

Physique quantique

Cours 2009-2010: Troisième Leçon

1^{er} Février 2010

Contrairement à l'information classique, l'information codée dans l'état d'un système quantique ne peut être clonée de façon exacte (*Wootters et Zurek, Nature, 299, 802 (1982)*). Cette impossibilité est liée à la nature même du concept statistique d'état quantique. Un clonage approché de qubits (réalisé par exemple par un circuit logique) est cependant possible (« *Quantum copying: beyond the no-cloning theorem* » V.Buzek et M.Hillery, *Phys.Rev.A 54, 1844 (1996)*). Sous sa forme la plus simple, ce clonage copie approximativement l'état d'un qubit sur un autre, donnant deux qubits partageant l'information quantique symétriquement, chacun étant décrit par un opérateur densité reproduisant avec une fidélité optimale l'état initial.

Dans cette leçon, nous abordons l'étude du clonage approché. Nous commençons (&III-A) par analyser les raisons de l'impossibilité du clonage exact, en contradiction avec le principe de superposition et qui conduirait à la possibilité de communication super-luminale. Nous décrivons ensuite (&III-B) le clonage approché universel optimal. Il peut être réalisé à l'aide d'un circuit logique combinant des portes CNOT à deux qubits et des rotations individuelles de qubits. Nous montrons que ce clonage atteint la fidélité $F=5/6$, supérieure à celle d'estimation d'un qubit ($S=2/3$). Nous analysons cette différence et montrons qu'une stratégie d'estimation d'un qubit basée sur le clonage reste dans les limites permises par la théorie de l'estimation. Pour approfondir cette leçon et la suivante, voir « *Quantum Cloning* », V.Scarani, S.Iblisdir, N.Gisin et A.Acin, *Rev. Mod. Phys. 77, 1225 (2005)* et refs in.

III-A

Impossibilité du clonage parfait et généralités sur le clonage «approché»



Clonage parfait et propagation instantanée d'information

Envisageons une expérience EPR dans laquelle Alice et Bob partagent une paire de qubits dans l'état que l'on peut développer sur deux bases différentes:

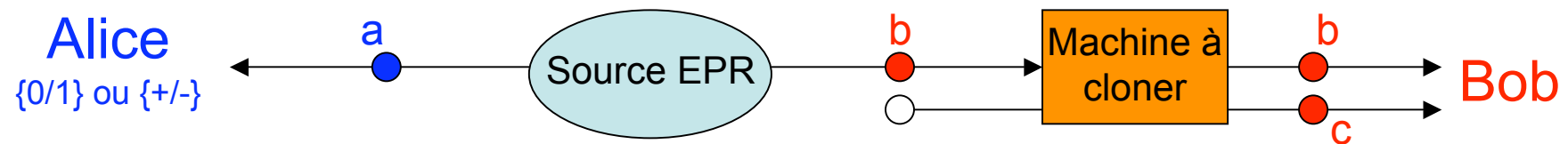
$$|\Psi\rangle_{ab} = \frac{|01\rangle_{ab} - |10\rangle_{ab}}{\sqrt{2}} = \frac{|+,-\rangle_{ab} - |-,+\rangle_{ab}}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad |\pm\rangle = \pm \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3-1)$$

Pour essayer de transmettre de l'information à Bob (*un bit classique 0 ou 1*), Alice peut décider de mesurer son qubit **a** soit dans la base 0/1 (envoi d'un bit classique = 0), soit dans la base +/- (envoi d'un bit classique = 1). Suivant la mesure effectuée, Bob aura dans son laboratoire soit un état de la forme $\{|0\rangle/|1\rangle$ soit un état de la forme $\{|+\rangle/|-\rangle$. Mais, tant qu'il ignore le résultat de la mesure d'Alice, sa connaissance se réduit à celle de l'opérateur densité du qubit **b** qui peut s'écrire sous deux formes équivalentes:

$$\rho_b = \text{Tr}_a \{ |\Psi\rangle_{ab} \langle\Psi| \} = \frac{1}{2} (|0\rangle_b \langle 0| + |1\rangle_b \langle 1|) = \frac{1}{2} (|+\rangle_b \langle +| + |-\rangle_b \langle -|) \quad (3-2)$$

Rien ne lui permettant de privilégier une de ces deux formes, il n'a aucune information sur le choix de base de mesure d'Alice, donc sur le bit classique qu'elle a cherché à transmettre. On constate ainsi que bien que les corrélations quantiques EPR soient instantanées, elles ne peuvent être utilisées pour transmettre des messages (sans canal classique), ce qui violerait la causalité. Qu'en serait-il si Bob pouvait disposer d'une machine à cloner parfaite?

