

Physique Quantique
Cours 2009-2010: Deuxième Leçon
25 Janvier 2010

Nous nous intéressons ici à l'estimation de l'état d'un système quantique dans le cas où il est réalisé en un nombre fini N d'exemplaires. Il s'agit d'inférer, à partir du résultat de mesures, la valeur des paramètres qui définissent l'état. La question s'apparente à celle de l'estimation du ou des paramètres qui définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire classique. Nous commençons (&II-A) par un rappel sur la théorie classique de l'estimation en présentant l'information de Fisher, la limite de Cramer Rao et la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance.

Nous abordons ensuite (&II-B), le problème de l'estimation de l'état pur d'un qubit préparé en N exemplaires sur lesquels on effectue des mesures indépendantes. Ceci correspond à une situation expérimentale fréquente, dans laquelle on prépare plusieurs fois le même état et on mesure sur les réalisations successives des observables différentes. Nous montrons sur différents exemples que la fidélité de l'estimation (définie comme le carré du produit scalaire des états réel et estimé) est, pour $N > 1$, inférieure à $(N+1)/(N+2)$.

Nous montrons ensuite (&II-C) que l'on peut atteindre la limite $(N+1)/(N+2)$ en effectuant des mesures collectives sur l'ensemble des N qubits préparés dans le même état. Nous démontrons enfin que la fidélité $(N+1)/(N+2)$ ne peut être dépassée, quelles que soient les mesures effectuées.

II-A.

**Quelques éléments de la théorie
de l'estimation classique**

Information de Fisher et borne de Cramer-Rao

La mesure d'une variable aléatoire X (qui peut être à plusieurs composantes) donne un résultat x . La loi de probabilité $p(x|\theta)$ de X dépend d'un paramètre θ (qui peut aussi avoir plusieurs composantes), *a priori* inconnu. On appelle $p(x|\theta)$ la **fonction de vraisemblance** du résultat x . La mesure apporte une information sur θ , qu'il s'agit de quantifier. On appelle **estimateur $\theta(x)$** une fonction qui, à chaque résultat x de la mesure, associe la valeur estimée de θ . Deux résultats x_1 et x_2 sont en général associés à des estimations $\theta(x_1)$ et $\theta(x_2)$ différentes. La variance de $\theta(x)$, moyennée sur un grand nombre de réalisations de la mesure, représente la précision de l'estimation. Nous allons montrer que cette variance est bornée inférieurement par une quantité indépendante de la fonction d'estimation: c'est la **borne de Cramer-Rao**.

On considèrera ici des estimateurs non-biaisés, qui, en moyenne sur un grand nombre de mesures, donnent la vraie valeur de θ . Si la variable X a un spectre continu, cette condition s'écrit (on étend tous les résultats qui suivent au cas de spectres discrets en remplaçant les intégrales par des sommes):

$$\langle \theta(x) - \theta \rangle = \int p(x|\theta)(\theta(x) - \theta) dx = 0 \quad (2-1)$$

soit, par dérivation par rapport à θ (supposé ici continu et à une seule composante):

$$\int (\theta(x) - \theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} dx - \int p(x|\theta) dx = 0 \quad \rightarrow \quad \int (\theta(x) - \theta) \frac{\partial p}{\partial \theta} dx = 1 \quad (2-2)$$

Borne de Cramer-Rao (suite)

On se sert ensuite de la relation:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = p \frac{\partial \text{Log}(p)}{\partial \theta} \quad (2-3)$$

qui entraîne :

$$\int (\theta(x) - \theta) p \frac{\partial \text{Log}(p)}{\partial \theta} dx = 1$$
$$\rightarrow \int \left[(\theta(x) - \theta) \sqrt{p} \right] \left[\sqrt{p} \frac{\partial \text{Log}(p)}{\partial \theta} \right] dx = 1 \quad (2-4)$$

Elevons l'intégrale au carré et servons nous de l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx$$
$$\rightarrow 1 \leq \left(\int (\theta(x) - \theta)^2 p(x|\theta) dx \right) \left(\int \left(\frac{\partial \text{Log}(p)}{\partial \theta} \right)^2 p(x|\theta) dx \right) \quad (2-5)$$

Borne de Cramer Rao (suite)

On remarque alors que:

$$\text{variance de } \theta = \Delta_{\theta}^2 = \int (\theta(x) - \theta)^2 p(x | \theta) dx \quad (2-6)$$

et on obtient l'inégalité de Cramer-Rao:

$$\Delta_{\theta}^2 \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad (2-7)$$

en introduisant la quantité appelée information de Fisher:

$$I(\theta) = \int \left(\frac{\partial \text{Log} p(x | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 p(x | \theta) dx = \left\langle \left(\frac{\partial \text{Log} p(x | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\rangle \quad (2-8)$$

$I(\theta)$ est égale à la valeur moyenne du carré de la dérivée par rapport à θ du logarithme de la fonction de vraisemblance(*). Plus $I(\theta)$ est grand, plus petite est la borne inférieure de la variance de l'estimation, autrement dit plus la loi statistique contient d'information potentielle permettant d'estimer θ . Une **estimation est optimale** si sa variance atteint la borne de Cramer Rao, soit $\Delta_{\theta}^2 = I^{-1}(\theta)$.

(*) On généralise la définition de l'information de Fisher et l'équ.(2-8) au cas où θ est une quantité à plusieurs composantes en introduisant une matrice de Fisher faisant intervenir la valeur moyenne des dérivées secondes de $\text{Log} p(x | \theta)$ par rapport aux composantes de θ . Cette généralisation ne sera pas abordée ici.

