

# Physique Quantique

## Cours 2009-2010: Sixième leçon

### 22 Février 2010

Après avoir étudié les problèmes liés à l'estimation et au clonage des systèmes à deux états (qubits), nous consacrons les deux dernières leçons de ce cours à l'analyse de la reconstruction d'un mode du champ, oscillateur harmonique quantique à nombre infini d'états. Nous commençons (&VI-A) par des rappels sur la **fonction de Wigner** qui donne une description de l'oscillateur dans son espace des phases la plus proche possible de la description classique. Nous rappelons les propriétés essentielles de cette représentation et décrivons les fonctions de Wigner  $W$  des états cohérents et de quelques états non-classiques du champ. Nous associons le caractère non-classique à l'existence de **valeurs négatives** de  $W$ .

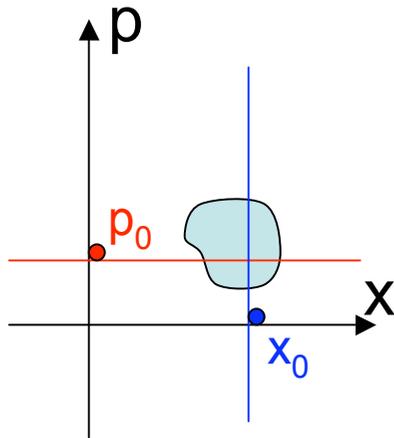
Nous abordons ensuite (&VI-B) la description d'expériences de tomographie par homodynage de champs optiques dans l'espace libre qui ont permis de reconstruire des **états de Fock** non-classiques avec un nombre de photons bien défini ( $n=1$  et  $2$ ).

Nous consacrons enfin la dernière partie de la leçon (&VI-C) à la description d'une méthode générale et puissante de reconstruction basée sur le **principe du maximum de vraisemblance** introduit à la leçon 2. La dernière leçon (le 1er Mars) sera consacrée à la reconstruction d'états du champ piégés dans une cavité (**états de Fock et états « chats de Schrödinger »**).

VI-A

La Fonction de Wigner

# Distribution de probabilité classique dans l'espace de phase

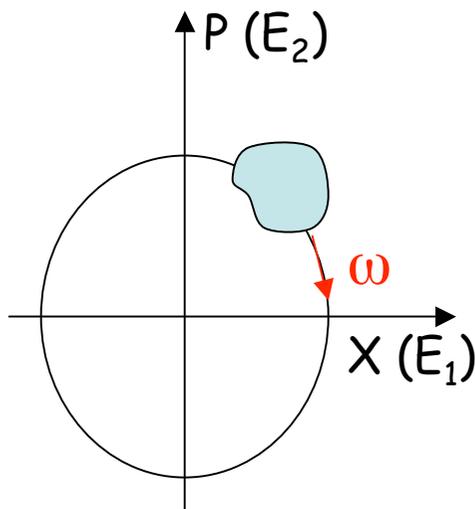


L'état d'une particule classique évoluant sur une droite est défini par sa position  $x$  et son impulsion  $p$ , ses coordonnées dans *l'espace des phases*. En physique *statistique* classique,  $x$  et  $p$  sont des variables aléatoires associées à la densité de probabilité  $\Pi(x,p;t)$ . Les intégrales partielles de  $\Pi(x,p)$  suivant chaque variable décrivent la loi de probabilité associée à l'autre:

$$\int \Pi(x, p_0; t) dx = \Pi_p(p_0; t) \quad ; \quad \int \Pi(x_0, p; t) dp = \Pi_x(x_0; t)$$

avec :

$$\iint \Pi(x, p; t) dx dp = \int dp_0 \Pi_p(p_0; t) = \int dx_0 \Pi_x(x_0; t) = 1 \quad (6-1)$$



Les coordonnées  $x$  et  $p$  (convenablement normalisées) d'une particule évoluant dans un potentiel harmonique ont une distribution de probabilité tournant à la fréquence  $\omega$  sans se déformer sur un cercle du plan de phase.

