ensemble incomplet d'observables. Reconstruction par maximum de vraisemblance lorsque les mesures sur les observables sont entachées d'erreurs statistiques (cas d'échantillonnages limités).

7. Synthèse d'états quantiques d'un mode du champ (Leçon 7)

Comment préparer certains états non-classiques particuliers: états comprimés d'un ensemble de N qubits, États de Fock et états de Schrödinger d'un mode du champ. Méthode de synthèse générale d'un état arbitraire du champ. Illustrations par des expériences d'Electrodynamique en cavité et de Circuit QED.

Les séminaires 2009-2010

Les lundis à 11h, à l'amphithéâtre Marguerite de Navarre

- 18 Janvier 2010: **Tobias Kippenberg**, Max Planck Institute, Garching:
« Cavity Optomechanics: exploiting the radiation pressure coupling of optical and mechanical degrees of freedom in microresonators »
- 25 Janvier 2010 **Antoine Heidmann**, LKB/ENS/UPMC:
« Micro-résonateurs et pression de radiation : vers l'optomécanique quantique »
- 1^{er} Février 2010 **Claude Fabre**, LKB/ENS/UPMC:
« Histoires de modes : effets quantiques dans les images optiques et les peignes de fréquence »
- 8 Février 2010 **Arno Rauschenbeutel**, Université de Mayence:
« Trapping, interfacing and conveying cold neutral atoms using optical nanofibers ».
- 15 Février 2010: **Fabio Sciarrino**, Université La Sapienza, Rome:
« Recherche sur la transition du monde quantique au monde classique à travers un processus d'amplification »
- 22 Février 2010: **Eugene Polzik**, Niels Bohr Institute, Copenhague:
« Entanglement assisted metrology and sensing »
- 1^{er} Mars 2010: **Max Hofheinz**, Université de Californie (Santa Barbara) et CEA, Saclay:
« Synthèse et tomographie d'états quantiques arbitraires d'un résonateur avec un qubit supraconducteur »

I-A

Rappels sur les états quantiques

(voir cours antérieurs)

Propriétés de l'état quantique

Pour un cas pur, l'état est décrit par un vecteur $|\Psi\rangle$ de l'espace de Hilbert associé au système physique, contenant toute l'information permettant de faire une prédiction statistique sur toute mesure d'observable du système. L'état représente l'information maximale que l'on peut avoir sur le système (compatible avec l'indétermination quantique).

Quand il s'ajoute une indétermination de nature classique (par exemple, incertitude sur la préparation du système), l'état est décrit par un opérateur densité:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad ; \quad (p_i > 0 \text{ et } \sum_i p_i = 1) \quad (1-1)$$

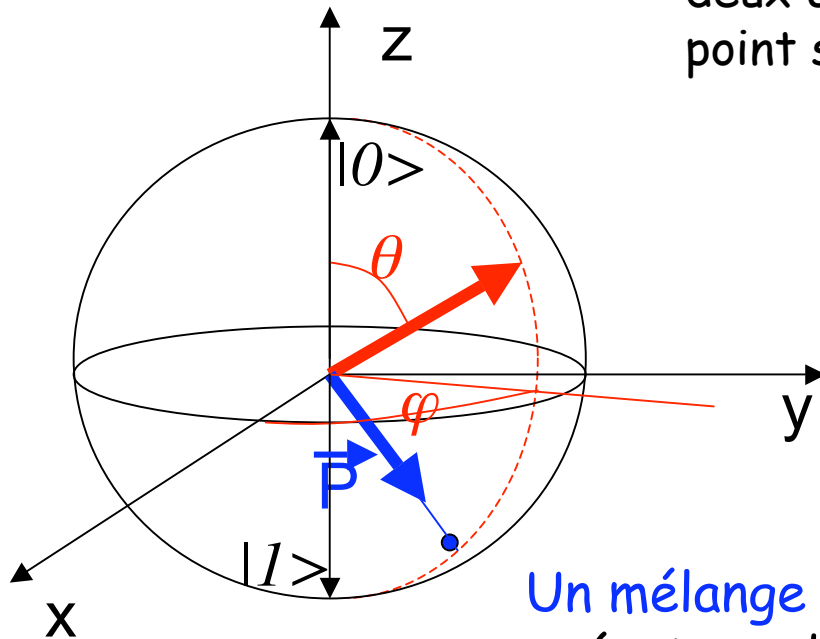
L'ignorance sur l'état du système est mesurée par l'entropie de Von Neumann:

$$S = -\text{Tr} \rho \ln \rho \quad (1-2)$$

nulle pour un cas pur (opérateur densité se réduisant à un projecteur sur un vecteur) et strictement positive pour un mélange statistique d'états.