Additivité de l'information de Fisher

Mesure de x_i sur N systèmes indépendants obéissant à la même loi statistique:

$$p(x_1 \dots x_i \dots x_N | \theta) = \prod_i p(x_i | \theta) \rightarrow \text{Log}(p(x_1 \dots x_i \dots x_N | \theta)) = \sum_i \text{Log}(p(x_i | \theta)) \quad (2-9)$$

On en déduit l'information de Fisher générée par les N mesures indépendantes:

$$\begin{aligned}
 I_N(\theta) &= \int \left(\frac{\partial \text{Log} p(x_1 \dots x_i \dots x_N)}{\partial \theta} \right)^2 p(x_1 \dots x_i \dots x_N) dx_1 \dots dx_i \dots dx_N && \text{Ce terme} = 0 \\
 &= \sum_i \int \left(\frac{\partial \text{Log} p(x_i)}{\partial \theta} \right)^2 p(x_i) dx_i + \sum_{i \neq j} \int \left(\frac{\partial \text{Log} p(x_i)}{\partial \theta} \right) p(x_i) dx_i \times \int \left(\frac{\partial \text{Log} p(x_j)}{\partial \theta} \right) p(x_j) dx_j && (2-10) \\
 & \quad \left(\text{car } \int \frac{\partial \text{Log} p(x)}{\partial \theta} p(x) dx = \int \frac{\partial p}{\partial \theta} dx = 0 \right)
 \end{aligned}$$

ce qui démontre l'additivité de l'information de Fisher:

$$I_N(\theta) = N I_1(\theta) \quad (2-11)$$

et la dépendance en N de l'écart type de l'estimation optimale:

$$\Delta_N = \frac{\Delta_1}{\sqrt{N}} \quad (2-12)$$

Loi de Bayes et estimation par maximum de vraisemblance

Nous n'avons jusqu'ici fait aucune hypothèse sur la fonction d'estimation $\theta(x)$. Nous allons à présent faire un choix naturel pour cette fonction, justifié par la loi de Bayes sur les probabilités conditionnelles (voir cours 2007-2008). On exprime la probabilité jointe $p(x, \theta)$ de trouver les valeurs x et θ à l'aide des probabilités a priori $p(x)$ et $p(\theta)$ et des probabilités conditionnelles réciproques $p(x|\theta)$ et $p(\theta|x)$:

$$p(x, \theta) = p(x|\theta)p(\theta) = p(\theta|x)p(x)$$
$$\rightarrow p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)}{\int p(x|\theta)p(\theta)d\theta} p(\theta) \quad (2-13)$$

et si on ne sait rien sur θ , on fait l'hypothèse d'une distribution $p(\theta)$ «plate» qui conduit à:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)}{\int p(x|\theta)d\theta} \quad (2-14)$$

La loi de probabilité de θ conditionnée au résultat x est donnée par la fonction de vraisemblance $p(x|\theta)$ normalisée sur θ . L'estimation par maximum de vraisemblance (**Maximum Likelihood** en anglais) revient à choisir la valeur de θ qui maximise $p(\theta|x)$ et donc $p(x|\theta)$. On définit donc $\theta(x)$ par la fonction implicite:

$$\theta_{ML}(x) \Leftrightarrow \text{solution de } \frac{\partial p(x|\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial \text{Log}(p)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_{ML}} = 0 \quad (2-15)$$

L'estimation MaxLik est optimale pour $N \rightarrow \infty$

Effectuons N tirages indépendants de la variable x et estimons par Max Lik le paramètre θ . En développant au 2nd ordre en $(\theta - \theta_{ML})$ le logarithme de la fonction de vraisemblance autour de son maximum, on obtient:

$$\text{Log}(p(x_1, x_2 \dots x_N | \theta)) = \text{Log}(p(x_1, x_2 \dots x_N | \theta_{ML})) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_{ML})^2 \left(\frac{\partial^2 \text{Log}(p(x_1, x_2 \dots x_N | \theta))}{\partial \theta^2} \right)_{\theta = \theta_{ML}} + \dots \quad (2-16)$$

avec:

$$\left[\frac{\partial^2 \text{Log}(p(x_1, x_2 \dots x_N | \theta))}{\partial \theta^2} \right]_{\theta = \theta_{ML}} = \sum_i \left[\frac{\partial^2 \log(p(x_i | \theta))}{\partial \theta^2} \right]_{\theta = \theta_{ML}} \quad (2-17)$$

A la limite où $N \rightarrow \infty$, la somme sur i au second membre de (2-17) tend vers N fois la moyenne sur x , soit:

$$\sum_i \left[\frac{\partial^2 \log(p(x_i | \theta))}{\partial \theta^2} \right]_{\theta = \theta_{ML}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N \int dx p(x | \theta_{ML}) \left[\frac{\partial^2 \log(p(x | \theta))}{\partial \theta^2} \right]_{\theta = \theta_{ML}} \quad (2-18)$$

L'estimation MaxLik pour $N \rightarrow \infty$ (suite)

L'intégrale dans (2-18) s'écrit:

$$\int dx p \frac{\partial^2 \text{Log} p}{\partial \theta^2} = - \int dx \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + \int dx \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = - \int dx p \left(\frac{\partial \text{Log} p}{\partial \theta} \right)^2 dx = -I_1(\theta_{ML}) \quad (2-19)$$

Ce terme=0

où $I_1(\theta_{ML})$ est l'information de Fisher associée à un seul tirage, calculée pour $\theta = \theta_{ML}$.
On en déduit alors d'après (2-16, 2-18 et 2-19):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \text{Log}(p(x_1, x_2, \dots, x_N | \theta)) \} = N \int dx p(x | \theta_{ML}) \text{Log}(p(x | \theta_{ML})) - \frac{NI_1(\theta_{ML})}{2} (\theta - \theta_{ML})^2 + \dots \quad (2-20)$$

On utilise alors la loi de Bayes pour obtenir la loi de probabilité $p(\theta | x_1, x_2, \dots, x_N)$ de θ conditionnée par les mesures x_1, x_2, \dots, x_N . En prenant l'exponentielle des logarithmes et en normalisant l'intégrale de la probabilité à l'unité, on obtient:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p(\theta | x_1, x_2, \dots, x_N) \approx \sqrt{\frac{NI_1(\theta_{ML})}{2\pi}} e^{-\frac{NI_1(\theta_{ML})}{2} (\theta - \theta_{ML})^2} \quad (2-21)$$

C'est une loi Gaussienne, de variance:

$$\Delta_N^2 = \langle (\theta - \theta_{ML})^2 \rangle = \frac{1}{NI_1(\theta_{ML})} \quad (2-22)$$

L'estimateur Max Lik, à la limite des grands N, atteint la limite de Cramer Rao et constitue donc asymptotiquement un estimateur optimal.