De même, un mode classique du champ est décrit par deux quadratures  $E_1$  et  $E_2$ , déphasées de  $\pi/2$  dans le plan de phase, avec une distribution statistique analogue à celle d'un oscillateur mécanique.

# Fonction caractéristique classique associée à la distribution (x,p)

On associe aux variables aléatoires (x,p) la fonction caractéristique  $\chi(\lambda_1, \lambda_2)$  égale à la valeur moyenne de  $\exp[-i(\lambda_1 p - \lambda_2 x)]$ . Les fonctions  $\chi(\lambda_1, \lambda_2)$  et  $\Pi(x, p)$  sont *transformées de Fourier* l'une de l'autre (on omet ici la mention explicite de t):

$$\chi(\lambda_1, \lambda_2) = \langle e^{-i(\lambda_1 p - \lambda_2 x)} \rangle = \iint dx dp \Pi(x, p) e^{-i(\lambda_1 p - \lambda_2 x)} \quad (6-2a)$$

$$\Pi(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\lambda_1 d\lambda_2 \chi(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 p - \lambda_2 x)} \quad (6-2b)$$

La fonction caractéristique définit entièrement la loi de probabilité de x et p. Sa valeur à l'origine est égale à l'unité et ses dérivées en ce point donnent tous les *moments* de x et p:

$$\chi(0,0) = 1 \quad (6-3a)$$

$$\langle x^n p^m \rangle = \iint dx dp x^n p^m \Pi(x, p) = (-1)^{n+m} i^{n+m} \frac{\partial^{n+m} \chi(0,0)}{\partial \lambda_1^m \partial \lambda_2^n} \quad (6-3b)$$

# Fonction caractéristique symétrique de l'état d'un oscillateur quantique

Pour préparer la quantification de l'oscillateur, changeons de coordonnées en passant de  $\{x,p\}$  à la variable complexe  $\alpha$ , en introduisant également un complexe  $\lambda$  pour décrire le couple conjugué  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ :

$$\alpha = x + ip \quad ; \quad \lambda = \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{2} \quad (6-4)$$

La fonction caractéristique classique devient:

$$C(\lambda) = \left\langle e^{(\lambda\alpha^* - \lambda^*\alpha)} \right\rangle \quad (6-5)$$

Pour quantifier l'oscillateur, on remplace  $x$  et  $p$  par des opérateurs non-commutants sans dimension  $X$  et  $P$  (opérateurs «*quadratures*» d'un mode) et  $\alpha$  et  $\alpha^*$  par les opérateurs d'annihilation et de création de quanta  $a$  et  $a^\dagger$  (cette normalisation usuelle en optique quantique présente un facteur  $1/2$  dans le commutateur  $[X,P]$ ):

$$[X,P] = \frac{i}{2} \quad ; \quad a = X + iP \quad ; \quad a^\dagger = X - iP \quad ; \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (6-6)$$

La fonction caractéristique d'un état quantique décrit par l'opérateur densité  $\rho$  est alors définie naturellement comme:

$$C_S(\lambda) = \left\langle e^{(\lambda a^\dagger - \lambda^* a)} \right\rangle = \text{Tr} \left[ \rho e^{(\lambda a^\dagger - \lambda^* a)} \right] \quad (6-7)$$

On l'appelle **fonction caractéristique symétrique**, son développement en série faisant intervenir des valeurs moyennes de produits symétrisés des opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  (attention dans les expressions à l'ordre des opérateurs qui ne commutent pas).