Cas d'un qubit (ou spin 1/2)

Tout état pur d'un qubit (0/1) est paramétré par deux angles polaires θ, φ et est représenté par un point sur la sphère de Bloch:



$$|\theta, \varphi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |1\rangle \quad (1-3)$$

Un mélange statistique est représenté par un opérateur densité qui se décompose sur les matrices de Pauli:

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \quad ; \quad |\vec{P}| \leq 1 \quad (1-4)$$

$|\vec{P}| = 1$: cas pur ; $|\vec{P}| < 1$: mélange ; $|\vec{P}| > 1$: non physique (v.p. négative)

L'état quantique d'un qubit (cas pur ou mélange) est entièrement défini par son vecteur de Bloch

Description d'un qubit (suite)

Les composantes du vecteur de Bloch sont les valeurs moyennes des opérateurs de Pauli:

$$P_i = \text{Tr} \rho \sigma_i = \langle \sigma_i \rangle \quad (i = x, y, z) \quad ; \quad \rho = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_i \langle \sigma_i \rangle \sigma_i \right] \quad (1-5)$$

On détermine l'état en effectuant des **moyennes**. Il faut donc disposer d'un ensemble de réalisations: **le concept d'état quantique est statistique**.

Appelant p_{i+} et p_{i-} les probabilités de trouver le qubit dans les états propres de σ_i de valeurs propres ± 1 , on a également:

$$P_i = p_{i+} - p_{i-} \quad ; \quad \rho = \frac{1}{2} \left[I + \sum_i (p_{i+} - p_{i-}) \sigma_i \right] \quad (1-6)$$

Une formule utile: recouvrement de deux états de qubits décrits par leurs vecteurs de Bloch:

$$S_{12} = \text{Tr} \{ \rho_1 \rho_2 \} = \frac{1}{2} [1 + \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2] \quad (1-7)$$

Cas particuliers:

- qubit 1 dans un état pur $|\psi_1\rangle$: $\langle \psi_1 | \rho_2 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{2} [1 + \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2]$
- qubits 1 et 2 dans des états purs $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$: $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} [1 + \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2]$

Généralisation à un système à d états (« qudit »)

On peut représenter un système à d états comme un moment angulaire $J=(d-1)/2$ et décomposer son opérateur densité sur une base d'opérateurs tensoriels irréductibles de trace nulle qui généralisent la base des opérateurs de Pauli à des espaces plus grands:

$$\rho = \frac{1}{d} \left[I + \sum_{k=1, \dots, d-1}^{k \leq q \leq -k} c_{kq} T_q^{(k)} \right] ; \quad c_{kq} = \frac{d \text{Tr} \{ \rho T_q^{(k)\dagger} \}}{\text{Tr} \{ T_q^{(k)} T_q^{(k)\dagger} \}} \quad (1-8)$$

Le nombre d'opérateurs $T_q^{(k)}$ définissant l'état est:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2d - 1) = d^2 - 1 \quad (1-9)$$

soit, en adjoignant l'opérateur unité, d^2 opérateurs, dont le nombre est égal à la dimension de l'espace des opérateurs d'un système à d états.

Dans la suite nous traiterons en général le cas le plus simple des qubits ($d=2$), mais nous donnerons les formules généralisant certains résultats au cas de qudits.