Un exemple simple: statistique binomiale

Considérons le cas d'un tirage à « pile ou face », la variable X prenant les valeurs discrètes $x = 0$ ou 1 avec les probabilités p et $q=1-p$ que l'on paramétrise à l'aide d'un angle θ en posant $p=\cos^2(\theta/2)$, $q=\sin^2(\theta/2)$ avec $0 \leq \theta < \pi$. On en déduit:

$$p(0|\theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow \left(\frac{\partial \log p(0|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} ; \quad p(1|\theta) = \sin^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow \left(\frac{\partial \log p(1|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2} \quad (2-23)$$

L'information de Fisher générée par un tirage est alors indépendante de θ :

$$I_1(\theta) = p(0|\theta) \left(\frac{\partial \log p(0|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + p(1|\theta) \left(\frac{\partial \log p(1|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2} = 1 \quad (2-24)$$

L'écart type de l'estimation optimale de θ est donc pour N tirages indépendants :

$$I_N = NI_1 = N \rightarrow \Delta_N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2-25)$$

On en déduit les écarts types correspondants de p et q , et l'écart type de X (dont la valeur moyenne est $\langle X \rangle = q$):

$$\Delta_N(p) = \Delta_N(q) = \Delta_N(X) = \left| \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right| \Delta_N(\theta) = \sqrt{\frac{pq}{N}} \quad (2-26)$$

Cette propriété de la loi binomiale est connue. Le résultat de N tirages donne $\sim Np$ fois 0 et $\sim Nq$ fois 1 avec une fluctuation \sqrt{Npq} . La mesure de X , dont la moyenne est q , est donc bien affectée de la dispersion $\sqrt{Npq}/N = \sqrt{pq/N}$.

II-B.

Estimation de l'état d'un qubit

« Jeu quantique » de l'estimation

Une façon simple d'aborder l'estimation de l'état d'un qubit est de la voir comme un jeu à « donnes » multiples, dont les règles sont les suivantes:

- A chaque « donne », Alice présente à Bob N copies identiques d'un qubit préparé dans un état pur $|\psi\rangle$ inconnu de Bob.
- Bob, en effectuant toutes les mesures qu'il peut concevoir, doit estimer cet état, c'est à dire donner un état pur $|\psi_{(e)}\rangle$ comme résultat de son estimation.
- Le «score» de Bob est défini comme le carré du produit scalaire $|\langle\psi|\psi_{(e)}\rangle|^2$.
- La partie comprend un grand nombre p de « donnes », Alice préparant à chaque fois N copies d'un état $|\psi^i\rangle$ nouveau ($i = 1, \dots, p$) dont le vecteur de Bloch est d'une donne à la suivante, réparti aléatoirement sur la sphère de Bloch.
- A la fin du jeu, le score final de Bob est la moyenne $\sum_i |\langle\psi_{(e)}|\psi^i\rangle|^2 / p$ des scores des p donnes quand $p \rightarrow \infty$.

Les questions simples que posent ce jeu sont:

- Quel est en fonction de N le score final maximum que Bob peut atteindre?
- Quelle stratégie de mesure doit-il utiliser pour y parvenir?

Formaliser le jeu quantique à l'aide de l'opérateur densité

Le formalisme de la matrice densité se cache derrière ce simple jeu. Supposons qu'Alice choisisse aléatoirement les $|\psi_i\rangle$ dans un grand réservoir d'états. Si p est très grand, on peut extraire de la suite de données un sous-ensemble de q données, grand lui aussi, dans lequel Alice a proposé le même état $|\psi\rangle$ à Bob. L'invariance du problème par rotation du qubit fait que la statistique des scores de Bob sur ce sous-ensemble doit être identique à la statistique globale. En regroupant les q estimations $|\psi_{(e,j)}\rangle$ ($j=1$ à q) de Bob pour le même état $|\psi\rangle$, on obtient à la limite de q très grand, par définition, l'opérateur densité par lequel Bob décrit cet état qui lui est a priori inconnu, lorsqu'il peut effectuer sa mesure sur N réalisations du même qubit:

$$\rho_{(e)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q |\psi_{(e,j)}\rangle \langle \psi_{(e,j)}| \right\} \quad (2-27)$$

Et le score de Bob, au sens du jeu quantique, est la fidélité avec laquelle sa matrice densité ainsi construite reproduit l'état initial qu'il a mesuré:

$$F_{(e)} = \langle \psi | \rho_{(e)} | \psi \rangle = \lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q |\langle \psi | \psi_{(e,j)} \rangle|^2 \right\} \quad (2-28)$$

Estimation de l'état d'un qubit donné en un exemplaire (N=1)