Clonage et propagation d'information (suite)



Muni d'une telle machine, Bob copierait son qubit (**b**) sur un autre qubit (**c**) et obtiendrait deux copies dans les états $|0\rangle_b |0\rangle_c$ ou $|1\rangle_b |1\rangle_c$ si Alice a mesuré le qubit **a** dans la base $\{0/1\}$, dans les états $|+\rangle_b |+\rangle_c$ ou $|-\rangle_b |-\rangle_c$ si Alice a mesuré **a** dans la base $\{+/-\}$. Ainsi, selon ce qu'a fait Alice, les clones de Bob seront décrits soit par:

$$\rho_{bc}^0 = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)_{bc} \quad (3-3)$$

soit par:

$$\rho_{bc}^1 = \frac{1}{2} (|++\rangle\langle ++| + |--\rangle\langle --|)_{bc} \quad (3-4)$$

Ces opérateurs sont différents. On a par exemple:

$$\langle 01 | \rho_{bc}^0 | 01 \rangle = 0 \quad ; \quad \langle 01 | \rho_{bc}^1 | 01 \rangle = \frac{1}{2} \left[|\langle 01 | ++ \rangle|^2 + |\langle 01 | -- \rangle|^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \quad (3-5)$$

En effectuant des mesures sur $\{b, c\}$, Bob aurait la possibilité de savoir quelle mesure Alice a faite, ce qui violerait la causalité. Noter que cloner simplement deux états orthogonaux (0 et 1 ou + et -) ne serait pas suffisant. Il faut, pour violer la causalité, avoir une machine à cloner **dans les deux bases**, dont nous allons montrer l'impossibilité à partir d'un argument sur la linéarité des lois quantiques.

La linéarité de la théorie quantique interdit le clonage parfait d'un qubit arbitraire

Imaginons une machine à cloner décrite par son état quantique $|M\rangle$ et supposons qu'elle clone parfaitement les états 0 et 1 d'un qubit a sur l'état d'un second qubit b:

$$\begin{aligned} |0\rangle_a |0\rangle_b |M\rangle &\rightarrow |0\rangle_a |0\rangle_b |M(0)\rangle \\ |1\rangle_a |0\rangle_b |M\rangle &\rightarrow |1\rangle_a |1\rangle_b |M(1)\rangle \quad (3-6) \end{aligned}$$

On considère, sans perte de généralité, que l'état « blanc » du qubit b est 0. Pour que la copie soit parfaite, il faut que les qubits, initialement dans des états purs, le restent et donc que la machine ne soit pas intriquée avec les copies après le clonage. L'état final de la machine peut par contre dépendre de l'état cloné (0 ou 1).

Utilisons la même machine pour essayer de cloner une superposition d'états $|\psi\rangle_a = \alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a$. Par linéarité on obtient:

$$(\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) |0\rangle_b |M\rangle \rightarrow |\Psi_{a,b,M}\rangle = \alpha|0\rangle_a |0\rangle_b |M(0)\rangle + \beta|1\rangle_a |1\rangle_b |M(1)\rangle \quad (3-7)$$

En traçant sur l'état de l'autre qubit et de la machine, on voit que l'état final de chaque qubit a et b est décrit par le même opérateur densité:

$$\rho_i = \text{Tr}_{j \neq i, M} [|\Psi_{a,b,M}\rangle \langle \Psi_{a,b,M}|] = |\alpha|^2 |0\rangle_i \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle_i \langle 1| \quad (i, j = a, b) \quad (3-8)$$

qui est en général (pour $|\alpha|, |\beta| \neq 0, 1$) différent de l'état initial du qubit a.

Clonage approché et intrication

L'impossibilité du clonage parfait est liée à l'intrication entre le qubit et sa copie généralement induite par la machine. Les deux qubits étant intriqués (sauf pour $|\alpha| = 0$ ou 1), l'état de chaque qubit devient un mélange et est donc nécessairement différent de l'état pur initial.