Espace des états à N qubits symétrique par échange: base des états de Dicke $|J, m\rangle$

Un système à $d = N+1$ niveaux est assimilable à un ensemble de N qubits dans l'espace Σ_N de N qubits symétrique par échange de deux qubits quelconques, correspondant à un moment angulaire $J = N/2$. Une base finie de Σ_N est donnée par les états de Dicke $|J, m\rangle$, états propres des opérateurs J^2 et J_z . L'état $|J, m\rangle$ est l'état complètement symétrique par permutation dans lequel $N/2 + m$ qubits sont dans l'état $|0\rangle$ et $N/2 - m$ dans l'état $|1\rangle$, que l'on pourra écrire simplement $|N/2 + m; N/2 - m\rangle$ dans une notation rappelant la seconde quantification:

$$|J, m\rangle = \sqrt{\frac{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}{N!}} \sum_{\text{permutations}} \left| \underbrace{0,0,0\dots 0}_{\frac{N}{2}+m}; \underbrace{1,1,1\dots 1}_{\frac{N}{2}-m} \right\rangle = \left| \frac{N}{2} + m; \frac{N}{2} - m \right\rangle \quad (1-10)$$

Les $|J, m\rangle$ sont orthonormés et satisfont la relation de fermeture dans Σ_N :

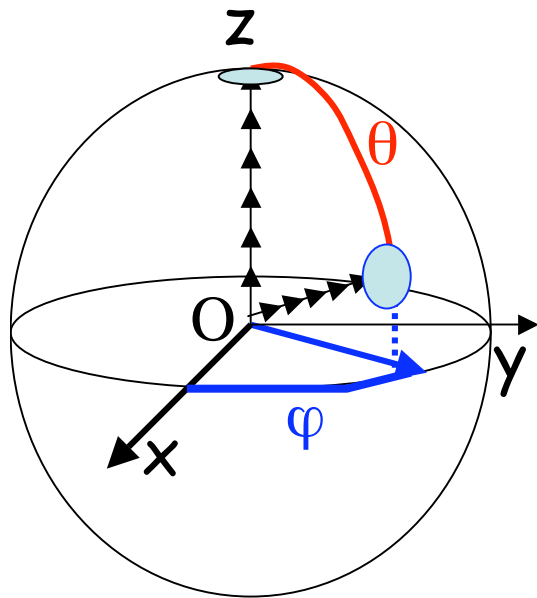
$$\sum_{m=-J}^{m=J} |J, m\rangle \langle J, m| = I \quad (1-11)$$

Etats cohérents du moment angulaire

Il existe une classe d'états symétriques particuliers, les états cohérents du moment angulaire, obtenus à partir de l'état où les vecteurs de Bloch des N qubits sont alignés le long de Oz par une rotation d'ensemble amenant Oz dans la direction générale θ, φ . Le moment angulaire global associé à ces états cohérents est un vecteur dont l'extrémité est sur l'hyper-sphère de Bloch de rayon $N/2$ (voir figure):

$$|N_{\theta, \varphi}\rangle = |\theta, \varphi\rangle^{\otimes N} = \left[\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |1\rangle \right]^{\otimes N} = U(\theta, \varphi) |N_{0,0}\rangle \quad ; \quad |N_{0,0}\rangle = |0\rangle^{\otimes N} = |0,0,0\dots 0\rangle \quad (1-12)$$

La rotation $U(\theta, \varphi)$ du moment angulaire $J=N/2$ s'obtient en faisant le produit tensoriel des rotations de spins $1/2$ individuels et en tenant compte de la symétrie par échange. On montre que les états cohérents se décomposent sur la base des états $|J=N/2, m\rangle$ des états propres de J^2 et J_z suivant:



$$|N_{\theta, \varphi}\rangle = |\theta, \varphi\rangle^{\otimes N} = \sum_{m=-N/2}^{m=N/2} U_{m, N/2}(\theta, \varphi) \left| \frac{N}{2}, m \right\rangle \quad (1-13)$$

$$\text{avec } U_{m, N/2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{N!}{(N/2+m)!(N/2-m)!}} \cos^{(N/2+m)} \frac{\theta}{2} \sin^{(N/2-m)} \frac{\theta}{2} e^{-im\varphi} \quad (1-14)$$