Commençons par considérer le cas $N=1$. Le jeu est alors simple pour Bob. Recevant un qubit dont il ne connaît pas l'orientation, il ne peut que choisir au hasard un axe de détection, mesurer le qubit et déclarer que son vecteur de Bloch pointe le long de la direction où il l'a trouvé. Cette stratégie correspond au principe Max Lik. En effet la fonction de vraisemblance est $p(0|\theta)=\cos^2(\theta/2)$ où θ est l'angle de la direction cherchée avec l'axe de mesure Oz . Cette fonction est bien maximum pour $\theta=0$. Si le qubit a été préparé dans l'état de vecteur de Bloch arbitraire \vec{P} (de norme 1), le score de Bob sur cette donne est:

$$S = \frac{1}{2}[1 + P_z] \quad (2-29)$$

et son score partiel, moyenné sur toutes les donnes ou Alice lui a présenté le qubit \vec{P} s'obtient en notant qu'il a la probabilité $[1+P_z]/2$ de faire le score $[1+P_z]/2$ et la probabilité $[1-P_z]/2$ de faire le score $[1-P_z]/2$:

$$S(\vec{P}) = \frac{1}{4}(1 + P_z)^2 + \frac{1}{4}(1 - P_z)^2 = \frac{1}{2} + \frac{P_z^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} \quad (2-30)$$

En moyennant sur toutes les directions de \vec{P} , on obtient donc le **score final**:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi} \iint \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad (2-31)$$

Nous verrons que $S=2/3$ est bien le score maximum possible pour $N=1$.

Estimation de l'état de N=2 qubits

La première idée qui vient pour maximiser l'information extraite du système de 2 qubits A,B est de les mesurer indépendamment, dans 2 directions orthogonales (σ_z et σ_x par exemple). Les 2 bits d'information classique obtenus (couples de valeurs propres 1,1; 1,-1; -1,1;-1,-1 des mesures de σ_z et σ_x sur A et B respectivement) conduisent à l'attribution suivante par Max Lik pour l'état $|\psi_{(e)}\rangle$:

valeurs propres σ_z σ_x		probabilité
1 1	$\rightarrow \psi_{(e)}\rangle\langle\psi_{(e)} = \frac{1}{2} \left[I + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_z + \sigma_x) \right]$	$(1 + P_z)(1 + P_x) / 4$
1 -1	$\rightarrow \psi_{(e)}\rangle\langle\psi_{(e)} = \frac{1}{2} \left[I + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_z - \sigma_x) \right]$	$(1 + P_z)(1 - P_x) / 4$
-1 1	$\rightarrow \psi_{(e)}\rangle\langle\psi_{(e)} = \frac{1}{2} \left[I + \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sigma_z + \sigma_x) \right]$	$(1 - P_z)(1 + P_x) / 4$
-1 -1	$\rightarrow \psi_{(e)}\rangle\langle\psi_{(e)} = \frac{1}{2} \left[I + \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sigma_z - \sigma_x) \right]$	$(1 - P_z)(1 - P_x) / 4$
		(2 - 32)

Dans la colonne de droite, nous indiquons les probabilités d'obtenir chaque couple de valeurs propres pour l'état pur ($|\mathbf{P}|=1$) de vecteur de Bloch \vec{P} (P_x, P_y, P_z).

Estimation de l'état de N=2 qubits (suite)

L'opérateur densité $\rho_{(e)}(\vec{P})$ décrivant l'estimation moyenne par Bob de l'état $|\psi\rangle$ de vecteur de Bloch \vec{P} s'obtient en pondérant les projecteurs (2-32) par les probabilités correspondantes. Après un remaniement simple on obtient:

$$\rho_{(e)}(\vec{P}) = \frac{1}{2} \left[I + \frac{P_z \sigma_z}{\sqrt{2}} + \frac{P_x \sigma_x}{\sqrt{2}} \right] \quad (2-33)$$

et le score:

$$S_2(\vec{P}) = \langle \psi | \rho_{(e)}(\vec{P}) | \psi \rangle = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{P_z^2 + P_x^2}{\sqrt{2}} \right] \quad (2-34)$$

La moyenne angulaire sur toutes les directions du vecteur de Bloch est, par symétrie, la même pour les composantes correspondant aux directions Oz et Ox:

$$\iint P_x^2 d\Omega = \iint P_z^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3} \quad (2-35)$$

d'où:

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} = 0,735.. \quad (2-36)$$

Nous estimons ainsi l'état sur un échantillon de 2 qubits avec une fidélité supérieure à celle d'un seul qubit (pour lequel on avait $S=2/3$). Nous verrons que la limite du score pour N qubits est $(N+1)/(N+2)$, soit 0.75 pour N=2. Pour atteindre cette limite, il faut comme nous le montrerons utiliser une méthode plus subtile.

Estimation par mesures indépendantes de l'état de N=3 qubits

Avec deux mesures projectives indépendantes sur 2 qubits identiques, on ne peut sonder que 2 directions, donc seulement un plan de l'espace de Bloch, sans aucune information sur la composante du vecteur de Bloch hors de ce plan. Nous verrons qu'on peut obtenir plus d'information sur les 3 directions de l'espace, même si l'on ne dispose que de 2 qubits, en effectuant une mesure collective. Mais avant de décrire cette méthode, poussons un cran plus loin la stratégie d'estimation à l'aide de mesures projectives indépendantes en envisageant le cas N=3. Nous avons alors 3 copies, ce qui permet de sonder l'état dans les directions Ox, Oy et Oz. Généralisant le résultat N=2, on montre sans difficulté que l'opérateur densité décrivant l'estimation est:

$$\rho_{(e)}(\vec{P}) = \frac{1}{2} \left[I + \frac{P_x \sigma_x + P_y \sigma_y + P_z \sigma_z}{\sqrt{3}} \right] \quad (2-37)$$

correspondant au score:

$$S_3(\vec{P}) = \langle \psi | \rho_{(e)}(\vec{P}) | \psi \rangle = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{\sqrt{3}} \right] \quad (2-38)$$

et à la moyenne:

$$\bar{S}_3 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,788.. < \frac{N+1}{N+2} = \frac{4}{5} \quad (2-39)$$

Estimation tomographique ($N \rightarrow \infty$)