On définit la fidélité de la copie en calculant le recouvrement de l'état copié avec l'état initial:

$$F = {}_a \langle \psi | \rho_i | \psi \rangle_a = |\alpha|^4 + |\beta|^4 < 1 \quad (\text{si } |\alpha|, |\beta| \neq 0, 1) \quad (3-9)$$

La machine qui clone parfaitement les états orthogonaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ détruit complètement les cohérences entre ces états. Pour une superposition symétrique ($|\alpha| = |\beta| = 1/\sqrt{2}$), on a $F = 1/2$, ce qui correspond à une perte totale d'information. Les deux qubits a et b se retrouvent alors dans un état de vecteur de Bloch $P=0$, complètement dépolarisé.

La machine envisagée ici, qui clone 1 qubit dans 2 a une fidélité qui dépend de l'état à cloner. Elle est par ailleurs symétrique, les deux qubits étant dans le même état final. Nous nous limiterons dans la suite à l'étude de machines **symétriques**. Dans le cas où la fidélité du clonage est la même pour tous les états, on dira que la machine est **universelle**. On appellera machine **optimale** une machine universelle qui réalise pour tous les états la fidélité la plus proche de 1 compatible avec les lois quantiques.

Clonage approché par la mesure

La machine clonant parfaitement $|0\rangle$ et $|1\rangle$ est en fait un appareil de mesure: l'ensemble $\{b, M\}$ est un «mètre» évoluant dans 2 états orthogonaux ($|0, M(0)\rangle$ et $|1, M(1)\rangle$) suivant l'état (0 ou 1) du qubit à cloner. Cette remarque montre que le clonage approché de l'état $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ équivaut à la mesure du qubit dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ suivie de la préparation d'un second qubit dans l'état résultat de la mesure. Si le qubit se trouve dans un des états de base $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, le clonage est parfait. Dans le cas général, la procédure donne avec les probabilités $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ les états $|0, 0\rangle_{ab}$ et $|1, 1\rangle_{ab}$. Statistiquement, chaque qubit est décrit par l'opérateur densité:

$$\rho = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1| \quad (3-10)$$

et on retrouve le résultat décrit par l'eq.(3-8). Vue ainsi, l'impossibilité du clonage parfait apparaît comme une conséquence de l'impossibilité pour un appareil de mesurer des grandeurs complémentaires.

Ce clonage approché par la mesure n'est pas universel. Sa fidélité varie entre 1 et 1/2 suivant les états. La fidélité moyennée sur toutes les directions possibles du vecteur de Bloch du qubit est:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi} \iint \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2}{3} \quad (3-11)$$

C'est la fidélité de l'estimation d'un qubit donné en un seul exemplaire (voir leçon précédente). Peut-on réaliser un clonage universel de fidélité supérieure?

III-B:

**Clonage universel symétrique de
1 dans 2 qubits**

Clonage 1→2 universel et optimal d'un qubit

Etant donné un qubit a dans un état pur quelconque:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (3-12)$$

et un qubit b initialement dans l'état $|0\rangle$, nous cherchons à réaliser avec une machine M une opération unitaire qui conduira, pour les qubits a et b à des opérateurs densité réduits identiques (propriété de symétrie), reproduisant avec une fidélité F indépendante de l'état initial (universalité) et aussi grande que possible, l'état de a:

$$\rho_a^{final} = \rho_b^{final} = F|\psi\rangle\langle\psi| + (1-F)|\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|$$

avec $|\psi^\perp\rangle = \beta^*|0\rangle - \alpha^*|1\rangle$ ($\langle\psi|\psi^\perp\rangle = 0$) (3-13)

L'état $|\psi^\perp\rangle$, orthogonal à $|\psi\rangle$ correspond au vecteur de Bloch opposé $-\vec{P}$. On l'appelle l'état «anticlone de ψ ». La composante anticlone représente l'erreur du clonage qu'on cherche à rendre la plus faible possible (F aussi grand que possible).

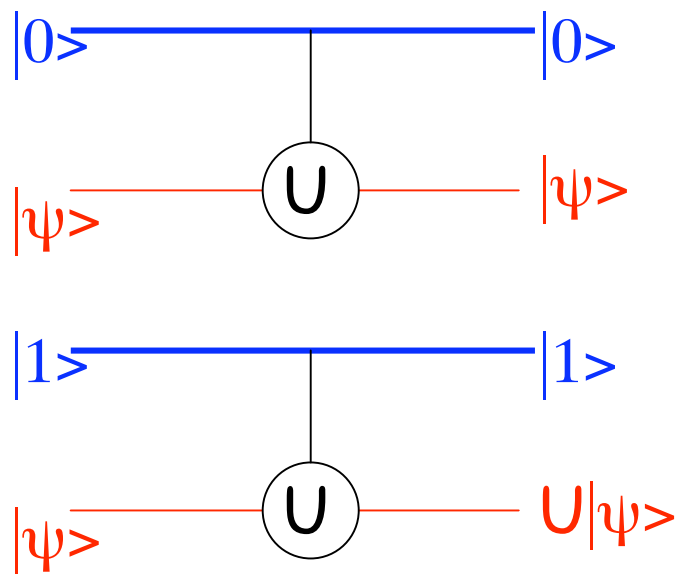
En adoptant la représentation de Bloch, on a:

$$\rho_a^{initial} = \frac{1}{2}(I + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \rightarrow \rho_a^{final} = \rho_b^{final} = \frac{F}{2}(I + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) + \frac{1-F}{2}(I - \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}(I + [2F-1]\vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3-14)$$

Le clonage universel réduit dans le rapport $\eta = 2F-1$ la polarisation du qubit, sans en changer la direction. Nous allons montrer que l'on peut effectuer cette opération avec $F_{max} = 5/6$ ($\eta_{max} = 2/3$). On démontre par un calcul variationnel (non reproduit ici) que cette valeur est optimale. Nous donnerons une justification de cette limite basée sur sa compatibilité avec la limite de fidélité d'estimation (fin de cette leçon), et une autre fondée sur des considérations de causalité (prochaine leçon).

Rappels sur circuits logiques et porte CNOT

Pour une étude détaillée des circuits de logique quantique voir cours 2001-2002



Il est commode de décrire les opérations sur les qubits en termes de circuits logiques, les interactions entre 2 qubits pouvant se réduire à des opérations conditionnelles dans lesquelles un qubit ('contrôle' **a**) détermine suivant son état l'évolution de l'autre ('cible' **b**). La porte «Contrôle U» obéit à la règle: si **a** est dans l'état $|0\rangle$, le qubit **b** n'évolue pas; si **a** est dans l'état $|1\rangle$, **b** subit la transformation unitaire U. Pour l'état le plus général de **a**,

$$[\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a] \otimes |\psi\rangle_b \rightarrow \alpha|0\rangle_a \otimes |\psi\rangle_b + \beta|1\rangle_a \otimes U|\psi\rangle_b \quad (3-15)$$

Un cas particulier est celui de la porte CNOT pour laquelle $U = \sigma_x$. Les états de la base logique se transforment alors suivant l'opération de bascule conditionnelle:

$$\begin{aligned} |0_a, 0_b\rangle &\rightarrow |0_a, 0_b\rangle & ; & & |0_a, 1_b\rangle &\rightarrow |0_a, 1_b\rangle \\ |1_a, 0_b\rangle &\rightarrow |1_a, 1_b\rangle & ; & & |1_a, 1_b\rangle &\rightarrow |1_a, 0_b\rangle \end{aligned} \quad (3-16)$$

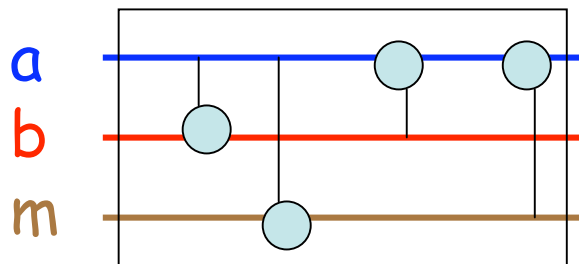
qui correspond à l'addition modulo 2 dans la voie du qubit cible, sans changer **a**:

$$|i\rangle_a \otimes |j\rangle_b \rightarrow |i\rangle_a \otimes |i \oplus j\rangle_b \quad (i, j = 0, 1) \quad (3-17)$$

(Lorsque U n'est pas spécifiée, il s'agit par défaut de l'opération de CNOT (σ_x)).

Circuit logique de clonage optimal

Un exercice de circuit logique va nous permettre de construire une machine à cloner universelle et optimale. Commençons par considérer la combinaison de portes CNOT pour un circuit de 3 qubits (**a**, **b** et qubit auxiliaire **m**) représentée par la figure ci-dessous. Noter que le qubit **a** est successivement contrôlé ou cible (la ligne correspondant à la cible portant le vertex symbolisant l'opération σ_x).