Propriétés des états cohérents de $J=N/2$

Fluctuations transversales: Si le système est dans l'état cohérent $|N_{0,0}\rangle = |J=N/2, m=N/2\rangle$, les composantes transversales J_x et J_y sont en valeur moyenne nulles. Leurs fluctuations se déterminent en considérant J comme une somme de N spins ayant des probabilités égales de pointer dans les directions + et - le long de Ox et Oy . On en déduit immédiatement (analogie avec une marche aléatoire):

$$\Delta J_x^2 = \Delta J_y^2 = \frac{N}{4} \quad (1-15)$$

Ces fluctuations sont minimales étant donné les relations d'incertitude déduites des relations de commutation du moment angulaire:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \rightarrow \Delta J_i \Delta J_j \geq \frac{|\langle J_k \rangle|}{2} \quad (1-16)$$

On en déduit la fluctuation angulaire isotrope autour de Oz :

$$\Delta \theta = \frac{\Delta J_x}{\langle J_z \rangle} = \frac{\Delta J_y}{\langle J_z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (1-17)$$

De même, l'état cohérent $|N_{\theta\varphi}\rangle$ présente des fluctuations transversales isotropes en $1/\sqrt{N}$ autour de la direction θ, φ . On peut se les représenter en associant à l'extrémité du moment angulaire dans la direction θ, φ un petit cercle d'incertitude tangent à l'hyper-sphère de Bloch (voir figure page précédente). On notera l'analogie avec les états cohérents d'un oscillateur harmonique qui présentent aussi des fluctuations isotropes minimales dans le plan de phase.

Propriétés des états cohérents (suite)

Produit scalaire d'états cohérents: Par symétrie de rotation, la norme du produit scalaire de deux états cohérents ne dépend que de l'angle α entre les directions associées aux deux états:

$$\left| \langle N_{\theta, \varphi} | N_{\theta', \varphi'} \rangle \right| = \left| \langle N_{\alpha, 0} | N_{0, 0} \rangle \right| = \cos^N \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha = \text{angle entre directions } (\theta, \varphi) \text{ et } (\theta', \varphi')) \quad (1-18)$$

Pour $N \gg 1$, le recouvrement des états cohérents devient petit dès que α s'écarte de zéro et on peut remplacer $\cos(\alpha/2)$ par un développement au deuxième ordre:

$$\left| \langle N_{\theta, \varphi} | N_{\theta', \varphi'} \rangle \right| \approx \left[1 - \frac{\alpha^2}{8} \right]^N \approx 1 - \frac{N\alpha^2}{8} \approx \exp(-N\alpha^2 / 8) \quad (1-19)$$

Le produit scalaire de deux états cohérents du moment angulaire décroît (pour $N \gg 1$) exponentiellement avec leur distance angulaire et devient en pratique négligeable dès que les cercles d'incertitudes associés aux états sont disjoints. Là encore, il y a analogie avec les états cohérents de Glauber d'un oscillateur.

Relation de fermeture: On montrera en exercice que les états cohérents de $J=N/2$ satisfont une relation de fermeture dans Σ_N (I est la matrice unité dans cet espace à $N+1$ dimensions):

$$\iint d\Omega |N_{\theta, \varphi}\rangle \langle N_{\theta, \varphi}| = \frac{I}{N+1} \quad ; \quad d\Omega = \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\theta d\varphi \quad (1-20)$$

Ce résultat est aussi analogue à la relation de fermeture sur les états de Glauber. La base « continue » des états cohérents du moment angulaire nous servira dans la suite pour établir des résultats importants sur l'estimation des états de qubits.

L'état d'un système quantique unique est inconnaisable et le clonage parfait interdit

Pour déterminer l'état, il faut faire des mesures sur des observables incompatibles (non commutantes), par exemple les matrices de Pauli pour un qubit. La mesure de l'une projette le système sur un état propre et détruit toute information sur l'autre. Il est ainsi impossible de reconstruire un état pur (ou un mélange) à partir d'une seule copie du système. On peut dire en ce sens que l'état n'a pas de « réalité physique », n'est pas un objet direct susceptible d'être mesuré ou observé. Seul une signification statistique peut lui être donnée.