Généralisons la méthode de mesure indépendante de N qubits dans 3 directions orthogonales pour N grand, en effectuant $N/3$ mesures dans chaque direction. On tend ainsi vers la mesure tomographique standard qui consiste à mesurer la moyenne statistique du qubit le long des axes Ox , Oy et Oz pour reconstruire l'état. Les fréquences mesurées des valeurs propres $+1$ et -1 de σ_x , σ_y et σ_z présentent des écarts type en $1/\sqrt{N}$ par rapport aux moyennes idéales. Estimons la composante P_z du vecteur de Bloch en utilisant les fréquences mesurées et en appliquant le principe **Max Lik**. La mesure de σ_z donnant n_+ résultats $+1$ et $n_- = (N/3) - n_+$ résultats -1 correspond à une fonction de vraisemblance maximale pour $P_z^{(e)} = \cos \theta = (n_+ - n_-) / (n_+ + n_-) = (6n_+ / N) - 1$. La fonction de vraisemblance de ce résultat est en effet, à un préfacteur combinatoire indépendant de θ près, donnée par:

$$p(n_+, n_- | \theta) \propto \cos^{2n_+} \frac{\theta}{2} \sin^{2n_-} \frac{\theta}{2} \quad (2-40)$$

et le maximum de vraisemblance est obtenu pour:

$$\frac{dp(n_+, n_- | \theta)}{d\theta} \approx \cos^{(2n_+ - 1)} \frac{\theta}{2} \sin^{(2n_- - 1)} \frac{\theta}{2} \left[n_- \cos^2 \frac{\theta}{2} - n_+ \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = 0 \quad (2-41)$$

soit:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{n_-}{n_+} \quad \rightarrow \quad P_z^{(e)} = \cos \theta = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-} = \frac{6n_+}{N} - 1 \quad (2-42)$$

Les composantes $P_x^{(e)}$ et $P_y^{(e)}$ sont estimées de la même façon à partir des fréquences mesurées des valeurs propres $+1$ et -1 de σ_x et σ_y .

Estimation tomographique (suite)

Les valeurs estimées diffèrent légèrement des valeurs exactes P_i et s'écrivent $P_i^{(e)} = P_i + \delta P_i$ avec $\sum_i P_i^2 = 1$. Le projecteur sur l'état estimé $|\psi_{(e)}\rangle$ est:

$$|\psi_{(e)}\rangle\langle\psi_{(e)}| = \frac{1}{2} \left[I + \frac{\sum_i (P_i + \delta P_i) \sigma_i}{\sqrt{\sum_i (P_i + \delta P_i)^2}} \right] \quad (2-43)$$

La normalisation du vecteur de Bloch est imposée par la règle de l'estimation: le fait que l'état inconnu est un cas pur est exploité pour normaliser le vecteur de Bloch estimé. Cette règle est peu réaliste dans une situation expérimentale. Nous la suivons ici pour analyser la limite de l'estimation imposée par la théorie. Notons que même si Bob ne savait pas que le qubit qu'il mesure est un cas pur, il devrait de toute façon imposer la condition $\sum_i P_i^2 \leq 1$ pour éviter que $\rho_{(e)}$ n'ait une valeur propre négative, ce qui peut arriver en absence de normalisation en raison des fluctuations indépendantes des mesures selon O_x, O_y et O_z . La fidélité de l'estimation s'obtient en utilisant la formule (1-7):

$$S = |\langle\psi|\psi_{(e)}\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sum_i P_i \cdot (P_i + \delta P_i)}{\sqrt{\sum_i (P_i + \delta P_i)^2}} \right] \quad (2-44)$$

Estimation tomographique (suite)

Un développement limité au second ordre en δP_i donne, compte tenu de $\sum_i P_i^2 = 1$:

$$S \approx 1 - \frac{1}{4} \sum_i (1 - P_i^2) \delta P_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} P_i P_j \delta P_i \delta P_j \quad (2-45)$$

Il faut ensuite moyenner les fluctuations sur un grand nombre de réalisations de l'estimation, pour le même vecteur \vec{P} . Les fluctuations $i \neq j$ étant non corrélées, le dernier terme de (2-45) se moyenne à zéro. Il reste à évaluer les valeurs moyennes $\langle \delta P_i^2 \rangle$. Calculons par exemple $\langle \delta P_z^2 \rangle = 36 \langle \delta n_+^2 \rangle / N^2$. La probabilité de trouver le résultat +1 en mesurant σ_z est $p = \cos^2 \theta / 2 = (1 + \cos \theta) / 2 = (1 + P_z) / 2$ et la probabilité de trouver le résultat -1 est $q = 1 - p = (1 - P_z) / 2$. La variance de n_+ est donnée par la loi binomiale:

$$\langle \delta n_+^2 \rangle = \frac{N}{3} p(1 - p) = \frac{N}{12} (1 - P_z^2) \quad \rightarrow \quad \langle \delta P_z^2 \rangle = \frac{3}{N} (1 - P_z^2) \quad (2-46)$$

D'où par symétrie:

$$\langle S \rangle \approx 1 - \frac{3}{4N} \sum_i (1 - P_i^2)^2 \quad (2-47)$$

Il faut enfin moyenner sur l'orientation de \vec{P} , les 3 intégrales angulaires étant égales:

$$\bar{S} = 1 - \frac{9}{8N} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta + \dots = 1 - \frac{6}{5N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad \left(\left\langle \frac{N+1}{N+2} \right\rangle \approx 1 - \frac{1}{N} \right) \quad (2-48)$$

Comme on s'y attend, $S \rightarrow 1$ pour $N \rightarrow \infty$. Notons cependant que S reste inférieure à $(N+1)/(N+2)$, la fidélité optimale conjecturée.