La porte CNOT réalisant une addition conditionnelle modulo 2, on montre facilement que pour une entrée de qubit dans la base logique, la transformation suivante est réalisée:

$$|i; j; k\rangle \rightarrow |i \oplus j \oplus k; i \oplus j; i \oplus k\rangle$$

$$(i, j, k = 0, 1; \oplus = \text{addition mod. 2}) \quad (3-18)$$

Considérons maintenant l'action de ce circuit sur le qubit **a** (à cloner) dans un état $|\psi\rangle$ quelconque, pour deux états du système $\{b, m\}$ particuliers. On vérifie par linéarité:

$$|\psi\rangle_a \otimes |\Phi^+\rangle_{b,m} \rightarrow |\psi\rangle_a \otimes |\Phi^+\rangle_{b,m} \quad \text{avec} \quad |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (\text{état de Bell de 2 qubits}) \quad (3-20)$$

$$|\psi\rangle_a \otimes |0\rangle_b \otimes |+\rangle_m \rightarrow |\psi\rangle_b \otimes |\Phi^+\rangle_{a,m} \quad (3-19) \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (\text{état superposition d'un qubit})$$

Les états $|\Phi^+\rangle_{b,m}$ et $|0\rangle_b|+\rangle_m$ de $\{b, m\}$, couplés à **a** par le circuit copient respectivement **de façon exacte** l'état de **a** sur lui-même ou sur **b**.

Circuit logique de clonage optimal (suite)

Nous cherchons à réaliser une opération qui effectue à la fois ces deux transferts sur **a** et sur **b**, de façon symétrique, mais approchée. Essayons un compromis en faisant entrer **{b,m}** dans une combinaison linéaire des deux états précédents:

$$\begin{aligned}
 |\Psi^{initial}\rangle_{b,m} &= c_1 |\Phi^+\rangle_{b,m} + c_2 |0\rangle_b |+\rangle_m \\
 c_1, c_2 \text{ réels avec (normalisation):} \\
 c_1^2 + c_2^2 + c_1 c_2 &= 1 \qquad (3-21)
 \end{aligned}$$

On obtient immédiatement par linéarité:

$$|\psi\rangle_a \otimes |\Psi^{initial}\rangle_{b,m} \rightarrow c_1 |\psi\rangle_a \otimes |\Phi^+\rangle_{b,m} + c_2 |\psi\rangle_b \otimes |\Phi^+\rangle_{a,m} \quad (3-22)$$

En explicitant $|\psi\rangle$ par l'équ. (3-12) et en traçant sur **b** et **m**, on trouve l'opérateur densité du qubit **a**:

$$\rho_a = Tr_{b,m} \rho_{a,b,m} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^* (c_1^2 + \frac{c_2^2}{2} + c_1 c_2) + \beta\beta^* \frac{c_2^2}{2} & \alpha\beta^* (c_1^2 + c_1 c_2) \\ \alpha^* \beta (c_1^2 + c_1 c_2) & \beta\beta^* (c_1^2 + \frac{c_2^2}{2} + c_1 c_2) + \alpha\alpha^* \frac{c_2^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

soit:

$$\rho_a = F_a |\psi\rangle\langle\psi| + (1 - F_a) |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|$$

$$\text{avec } F_a = c_1^2 + \frac{c_2^2}{2} + c_1 c_2 = 1 - \frac{c_2^2}{2} \quad (3-24a)$$

et de même

$$\rho_b = F_b |\psi\rangle\langle\psi| + (1 - F_b) |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|$$

$$\text{avec } F_b = c_2^2 + \frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 = 1 - \frac{c_1^2}{2} \quad (3-24b)$$

Circuit de clonage optimal (suite)

La transformation cherchée est réalisée. Pour la symétriser on fait $c_1=c_2=1/\sqrt{3}$ et on obtient $F=5/6$ et $\eta=2/3$:

$$\rho_a = \rho_b = \frac{5}{6} |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{6} |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp| = \frac{1}{2} \left(I + \frac{2}{3} \vec{P}_\psi \cdot \vec{\sigma} \right) \quad (3-25)$$

Pour compléter le circuit de clonage, explicitons la forme initiale de l'état de $\{b, m\}$:

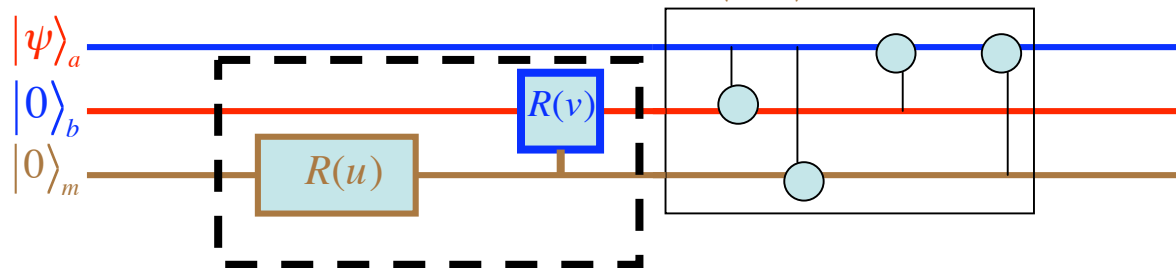
$$|\Psi^{initial}\rangle_{b,m} = c_1 |\Phi^+\rangle_{b,m} + c_2 |0\rangle_b |+\rangle_m = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}} |0,0\rangle_{b,m} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} |0,1\rangle_{b,m} + \frac{c_1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle_{b,m} = \sqrt{\frac{2}{3}} |0,0\rangle_{b,m} + \frac{1}{\sqrt{6}} |0,1\rangle_{b,m} + \frac{1}{\sqrt{6}} |1,1\rangle_{b,m} \quad (3-26)$$

La préparation de $|\Psi^{initial}\rangle_{b,m}$ est réalisée, en amont du circuit CNOT, par une porte à un qubit (rotation du vecteur de Bloch de m de l'angle u autour de Oy) et une porte à deux bits (rotation de b de l'angle v autour de Oy dépendant de l'état de m):

$$|0\rangle_b |0\rangle_m \xrightarrow{R_y(u)} \cos \frac{u}{2} |0,0\rangle_{b,m} + \sin \frac{u}{2} |0,1\rangle_{b,m}$$

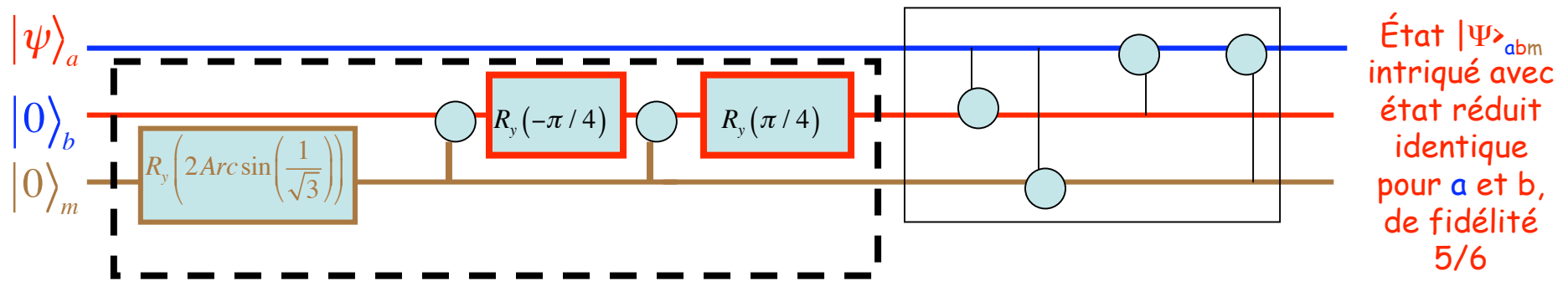
$$\xrightarrow{R_y(v) \text{ conditionnelle}} \cos \frac{u}{2} |0,0\rangle_{b,m} + \sin \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} |0,1\rangle_{b,m} + \sin \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} |1,1\rangle_{b,m} \quad (3-27)$$

Soit en identifiant avec Eq(3-26): $u = 2 \text{Arc sin} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right); v = \frac{\pi}{2}$ (3-28)



Circuit de clonage optimal (fin)

Le circuit de clonage peut se réduire à des portes CNOT et des rotations à un qubit (voir cours 2001-2002 où on a montré que la porte CNOT est universelle). On décompose ainsi la porte rotation d'angle $\pi/2$ en une CNOT combinée à deux rotations à un qubit d'angles $\pm\pi/4$. Le circuit complet comporte 6 CNOTs et trois rotations de qubits:



Donnons l'expression simple et symétrique de l'état final intriqué de $\{a,b,m\}$:

$$|\Psi\rangle_{a,b,m} = \frac{1}{\sqrt{6}} [|\psi\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_m + |\psi\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_m + |0\rangle_a |\psi\rangle_b |0\rangle_m + |1\rangle_a |\psi\rangle_b |1\rangle_m] \quad (3-29)$$