Corollaire important: il est impossible de cloner parfaitement un état quantique. Si on pouvait le faire, on obtiendrait à partir d'une copie un ensemble de systèmes dans un état identique et on pourrait, par des mesures d'observables complémentaires sur cet ensemble, déterminer l'état du système initial, en contradiction avec la propriété d'impossibilité de connaissance de l'état.

Le clonage parfait conduirait à d'autres contradictions en physique liées au principe de causalité. Si le clonage parfait est interdit, on peut définir un clonage imparfait optimal qui présente un intérêt pour le traitement quantique de l'information (voir leçons 3 et 4).

I-B

Quelques résultats sur les
mesures projectives et POVMs
(voir cours antérieurs)

Mesures standard et mesures POVM

Une mesure standard est définie par la donnée de l'ensemble des projecteurs sur une base d'états propres d'une observable pour laquelle on a défini un appareil de mesure (ou « mètre »):

$$G|a_i\rangle = g_i|a_i\rangle \quad ; \quad \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$$
$$\Pi_i = |a_i\rangle\langle a_i| \quad ; \quad \sum_i \Pi_i = 1 \quad ; \quad \Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_i \quad (1-21)$$

La probabilité p_i de trouver le résultat i pour un système dans l'état « avant mesure » ρ , et l'état ρ_i dans lequel le système est projeté par la mesure sont donnés par les relations:

$$p_i = \text{Tr} \rho \Pi_i \quad ; \quad \sum_i p_i = 1$$
$$\rho \rightarrow \rho_i = \frac{\Pi_i \rho \Pi_i}{p_i} \quad (1-22)$$

Le nombre de projecteurs (en tenant compte du degré de dégénérescence des valeurs propres) est égal à la dimension de l'espace (2 pour un qubit) et la mesure est répétable: après une première mesure, on retrouvera toujours le même résultat comme conséquence directe de l'orthogonalité des projecteurs Π_i .

A côté de ces mesures standard (dites aussi projectives), on peut définir des mesures POVM (pour Positive Operator Valued Measure).

Mesure POVM

Une mesure POVM est définie par un ensemble d'opérateurs E_i hermitiques et positifs (ayant des valeurs moyennes réelles positives ou nulles pour tout état) formant une partition de l'opérateur unité dans l'espace des états:

$$\sum_i E_i = I \quad (1-23)$$

Le nombre des E_i peut être quelconque, plus petit, égal ou plus grand que la dimension de l'espace des états. La mesure POVM est définie par la donnée des probabilités p_i de trouver le résultat i et la règle de projection qui rappellent celles de la mesure standard:

$$p_i = \text{Tr} \{ \rho E_i \} \quad ; \quad \sum_i p_i = 1 \quad (1-24a)$$

$$\rho \rightarrow \rho_i = \frac{\sqrt{E_i} \rho \sqrt{E_i}}{p_i} \quad (1-24b)$$

Les E_i n'étant pas des projecteurs normés, on a en général:

$$E_i E_j \neq 0 \text{ pour } i \neq j \quad ; \quad E_i^2 \neq E_i \quad (1-25)$$

Le processus ainsi décrit est bien une mesure statistique dans le sens où il donne un résultat pris dans un ensemble de valeurs, avec une distribution de probabilité. Cette mesure n'est pas répétable (avec des résultats s'excluant mutuellement). On peut successivement trouver des résultats différents en recommençant la mesure.

Réalisation d'un POVM comme une mesure standard dans un environnement

Un POVM sur un système S dans un espace des états (A) peut toujours se ramener à une mesure projective dans un environnement (B) auquel S est intriqué par une évolution unitaire. Associons à chaque élément i du POVM un vecteur $|b_i\rangle$ de B , les $|b_i\rangle$ formant une base orthonormée (l'espace B a une dimension au moins égale au nombre d'éléments du POVM) et envisageons la transformation unitaire qui agit de la façon suivante sur un état $|\psi\rangle_A |0\rangle_B$, produit tensoriel d'un état quelconque de A par un état « référence » $|0\rangle_B$ de B :