Conclusion sur les mesures indépendantes de N qubits

Nous avons montré que l'estimation de l'état d'un qubit par mesures indépendantes de N échantillons obéissant au principe de maximum de vraisemblance permet d'inférer sa direction sur la sphère de Bloch avec une précision angulaire en $1/\sqrt{N}$ et une fidélité qui tend asymptotiquement vers l'unité, en différant par un terme en $6/5N$. Cette fidélité reste théoriquement inférieure à la valeur $(N+1)/(N+2) \sim 1 - 1/N$, que nous verrons être la limite théorique imposée par les incertitudes quantiques.

Massar et Popescu ont montré par un argument variationnel (voir référence plus loin) que toute mesure basée sur une détection successive des N qubits ne peut atteindre cette limite. Il faut, pour réaliser cette évaluation optimale, opérer de façon collective sur les N qubits. Suivant les arguments de Massar et Popescu, nous allons le montrer d'abord dans le cas $N=2$, puis généraliser au cas de N quelconque en procédant en deux temps:

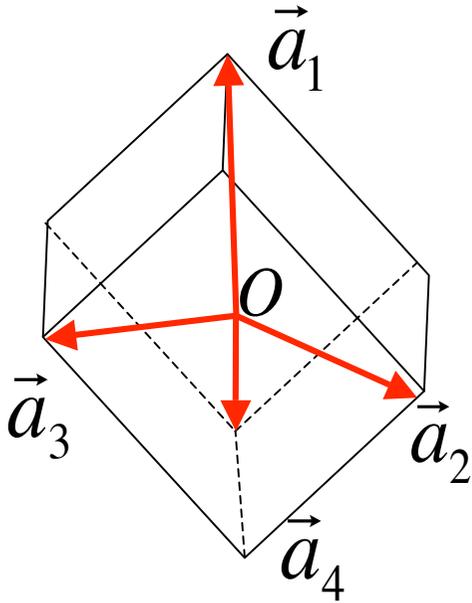
- Nous commencerons par décrire une procédure de mesure collective atteignant la limite $(N+1)/(N+2)$.
- Nous montrerons ensuite qu'il est impossible de la dépasser.

II-C.

Estimation optimale d'un qubit par mesure collective

Cette partie est inspirée de l'article « Optimal extraction of information from finite quantum ensembles », S. Massar et S. Popescu, Phys.Rev.Lett. 74, 1259 (1995).

Estimation optimale de deux qubits



Considérons les 4 vecteurs a_i pointant vers les sommets d'un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère de Bloch, auxquels on associe les kets $|\psi_i\rangle$:

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= -i|0\rangle & ; & \quad |\psi_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \\
 |\psi_3\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + e^{2i\pi/3}\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle & ; & \quad |\psi_4\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + e^{4i\pi/3}\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \quad (2-49)
 \end{aligned}$$

avec:

$$\langle \psi_i | \psi_i \rangle = 1 \quad ; \quad \langle \psi_i | \psi_j \rangle = \varepsilon \frac{i}{\sqrt{3}} \quad (\text{si } i \neq j ; \varepsilon = \pm 1) \quad (2-50)$$

En combinant des produits tensoriels de ces états avec l'état singlet de Bell, on construit une base de quatre états dans l'espace des deux qubits, dont il est facile de vérifier l'orthonormalité:

$$|\mu_i\rangle = \frac{1}{2} |\Phi_{Bell}^- \rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |\psi_i, \psi_i\rangle \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2-51)$$

avec :

$$|\Phi_{Bell}^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle - |1,0\rangle) \quad ; \quad \langle \psi_i, \psi_i | \Phi_{Bell}^- \rangle = 0 \quad (2-52)$$

Estimation optimale de deux qubits (suite)

La base $\{|\mu_i\rangle\}$ définit une observable collective des deux qubits. Calculons la probabilité π_i pour que l'ensemble des deux qubits, chacun décrit par le vecteur de Bloch \vec{P} et le ket $|\varphi\rangle$ et préparés collectivement dans l'état produit tensoriel $|\varphi,\varphi\rangle$, soit projeté dans l'état $|\mu_i\rangle$ après la mesure de cette observable (notons que l'état $|\varphi,\varphi\rangle$, symétrique par échange des qubits, est orthogonal à la composante des $|\mu_i\rangle$ sur l'état de Bell antisymétrique). :

$$\pi_i = \langle \mu_i | \varphi, \varphi \rangle \langle \varphi, \varphi | \mu_i \rangle = \frac{3}{4} \left(\langle \psi_i | \varphi \rangle \langle \varphi | \psi_i \rangle \right)^2 = \frac{3}{4} |\langle \psi_i | \varphi \rangle|^4 = \frac{3}{16} (1 + \vec{a}_i \cdot \vec{P})^2 \quad (2-53)$$

Dans le cas où le résultat de la mesure collective est i , l'estimation du qubit est $|\psi_i\rangle$. On décrit donc l'estimation moyenne de l'état de vecteur de Bloch \vec{P} par l'opérateur densité:

$$\rho_{(e)}(\vec{P}) = \frac{3}{32} \sum_i [1 + \vec{a}_i \cdot \vec{P}]^2 [I + \vec{a}_i \cdot \vec{\sigma}] \quad (2-54)$$

avec la fidélité :

$$S_2(\vec{P}) = \frac{3}{32} \sum_i [1 + \vec{a}_i \cdot \vec{P}]^3 \quad (2-55)$$

Il reste à moyenner sur l'orientation de \vec{P} , ce qui donne quatre termes égaux

$$\bar{S}_2 = \frac{3}{8} \iint (1 + \vec{a}_1 \cdot \vec{P})^3 d\Omega = \frac{3}{8} \iint (1 + \cos\theta)^3 d\Omega = \frac{3}{16} \int_0^\pi (1 + \cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = \frac{3}{4} \quad (2-56)$$

La mesure collective, plus efficace que la mesure tomographique, conduit ainsi pour $N = 2$ à la limite $(N+1)/(N+2)=0.75$. Nous allons généraliser à présent au cas $N > 2$.