# Translation dans l'espace des phases (rappel)

L'opérateur unitaire:

$$D(\lambda) = e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a} \quad (6-8)$$

décrit un *déplacement* dans l'espace des phases (voir cours antérieurs). Il s'écrit, en rangeant  $a$  et  $a^\dagger$  dans l'ordre normal (\*):

$$D(\lambda) = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} \quad (6-9)$$

et son action sur le vide donne par définition *l'état cohérent*  $|\lambda\rangle$ :

$$D(\lambda)|0\rangle = |\lambda\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} |0\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (6-10)$$

Plus généralement,  $D(\lambda)$  agissant sur l'état cohérent  $|\beta\rangle$  donne (à une phase près) l'état cohérent  $|\beta+\lambda\rangle$ :

$$D(\lambda)|\beta\rangle = e^{(\lambda\beta^* - \lambda^*\beta)/2} |\beta + \lambda\rangle \quad (6-11)$$

Il est également utile d'exprimer  $D(\lambda)$  en fonction de  $X$  et  $P$  (\*):

$$D(\lambda) = e^{i(\lambda_2 X - \lambda_1 P)} = e^{-i\lambda_1 \lambda_2 / 4} e^{i\lambda_2 X} e^{-i\lambda_1 P} = e^{i\lambda_1 \lambda_2 / 4} e^{-i\lambda_1 P} e^{i\lambda_2 X} \quad (6-12)$$

Ainsi  $D(\lambda)$  agissant sur l'état propre  $|x\rangle$  de  $X$  le transforme en état de valeur propre  $x + \lambda_1/2$ :

$$D(\lambda)|x\rangle = e^{i\lambda_1 \lambda_2 / 4} e^{-i\lambda_1 P} e^{i\lambda_2 X} |x\rangle = e^{i(x + \lambda_1/4)\lambda_2} |x + \lambda_1/2\rangle \quad (6-13)$$

---

(\*) On se sert pour factoriser les exponentielles de la relation de Glauber  $e^{(A+B)} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$  valable lorsque  $[A,B]$  commute avec  $A$  et  $B$ .

# Propriétés de la fonction caractéristique symétrique

A partir de la définition (6-7), on montre:

$$C_S(0) = 1 \quad ; \quad |C_S(\lambda)| \leq 1 \quad ; \quad C_S(-\lambda) = C_S^*(\lambda) \quad (6-14)$$

La fonction caractéristique symétrique d'un état pur  $|\psi\rangle$  :

$$C_S^{|\psi\rangle}(\lambda) = \langle \psi | D(\lambda) | \psi \rangle \quad (6-15)$$

est le produit scalaire de cet état avec l'état translaté de  $\lambda$  dans l'espace des phases. La fonction caractéristique apparaît ainsi comme la *fonction d'autocorrélation de l'état* dans l'espace des phases.

Les équations (6-11) et (6-15) permettent de calculer la fonction caractéristique d'un état cohérent  $|\beta\rangle$ . En les combinant avec celle du produit scalaire d'états cohérents:

$$\langle \beta | \beta' \rangle = e^{-\frac{(|\beta|^2 + |\beta'|^2)}{2}} e^{\beta^* \beta'} \quad (6-16)$$

on obtient:

$$C_S^{|\beta\rangle}(\lambda) = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\beta^* \lambda - \beta \lambda^*} \quad (6-17)$$

# La fonction de Wigner

Par analogie avec la situation classique, considérons la transformée de Fourier de la fonction caractéristique symétrique de l'oscillateur. Avec la notation des variables normales, on définit ainsi la *fonction de Wigner*:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \iint d^2\lambda C_S(\lambda) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \quad (6-18)$$

où on a noté  $d^2\lambda = d\text{Re}(\lambda).d\text{Im}(\lambda) = d\lambda_1 d\lambda_2 / 4$ . En comparant (6-2b) et (6-18), on voit que  $W(\alpha)$  est l'analogue quantique de la densité de probabilité  $\Pi(x,p)$  de l'oscillateur classique.

On montre facilement que  $W$  est réelle et normée (conséquences de (6-14)) :

$$W^*(\alpha) = W(\alpha) \quad (6-19a)$$

$$\begin{aligned} \iint d^2\alpha W(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \iint \iint d^2\alpha d^2\lambda C_S(\lambda) e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \\ &= \iint d^2\lambda \delta^{(2)}(\lambda) C_S(\lambda) = C_S(0) = 1 \quad (6-19b) \end{aligned}$$

Cependant, contrairement à la situation classique,  $W$  peut avoir des valeurs négatives (voir plus loin). Cette négativité est la «signature» d'états non-classiques.