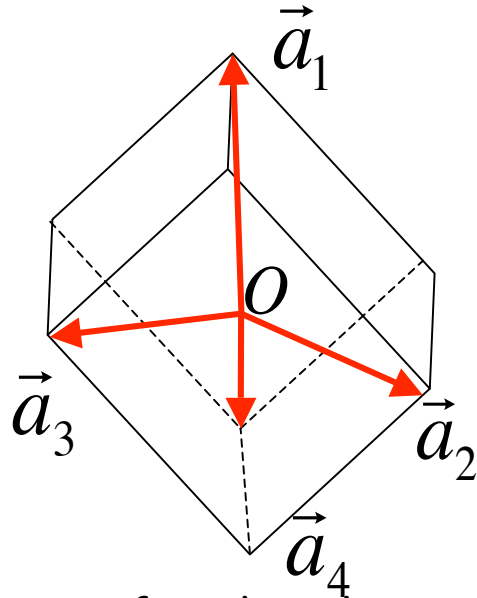
$$|\psi\rangle_A |0\rangle_B \rightarrow \sum_i \sqrt{E_i} |\psi\rangle_A |b_i\rangle_B \quad (1-26)$$

Cette relation est la restriction d'une opération unitaire dans $(A+B)$. Appliquée à un mélange statistique de (A) elle s'écrit de façon générale, par linéarité:

$$\rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0| \rightarrow \sum_i \sqrt{E_i} \rho_A \sqrt{E_i} \otimes |b_i\rangle_B \langle b_i| \quad (1-27)$$

Effectuons une mesure d'une observable de B admettant comme états propres les $|b_i\rangle$. Le résultat i est obtenu avec la probabilité donnée par (1-24 a) et le système S de A est projeté dans l'état décrit par (1-24 b): on a bien ainsi réalisé le POVM cherché. Nous allons maintenant donner quelques exemples de POVM et discuter de l'intérêt que peut avoir ce type de mesure.

Exemple de POVM d'un qubit



Considérons les quatre vecteurs de Bloch \vec{a}_i ($i=1,2,3,4$) reliant l'origine de la sphère de Bloch aux 4 sommets d'un tétraèdre régulier inscrit, qui satisfont les relations:

$$\sum_i \vec{a}_i = 0 \quad ; \quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \frac{4}{3} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \quad (1-28)$$

Les 4 opérateurs positifs:

$$E_i = \frac{1}{4} [I + \vec{a}_i \cdot \vec{\sigma}] \quad (1-29)$$

satisfont la relation $\sum_i E_i = I$ et forment donc un POVM. Noter que chaque E_i est égal à 1/2 fois le projecteur sur l'état de vecteur de Bloch \vec{a}_i et n'est donc pas un projecteur.

La probabilité p_i de trouver le résultat i lorsque le qubit est dans l'état (pur ou mélange) de vecteur de Bloch \vec{P} est:

$$p_i = \frac{1}{4} [1 + \vec{a}_i \cdot \vec{P}] \quad (1-30)$$

d'où on tire l'expression de \vec{P} en fonction des p_i :

$$\vec{P} \cdot \vec{a}_i = 4p_i - 1 = 4p_i - \sum_j p_j = 3p_i - \sum_{j \neq i} p_j = 3p_i \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i + 3 \sum_{j \neq i} p_j \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 3 \vec{a}_i \cdot \sum_{k=1,2,3,4} p_k \vec{a}_k$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{P} = 3 \sum_k p_k \vec{a}_k} \quad (1-32) \quad (1-31)$$

Au lieu d'effectuer 3 mesures projectives indépendantes de σ_x , σ_y et σ_z , la mesure d'un seul POVM, grâce à sa grande symétrie permet de reconstruire l'état du qubit.