Et, comme cas particulier, la transformation des états de la base logique:

$$|0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_m \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_m + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Psi^+\rangle_{a,b} |1\rangle_m$$

$$|1\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_m \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_m + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Psi^+\rangle_{a,b} |0\rangle_m$$

$$\text{avec } |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \quad (3-30)$$

Une machine à anticloner en prime

Il est également instructif de considérer l'état réduit du qubit m . On décompose $|\Psi\rangle_{abm}$ sur une base produits tensoriels d'états symétriques orthogonaux de $[a,b]$ et des états de m sous la forme:

$$|\Psi\rangle_{a,b,m} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\alpha |0,0\rangle_{a,b} |0\rangle_m + \beta |1,1\rangle_{a,b} |1\rangle_m \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Psi^+\rangle_{a,b} \left[\beta |0\rangle_m + \alpha |1\rangle_m \right] \quad (3-31)$$

à partir de laquelle on calcule la trace sur a et b :

$$\rho_m = \text{Tr}_{a,b} \{ |\Psi_{a,b,m}\rangle \langle \Psi_{a,b,m}| \} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \alpha \alpha^* + \frac{1}{3} \beta \beta^* & \frac{1}{3} \beta \alpha^* \\ \frac{1}{3} \beta^* \alpha & \frac{2}{3} \beta \beta^* + \frac{1}{3} \alpha \alpha^* \end{pmatrix} \quad (3-32)$$

Effectuons ensuite la rotation $R_y(\pi)$ sur m , ce qui revient à échanger la définition des états logiques 0 et 1 sur ce qubit. On obtient:

$$\rho_m^{final} = R_y(\pi) \rho_m R_y^{-1}(\pi) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \beta \beta^* + \frac{1}{3} \alpha \alpha^* & -\frac{1}{3} \beta^* \alpha \\ -\frac{1}{3} \beta \alpha^* & \frac{2}{3} \alpha \alpha^* + \frac{1}{3} \beta \beta^* \end{pmatrix} = \frac{2}{3} |\psi^\perp\rangle \langle \psi^\perp| + \frac{1}{3} |\psi\rangle \langle \psi| = \frac{1}{2} \left[I - \frac{1}{3} \vec{P}_\psi \cdot \vec{\sigma} \right] \quad (3-33)$$

Le circuit logique de clonage donne ainsi en prime un anticlone approché de l'état ψ copié sur m . Noter que l'anticlonage parfait est, comme le clonage parfait, interdit (opération antiunitaire de conjugaison complexe des amplitudes)

Clonage optimal et symétrisation

En traçant sur m l'opérateur $|\Psi\rangle_{a,b,m} \langle\Psi|$ on obtient l'opérateur densité de $\{a,b\}$:

$$\rho_{a,b} = \frac{1}{6} \left[|\Phi_\psi^0\rangle_{a,b} \langle\Phi_\psi^0| + |\Phi_\psi^1\rangle_{a,b} \langle\Phi_\psi^1| \right] \quad (3-34)$$

qui s'exprime en fonction des états symétriques (non-normés): (3-35)

$$|\Phi_\psi^0\rangle = |\psi,0\rangle_{a,b} + |0,\psi\rangle_{a,b} = 2\alpha|0,0\rangle_{a,b} + \beta\sqrt{2}|\Psi^+\rangle_{a,b} \quad ; \quad |\Phi_\psi^1\rangle = |\psi,1\rangle_{a,b} + |1,\psi\rangle_{a,b} = 2\beta|1,1\rangle_{a,b} + \alpha\sqrt{2}|\Psi^+\rangle_{a,b}$$

Le clonage optimal prépare donc $\{a,b\}$ dans un état de l'espace Σ_2 des états symétriques de moment angulaire collectif $J=1$ des deux qubits (voir leçon 1). Le projecteur dans cet espace est:

$$I_\Sigma = |0,0\rangle_{a,b} \langle 0,0| + |\Psi^+\rangle_{a,b} \langle\Psi^+| + |1,1\rangle_{a,b} \langle 1,1| \quad (3-36)$$

somme des projecteurs sur les *états de Dicke* $m=+1$, $m=0$ et $m=-1$. On montre que $\rho_{a,b}$ est obtenu en symétrisant l'opérateur produit $|\psi\rangle_a \langle\psi| \otimes I_b$ dans l'espace des opérateurs densité symétriques suivant la relation (le facteur $2/3$ assure que la trace de $\rho_{ab}=1$):

$$\rho_{a,b} = \frac{2}{3} I_\Sigma \left[|\psi\rangle_a \langle\psi| \otimes I_b \right] I_\Sigma \quad (3-37)$$

Ce résultat se vérifie en identifiant les décompositions de $\rho_{a,b}$ sur $|0,0\rangle\langle 0,0|, |1,1\rangle\langle 1,1|, |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|, |0,0\rangle\langle\Psi^+|$ et $|1,1\rangle\langle\Psi^+|$ données par (3-34) et (3-37).