## Deux expressions utiles de $W(\alpha)$

Explicitons la trace donnant  $C_s(\lambda)$  dans la base des états propres  $|x\rangle$  de  $X$ :

$$C_s(\lambda) = \text{Tr} \left[ \rho e^{(\lambda a^\dagger - \lambda^* a)} \right] = \int dx' \langle x' | \rho D(\lambda) | x' \rangle \quad (6-20)$$

qui, compte tenu de (6-13) s'écrit:

$$C_s(\lambda) = \int dx' e^{i(x'+\lambda_1/4)\lambda_2} \langle x' | \rho | x'+\lambda_1/2 \rangle \quad (6-21)$$

et, en passant à la transformée de Fourier [éq.(6-18)]:

$$W(\alpha) = W(x+ip) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint d\lambda_1 d\lambda_2 dx' e^{i(\lambda_1 p - \lambda_2 x)} e^{i(x'+\lambda_1/4)\lambda_2} \langle x' | \rho | x'+\lambda_1/2 \rangle \quad (6-22)$$

L'intégrale sur  $\lambda_2$  dans (6-22) fait apparaître une fonction delta:

$$\int d\lambda_2 e^{i(x'-x+\lambda_1/4)\lambda_2} = 2\pi \delta(x'-x+\lambda_1/4) \quad (6-23)$$

et l'intégrale sur  $x'$  donne finalement:

$$W(\alpha) = W(x+ip) = \frac{1}{2\pi} \iint d\lambda_1 dx' \delta(x'-x+\lambda_1/4) e^{i\lambda_1 p} \langle x' | \rho | x'+\lambda_1/2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda_1 e^{i\lambda_1 p} \langle x-\lambda_1/4 | \rho | x+\lambda_1/4 \rangle \quad (6-24)$$

Ou encore en faisant le changement de variable muette  $\lambda_1 = -2u$ :

$$W(\alpha) = W(x+ip) = \frac{1}{\pi} \int du e^{-2ipu} \langle x+u/2 | \rho | x-u/2 \rangle \quad (6-25)$$

## Deux expressions de $W(\alpha)$ (suite)

Ainsi  $W(x+ip)$  se présente comme une transformée de Fourier impliquant des éléments de matrice non-diagonaux de  $\rho$  dans la base des états propres de  $X$ . Par transformation inverse, on obtient:

$$\langle x + u / 2 | \rho | x - u / 2 \rangle = \int dp e^{2ipu} W(x + ip) \quad (6-26)$$

On voit que  $W$  et  $\rho$  se déduisent l'un de l'autre par les formules réciproques (6-25) - (6-26) et contiennent donc *une information complète et équivalente* sur l'état de l'oscillateur.

$W(\alpha)$  peut aussi être défini comme la valeur moyenne de l'opérateur parité  $\mathcal{P}$  dans l'état de l'oscillateur déplacé de  $-\alpha$  dans l'espace de phase:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} [D(-\alpha) \rho D(\alpha) \mathcal{P}] \quad (6-27)$$

$\mathcal{P}$  est défini soit comme l'opérateur de parité changeant le signe des quadratures, soit comme l'opérateur parité du nombre de quanta:

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle \quad (6-28)$$

L'équivalence de ces 2 définitions résulte de la parité des polynômes de Hermite décrivant les états propres  $|n\rangle$  du hamiltonien harmonique dans la base  $|x\rangle$ .