Estimation optimale de N qubits par POVM

Considérons un ensemble de N qubits, tous dans l'état de vecteur de Bloch pointant dans la direction θ_0, φ_0 . L'ensemble est dans l'état cohérent $|N_{\theta_0\varphi_0}\rangle$ (voir leçon 1), qui appartient à l'espace Σ_N des états de N qubits symétriques par échange. Appliquons à ce système le **POVM** dont les éléments sont (voir leçon 1):

$$E_{\theta,\varphi} = (N+1) |N_{\theta,\varphi}\rangle\langle N_{\theta,\varphi}| \quad (2-57)$$

Rappelons que ce POVM est «réalisable» en couplant le moment angulaire collectif à une particule ponctuelle localisée sur une sphère dont la position «image» celle de l'extrémité du vecteur associé à ce moment angulaire. Si on trouve le résultat (θ, φ) on estime que le qubit est dans l'état dont le vecteur de Bloch admet ces coordonnées angulaires. La densité de probabilité de trouver le résultat (θ, φ) est:

$$p(\theta, \varphi) = \langle N_{\theta_0, \varphi_0} | E_{\theta, \varphi} | N_{\theta_0, \varphi_0} \rangle = (N+1) \left| \langle N_{\theta_0, \varphi_0} | N_{\theta, \varphi} \rangle \right|^2 = (N+1) \cos^{2N} \frac{\alpha}{2} \quad (2-58)$$

où α est l'angle entre les directions θ_0, φ_0 et θ, φ . Le score correspondant à cette estimation est égal à $\cos^2(\alpha/2)$. On obtient la fidélité moyenne en pondérant le score par sa probabilité et en sommant sur α . L'invariance par rotation nous permet de définir la direction de θ_0, φ_0 comme l'axe Oz, d'où:

$$S = (N+1) \iint d\Omega \cos^{2(N+1)} \frac{\theta}{2} = \frac{N+1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{N+1} \sin\theta d\theta = \frac{N+1}{N+2} \quad (2-59)$$

Il y a pour tout N une «expérience de pensée» permettant, par mesure POVM collective, d'atteindre la fidélité $(N+1)/(N+2)$. Nous montrons plus loin que cette limite ne peut être dépassée.

Estimation optimale moyenne

Avant de démontrer que cette méthode par POVM collectif ne peut être améliorée, donnons l'expression de l'opérateur densité associé à la moyenne de cette estimation pour un qubit. Si le qubit est dans l'état $|0\rangle$, l'équation (2-58) nous indique que la moyenne de l'estimation est décrite par:

$$\begin{aligned} \rho_e &= (N+1) \iint d\Omega \cos^{2N} \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |1\rangle \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \langle 0| + \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \langle 1| \right) \\ &= (N+1) \iint d\Omega \cos^{2N+2} \left(\frac{\theta}{2} \right) |0\rangle \langle 0| + (N+1) \iint d\Omega \cos^{2N} \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) |1\rangle \langle 1| \\ &= \frac{N+1}{N+2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{N+2} |1\rangle \langle 1| = \frac{N}{N+2} |0\rangle \langle 0| + \frac{2}{N+2} \frac{I}{2} \quad (2-60) \end{aligned}$$

L'invariance par rotation permet d'en déduire l'estimation d'un qubit dans un état pur $|\psi\rangle$ de vecteur de Bloch \vec{P} qui conduit, en moyenne sur un grand nombre d'essais, à un opérateur densité de vecteur de Bloch «rétréci» par $\eta = N/(N+2)$:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \langle \psi| &= \frac{1}{2} [1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}] \\ &\xrightarrow{\text{estimation optimale moyenne}} \\ \rho_e^{|\psi\rangle} &= \eta |\psi\rangle \langle \psi| + (1-\eta) \frac{I}{2} = \frac{1}{2} [1 + \eta \vec{P} \cdot \vec{\sigma}] \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{N}{N+2} \quad (2-61) \end{aligned}$$

Nous retrouverons une formule analogue dans la prochaine leçon traitant du clonage optimal et nous discuterons de la relation entre estimation et clonage.

Démonstration de la limite de fidélité

L'opération de mesure la plus générale fait évoluer unitairement le produit tensoriel d'un état de Σ_N par l'état d'un «mètre» M représenté dans une base $|e_\xi\rangle$. L'état final des N qubits n'est pas nécessairement restreint à Σ_N et se développe en toute généralité sur une base $|f\rangle$ de 2^N états. On décrira donc l'effet de la première étape de la mesure sur un état de Dicke de Σ_N sous la forme générale (où les états de M sont indicés par cette lettre et $|e_0\rangle$ est son état initial « neutre »):

$$|m\rangle \otimes |e_0\rangle_M \rightarrow |\Psi_m\rangle = \sum_{f=1}^{f=2^N} |f\rangle \otimes |\psi_f^m\rangle_M \quad ; \quad |\psi_f^m\rangle_M = \sum_{\xi} |e_\xi\rangle \langle e_\xi | \psi_f^m \rangle_M \quad (2-62)$$

Cette mesure appliquée au produit tensoriel de N qubits dans l'état θ, φ donne donc:

$$|N_{\theta, \varphi}\rangle \otimes |e_0\rangle_M \rightarrow \sum_m |\Psi_m\rangle \langle m | N_{\theta, \varphi} \rangle = \sum_m \langle m | N_{\theta, \varphi} \rangle \sum_{f=1}^{f=2^N} |f\rangle \otimes |\psi_f^m\rangle_M \quad (2-63)$$

La densité de probabilité de trouver M dans $|e_\xi\rangle$ est:

$$P(\theta, \varphi; \xi) = \sum_{m, m'} \langle N_{\theta, \varphi} | m \rangle_M \langle \psi_f^m | e_\xi \rangle \langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle_M \langle m' | N_{\theta, \varphi} \rangle \quad (2-64)$$