Le clonage 1→2 optimal symétrise l'opérateur produit du projecteur sur l'état à cloner du premier qubit par l'opérateur unité du second qubit. Cette propriété se généralisera au clonage de 1 vers M, puis de N vers M qubits (voir leçon 4).

Clonage 1→2 et estimation

La fidélité du clonage 1 → 2 ($F_{1 \rightarrow 2} = 5/6$) est supérieure à celle de l'estimation d'un qubit ($S_1 = 2/3$). En d'autres termes, l'opération de clonage par symétrisation est supérieure à la méthode de clonage triviale qui consiste à estimer le qubit a et à préparer a et le qubit b dans l'état estimé. Nous retrouvons, dans un autre contexte, la supériorité des méthodes opérant sur l'ensemble des qubits sur celles qui les mesurent séparément.

Reste à montrer que l'inégalité $F_{1 \rightarrow 2} > S_1$ ne conduit pas à une contradiction avec la limite d'estimation établie à la leçon 2. Que donne une stratégie consistant à cloner un qubit dans 2, puis à estimer l'état sur le couple de qubits ainsi obtenu?

Appliquons la méthode optimale *d'estimation collective* à la mesure des deux qubits. Si ils étaient des clones parfaits, la fidélité serait de 3/4, et on aurait ainsi, en le clonant, estimé le qubit initial avec une fidélité supérieure à 2/3, ce qui serait en contradiction avec la limite $(N+1)/(N+2)$ établie à la leçon 2. Mais la fidélité du clonage optimal est < 1 . Montrons qu'elle est en fait juste compatible avec la limite donnée par la théorie pour l'estimation d'un qubit. Supposons le qubit initial dans l'état $|0\rangle$ (la démonstration ne dépend pas de cet état, puisque clonage comme estimation optimale sont des opérations universelles aux performances indépendantes de la direction du vecteur de Bloch). En traçant (3-30) sur m , on montre que les deux clones sont alors préparés dans l'état symétrique décrit par:

$$\rho_{ab} = \frac{2}{3} |0,0\rangle_{a,b} \langle 0,0| + \frac{1}{3} |\Psi^+\rangle_{a,b} \langle \Psi^+| \quad (3-38)$$

Clonage 1→2 et estimation (suite)

Utilisons pour estimer l'état des deux clones la méthode optimale par le *POVM* $E_{\theta,\varphi}$ de la leçon 2 (défini pour $N=2$). La densité de probabilité d'obtenir le résultat θ,φ est:

$$p(\theta, \varphi) = \text{Tr} \{ \rho_{ab} E_{\theta, \varphi} \} = 3 \times \frac{2}{3} \langle (N=2)_{\theta, \varphi} | 0, 0 \rangle \langle 0, 0 | (N=2)_{\theta, \varphi} \rangle + 3 \times \frac{1}{3} \langle (N=2)_{\theta, \varphi} | \Psi^+ \rangle \langle \Psi^+ | (N=2)_{\theta, \varphi} \rangle \quad (3-39)$$

avec, en utilisant les relations (1-14) pour $N=2$:

$$\left| \langle (N=2)_{\theta, \varphi} | 0, 0 \rangle \right|^2 = \cos^4 \frac{\theta}{2} \quad ; \quad \left| \langle (N=2)_{\theta, \varphi} | \Psi^+ \rangle \right|^2 = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3-40)$$

d'où:
$$p(\theta, \varphi) = 2 \cos^4 \frac{\theta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (3-41)$$

La fidélité de l'estimation obtenue en décidant que les qubits pointent dans la direction θ,φ est donc:

$$\iint d\Omega p(\theta, \varphi) \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2}{4\pi} \iint d\varphi d\theta \sin \theta \cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \quad (3-42)$$

La stratégie d'estimation d'un qubit par clonage optimal suivi de l'estimation optimale des deux qubits clones permet d'atteindre, mais non de dépasser la fidélité maximale de clonage d'un qubit, égale à $2/3$. Nous rediscuterons de la relation entre estimation et clonage à la leçon 4.