## Deux expressions de $W(\alpha)$ (suite)

Pour établir (6-27), appliquons l'opérateur  $D(\alpha)=D(x+ip)$  à  $|-u/2\rangle$  en utilisant (6-13):

$$D(\alpha)|-u/2\rangle = D(x+ip)|-u/2\rangle = e^{ip(x-u)}|x-u/2\rangle \quad (6-29)$$

et en conjuguant cette relation avec changement de  $u$  en  $-u$ :

$$\langle u/2|D(-\alpha) = \langle x+u/2|e^{-ip(x+u)} \quad (6-30)$$

soit en reportant (6-29) et (6-30) dans (6-25):

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int du \langle u/2|D(-\alpha)\rho D(\alpha)|-u/2\rangle = \frac{2}{\pi} \int dv \langle v|D(-\alpha)\rho D(\alpha)\mathcal{P}|v\rangle \quad ; \quad (v = u/2)$$

ce qui démontre (6-27). L'état d'un oscillateur est ainsi entièrement défini par la *parité moyenne du nombre de photons dans toutes ses translations dans le plan de phase*. Un état classique ( $W > 0$  pour tout  $\alpha$ ) a dans toutes ses translations en moyenne davantage de photons pairs. Un état non-classique (pour lequel  $W$  a des valeurs  $< 0$ ) se caractérise par l'existence de translations où la probabilité d'avoir un nombre de photons impair est plus grande. L'état de Fock  $n=1$  a par définition une valeur  $W(0)$  négative et est donc suivant ce critère non-classique. Utilisons (6-27) pour calculer la fonction  $W$  de l'état cohérent  $|\beta\rangle$ :

$$\begin{aligned} W^{|\beta\rangle}(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \text{Tr} \{ |\beta-\alpha\rangle \langle \beta-\alpha| \mathcal{P} \} = \frac{2}{\pi} \langle \beta-\alpha| \mathcal{P} | \beta-\alpha \rangle \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_n (-1)^n P^{|\beta-\alpha\rangle}(n) = \frac{2e^{-|\beta-\alpha|^2}}{\pi} \sum_n (-1)^n \frac{|\beta-\alpha|^{2n}}{n!} = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta-\alpha|^2} \quad (6-31) \end{aligned}$$

C'est une gaussienne (toujours  $> 0$ ) centrée en  $\alpha=\beta$  (voir représentation plus loin).

# Distributions marginales des quadratures

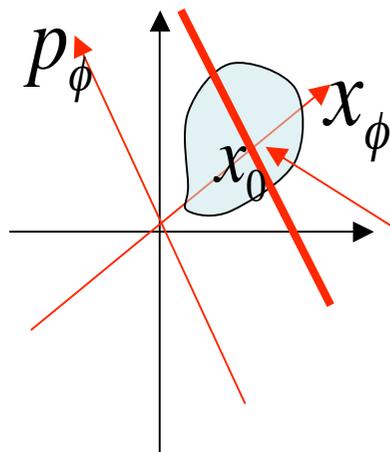
L'analogie entre  $\Pi(x,p)$  et  $W(\alpha)$  est confirmée par le calcul des distributions marginales. L'intégration de  $W$  sur  $p$  s'obtient en faisant  $u = 0$  dans (6-25):

$$\Pi_x(x_0) = \langle x_0 | \rho | x_0 \rangle = \int dp W(x_0, p) \quad (6-32a)$$

et de même en échangeant les bases  $x$  et  $p$ :

$$\Pi_p(p_0) = \langle p_0 | \rho | p_0 \rangle = \int dx W(x, p_0) \quad (6-32b)$$

Ainsi, *comme dans le cas classique*, l'intégration sur une coordonnée donne la distribution de l'autre. Le résultat se généralise à des quadratures quelconques du champ, combinaisons de  $X$  et  $P$ :