Un POVM à nombre infini d'éléments dans l'espace des états symétriques de N qubits

On définit dans l'espace symétrique Σ_N des N qubits un POVM « continu » en introduisant les opérateurs positifs:

$$E_{\theta,\varphi} = (N+1) |N_{\theta,\varphi}\rangle\langle N_{\theta,\varphi}| \quad (1-33)$$

qui satisfont à la relation de fermeture d'un POVM (voir éq. (1-20)):

$$\sum_{\theta,\varphi} E_{\theta,\varphi} = (N+1) \iint d\Omega |N_{\theta,\varphi}\rangle\langle N_{\theta,\varphi}| = I \quad (1-34)$$

Pour un système dans un état pur symétrique $|\psi\rangle$ de Σ_N , la mesure de ce POVM donnera le résultat θ,φ avec la densité de probabilité:

$$p(\theta,\varphi) = \langle \psi | E_{\theta,\varphi} | \psi \rangle = (N+1) |\langle \psi | N_{\theta,\varphi} \rangle|^2 \quad (1-35)$$

qui obéit bien à la relation:

$$\iint d\Omega p(\theta,\varphi) = 1 \quad (1-36)$$

Après la mesure, le système est projeté sur un état cohérent du moment angulaire:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{résultat } \theta,\varphi} \frac{|N_{\theta,\varphi}\rangle\langle N_{\theta,\varphi}|\psi\rangle}{|\langle N_{\theta,\varphi}|\psi\rangle|} \quad (1-37)$$

On établit de même les formules pour un mélange statistique décrit par ρ .

Réalisation du POVM continu par image des états cohérents sur les points d'une sphère

On peut réaliser le POVM $\{E_{\theta\varphi}\}$ en associant à Σ_N l'espace des positions d'une particule ponctuelle sur une sphère B , « image » de l'hyper-sphère de Bloch du moment angulaire J . A chaque élément $E_{\theta\varphi}$ du POVM est associé un ket $|e_{\theta\varphi}\rangle$ état propre de l'opérateur de position angulaire sur B . Les $|e_{\theta\varphi}\rangle$ sont orthonormés au sens des bases continues et satisfont les relations:

$$\langle e_{\theta,\varphi} | e_{\theta',\varphi'} \rangle = \frac{4\pi}{\sin\theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') \quad ; \quad \iint d\Omega |e_{\theta,\varphi}\rangle \langle e_{\theta,\varphi}| = I_B \quad (1-38)$$

Le POVM est obtenu en mesurant (projectivement) la position de la particule B après l'avoir couplée au moment angulaire J par la transformation unitaire, valable pour tout état $|\psi\rangle$ de Σ_N (le ket $|e_0\rangle$ correspond à la position « neutre » du « mètre » constitué par la particule B):

$$|\psi\rangle \otimes |e_0\rangle \rightarrow \sqrt{N+1} \iint d\Omega \left(|N_{\theta,\varphi}\rangle \langle N_{\theta,\varphi} | \psi \rangle \right) \otimes |e_{\theta,\varphi}\rangle \quad (1-39)$$

On vérifie aisément l'unitarité de cette transformation. L'effondrement (collapse) de la particule de mesure sur $|e_{\theta\varphi}\rangle$ projette bien le moment angulaire dans l'état décrit par l'équation (1-37). Nous verrons à la leçon 2 l'utilité de ce POVM pour la réalisation d'une estimation optimale d'un qubit préparé en N exemplaires.

POVM à deux éléments d'un oscillateur harmonique

Considérons un oscillateur harmonique (mode du champ électromagnétique avec base des états de Fock $|n\rangle$) et le POVM à deux éléments ($j=0,1$):

$$E_j = \sum_n \cos^2\left(\frac{\theta_n + j\pi}{2}\right) |n\rangle\langle n| \quad ; \quad \sum_j E_j = E_0 + E_1 = \sum_n |n\rangle\langle n| = I \quad (1-40)$$

Le paramètre θ_n est une fonction de n quelconque. Un exemple simple correspond à $\theta_n = an+b$ (fonction linéaire). La mesure par ce POVM d'un oscillateur dans l'état décrit par l'opérateur densité ρ donne un résultat binaire ($j=0$ ou 1) avec la loi binomiale de probabilité:

$$p_j = \text{Tr}(\rho E_j) = \sum_n \cos^2\left(\frac{\theta_n + j\pi}{2}\right) \rho_{nn} \quad (1-41)$$