Une fois ce résultat obtenu, il faut choisir une fonction d'estimation pour laquelle on calcule un score qui doit être moyenné sur la densité de probabilité:

$$\xi \rightarrow \theta_\xi, \varphi_\xi \rightarrow S(\theta, \varphi; \theta_\xi, \varphi_\xi) = \cos^2 \left(\frac{\alpha(\theta, \varphi; \theta_\xi, \varphi_\xi)}{2} \right) \rightarrow S_{\theta, \varphi} = \sum_{\xi} P(\theta, \varphi; \xi) S(\theta, \varphi; \theta_\xi, \varphi_\xi) \quad (2-65)$$

Limite de fidélité (suite)

Il reste enfin une moyenne à faire sur θ, φ :

$$S = \frac{1}{4\pi} \iint S_{\theta, \varphi} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2 - 66)$$

Il nous faut trouver la borne de S imposée par les contraintes liées à l'**unitarité** de l'opération de mesure. Cette unitarité demande, de façon nécessaire et suffisante:

$$\langle \Psi_m | \Psi_{m'} \rangle = \delta_{m, m'} = \sum_{\xi} \sum_f \langle \psi_f^m | e_{\xi} \rangle \langle e_{\xi} | \psi_f^{m'} \rangle \quad (2 - 67)$$

ce qui entraîne la condition nécessaire:

$$G = \sum_m \langle \Psi_m | \Psi_m \rangle = \sum_m \sum_f \sum_{\xi} \langle \psi_f^m | e_{\xi} \rangle \langle e_{\xi} | \psi_f^m \rangle = N + 1 \quad (2 - 68)$$

On cherche le maximum de S compte tenu de la contrainte nécessaire, ce qui donnera une **borne supérieure** à la fidélité. On introduit un multiplicateur de Lagrange λ et on cherche la valeur de λ pour laquelle $S - \lambda G$ considérée comme une fonction des variables indépendantes $\langle \psi_f^m | e_{\xi} \rangle$ présente un extremum:

$$\delta S - \lambda \delta G = 0 \quad (2 - 69)$$

Limite de fidélité (suite)

En différentiant par rapport à $\langle \psi_f^m | e_\xi \rangle$, on obtient un système de N+1 équations aux coefficients indépendants de f:

$$\sum_{m'} \langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle [M_{m'm}(\theta_\xi, \varphi_\xi) - \lambda \delta_{m'm}] = 0 \quad (2-70)$$

en définissant l'opérateur $M(\theta_\xi, \varphi_\xi)$ de Σ_N :

$$M(\theta_\xi, \varphi_\xi) = \frac{1}{4\pi} \iint \sin \theta d\theta d\varphi |N_{\theta,\varphi}\rangle \langle N_{\theta,\varphi}| S(\theta, \varphi; \theta_\xi, \varphi_\xi) \quad (2-71)$$

Le système (2-70) de N+1 équations détermine les variables $\langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle$. En multipliant la m^{ème} équation par $\langle \psi_f^m | e_\xi \rangle$ et en ajoutant les N+1 équations, sommées sur f et ξ , on obtient, compte tenu de (2-64), (2-66) et (2-68):

$$S = \lambda(N+1) \quad (2-72)$$

Les eqs. (2-70) n'admettent une solution non triviale (différente de $\langle e_\xi | \psi_f^{m'} \rangle = 0$ pour tous les m') que si λ est une des valeurs propres de M. Pour trouver le spectre de M, on lui applique la rotation qui amène la direction θ_ξ, φ_ξ sur Oz. Cela revient à un changement d'axes qui ne modifie pas les valeurs propres de M qui devient:

$$M(\theta_\xi = 0) = \frac{1}{4\pi} \iint \sin \theta d\theta d\varphi \cos^2 \frac{\theta}{2} |N_{\theta,\varphi}\rangle \langle N_{\theta,\varphi}| \quad (2-73)$$

$M(\theta_\xi=0)$ se calcule simplement dans la base de Dicke $\{|m\rangle\}$ à partir de (1-14). Il est diagonal avec les valeurs propres:

$$\lambda_m = \frac{1}{2} \frac{N!}{(N/2+m)!(N/2-m)!} \int \sin \theta d\theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{N}{2}+m} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{N}{2}-m} \quad (2-74)$$

Limite de fidélité (conclusion)

Le calcul explicite de ces valeurs propres donne:

$$\lambda_m = \frac{N!}{(N/2 + m)!(N/2 - m)!} \int_0^1 x^{\binom{N}{2} + m + 1} (1-x)^{\binom{N}{2} - m} dx \quad ; \quad (x = \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad (2-75)$$

soit:

$$\lambda_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N+2} \quad ; \quad \text{récurrence : } \lambda_{m-1} = \frac{\frac{N}{2} + m}{\frac{N}{2} + m + 1} \lambda_m \rightarrow \lambda_m = \frac{\frac{N}{2} + m + 1}{(N+1)(N+2)} \quad (2-76)$$

La plus grande valeur propre est $\lambda_{N/2} = 1/(N+2)$ et la fidélité de l'estimation de l'état des N qubits doit donc être inférieure ou égale à $(N+1)/(N+2)$. Nous avons explicitement construit un modèle de mesure qui atteint cette limite, qui est donc bien la fidélité optimale.

Cette limite ne peut être atteinte que par une mesure sur les N qubits considérés comme un ensemble, et non par une succession de mesures individuelles(*). En ce sens, l'ensemble apparaît comme «plus» que la somme de ses parties puisqu'on peut apprendre davantage sur le système vu comme un tout (sur un problème d'estimation analogue, voir A.Peres et W.K.Wootters, «Optimal detection of quantum information », (Phys.Rev.Lett. 66, 1119 (1991)).

(*)Pour une démonstration rigoureuse de ce résultat, voir S.Massar et S.Popescu, article cité plus haut.