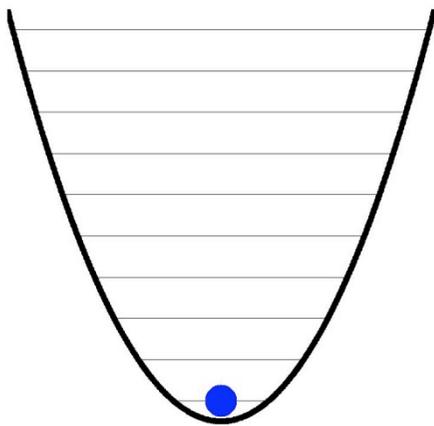


$$X_\phi = X \cos \phi + P \sin \phi ; P_\phi = -X \sin \phi + P \cos \phi \quad ; \quad [X_\phi, P_\phi] = i / 2 \quad (6-33)$$

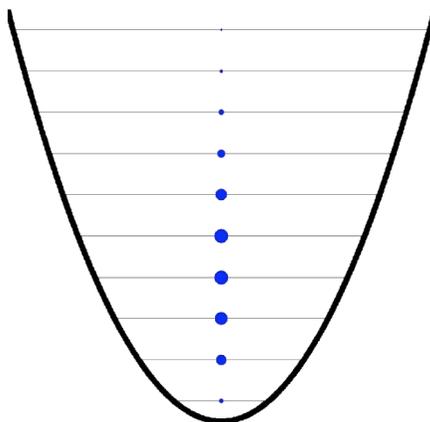
$$\Pi_{X_\phi}(x_0) = \int dp_\phi W(x_0, p_\phi) \quad ; \quad \Pi_{P_\phi}(p_0) = \int dx_\phi W(x_\phi, p_0) \quad (6-34)$$

# Fonctions de Wigner de quelques états purs

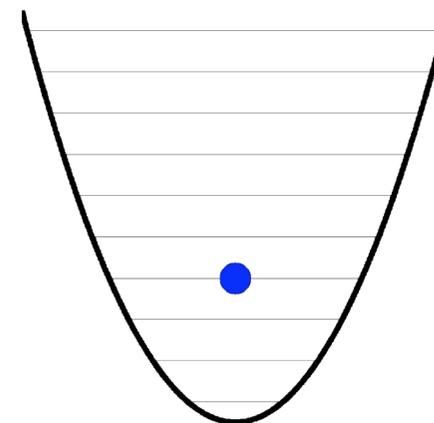
Etat vide



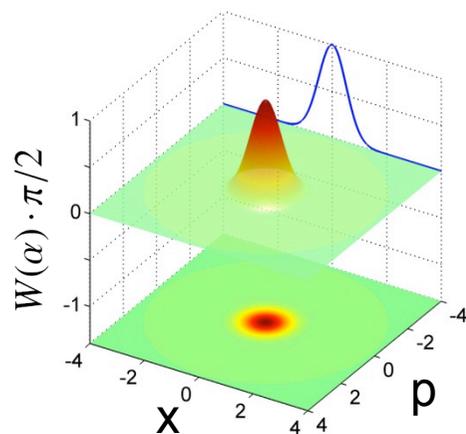
Etat cohérent



Etat de Fock



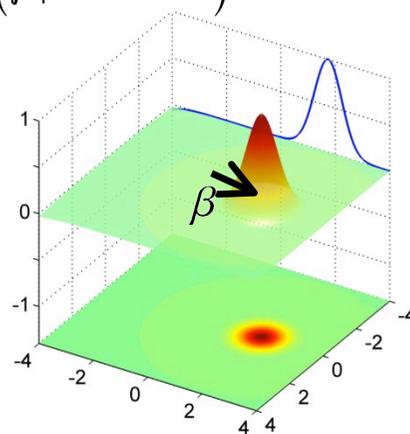
$|0\rangle$



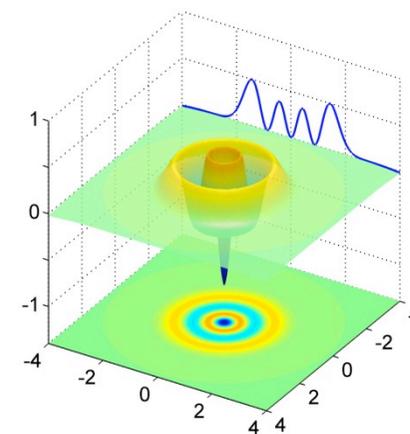
$$\alpha = x + ip$$

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$(|\beta|^2 = \bar{n} = 3)$



$|n\rangle$  ( $n=3$ )