La probabilité de trouver n photons dans le champ est modifiée par la mesure suivant la loi de projection:

$$\rho_{nn} \xrightarrow{\text{après résultat } j} \rho_{nn}^{(j)} = \frac{\rho_{nn}}{p_j} \cos^2\left(\frac{\theta_n + j\pi}{2}\right) \quad (1-42)$$

Dans le cas particulier $\theta_n = n\pi$, le POVM mesure la parité du nombre de photons. On a en effet:

$$\cos^2\left(\frac{\theta_n + j\pi}{2}\right) = \frac{1 + (-1)^{n+j}}{2} \quad \rightarrow \quad p_0 = \sum_{n \text{ pair}} \rho_{nn} \quad ; \quad p_1 = \sum_{n \text{ impair}} \rho_{nn} \quad (1-43)$$

Produits de POVM à deux éléments et mesure QND du nombre de photons

Le POVM $\{E_j\}$ peut être réalisé en couplant le champ à un qubit (voir cours 2007-2008). On obtient une mesure projective non destructive (QND) du nombre de photons en effectuant à l'aide de M qubits indépendants un grand nombre de ces POVMs. La probabilité que k mesures donnent le résultat 0 et $M-k$ le résultat 1 est:

$$p(j_1, j_2, \dots, j_i, \dots, j_N) = \sum_n \rho_{nn} \left(\prod_i \cos^2 \left(\frac{\theta_n + j_i \pi}{2} \right) \right) = \sum_n \rho_{nn} \cos^{2k} \frac{\theta_n}{2} \sin^{2(M-k)} \frac{\theta_n}{2} \quad (1-44)$$

et la probabilité de trouver n photons après les M POVMs est:

$$\rho_{nn}^{(j_1 \dots j_i \dots j_N)} = \frac{\rho_{nn}}{p(j_1 \dots j_i \dots j_N)} \cos^{2k} \frac{\theta_n}{2} \sin^{2(M-k)} \frac{\theta_n}{2} \quad (1-45)$$

Si la seule information initiale sur le champ est que n est borné par la valeur n_{\max} , on fait l'hypothèse $\rho_{nn} = 1/(n_{\max} + 1)$. A la limite $M \rightarrow \infty$, le produit des fonctions cosinus et sinus de (1-45), considéré comme une fonction de θ_n est centré en θ tel que:

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{k}{M} \quad (1-46)$$

La valeur obtenue de k/M est une mesure de θ_n (donc de n si la fonction θ_n est bien choisie), d'autant plus précise que M est plus grand:

$$\theta_n = \frac{n\pi}{n_{\max} + 1} \rightarrow n_{\text{mesuré}} = \frac{2(n_{\max} + 1)}{\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\text{Arc cos} \sqrt{\frac{k}{M}} \right) \quad (1-47)$$

Estimation d'état en physique quantique: introduction à la deuxième leçon

Disposer d'une copie d'un système quantique dans un état pur n'est pas suffisant pour connaître cet état. A partir de ce constat, plusieurs questions reliées peuvent être posées: Quelle est l'information optimale que l'on peut tirer de cette copie unique et comment l'obtenir en pratique? Comment quantifier cette information? De façon plus générale, que peut-on dire de l'état du système si l'on dispose d'un nombre N fini de copies? Les principes de la mécanique quantique nous disent que lorsque $N \rightarrow \infty$, on peut par la statistique de mesures faites sur un ensemble complet d'observables reconstruire l'état avec une précision aussi grande que l'on veut. Comment l'information sur l'état du système augmente-t-elle avec N ? Quelles sont les procédures de mesure optimales pour tirer d'un échantillon de N systèmes identiques le maximum d'information sur le système? Toutes ces questions sont traitées dans ce qu'on appelle l'« estimation d'état » en information quantique. Ce problème a un aspect fondamental mais aussi pratique (comment reconstruire au mieux l'état d'un système en présence d'imperfections expérimentales et de bruit?)

Nous allons aborder ces problèmes de façon élémentaire dans la seconde leçon, en envisageant pour commencer le cas du système quantique le plus simple, celui du qubit. Nous verrons aussi dans la suite du cours (leçons 3 et 4) que les lois de l'estimation d'état et celles du clonage d'état sont étroitement liées.