# Etat chat de Schrödinger (rappel)

Chat de Schrödinger Superposition de deux états cohérents de phases opposées

Mélange statistique

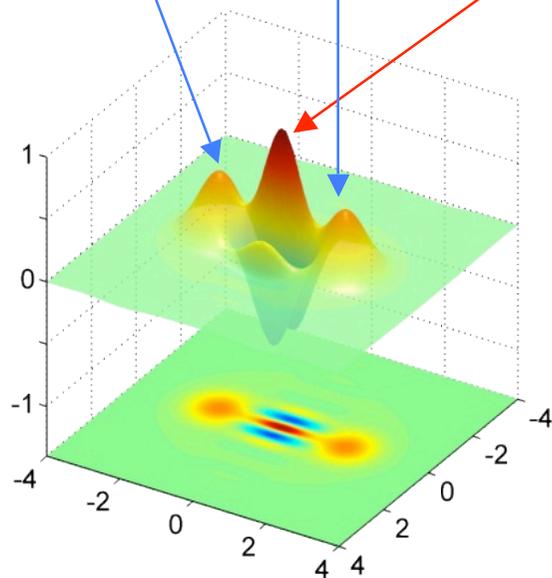
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\beta\rangle + |-\beta\rangle]$$

$$\rho_{\text{chat}} = \frac{(|\beta\rangle + |-\beta\rangle)(\langle\beta| + \langle-\beta|)}{2}$$

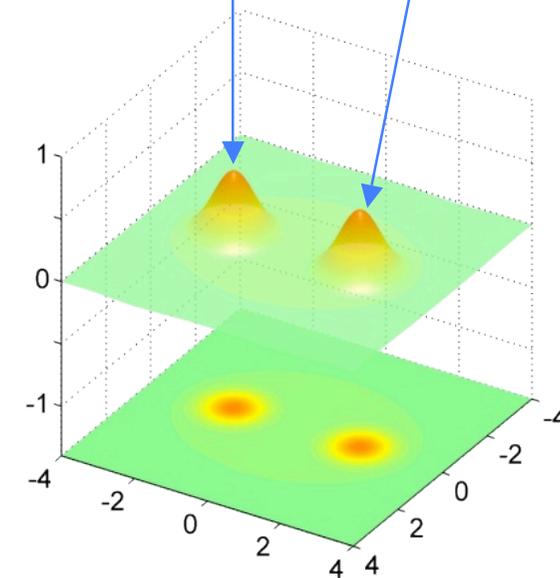
$$= \frac{|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta| + |\beta\rangle\langle-\beta| + |-\beta\rangle\langle\beta|}{2}$$

$\neq$

$$\rho_{\text{mélange}} = \frac{|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta|}{2}$$



décohérence



Les termes  $|\beta\rangle\langle-\beta|$  et  $|-\beta\rangle\langle\beta|$  de l'opérateur densité du « chat » correspondent aux oscillations non-gaussiennes de sa fonction de Wigner. La décohérence fait disparaître ces oscillations et réduit la fonction de Wigner à une somme des fonctions associées aux deux états cohérents  $|\beta\rangle$  et  $|-\beta\rangle$  (voir cours antérieurs).

**VI-B**

**Reconstruction par tomographie  
de l'état d'un mode du champ**

# Méthodes standard de reconstruction d'états du champ

Si l'on dispose d'un grand nombre de copies d'un mode du champ préparé dans un état donné, la reconstruction de l'état (opérateur densité ou fonction de Wigner) repose sur des mesures statistiques d'observables réalisées sur ces copies. Nous allons considérer dans la suite deux méthodes de mesure « standard »:

**Tomographie quantique:** La première (tomographie quantique) repose sur la mesure des distributions de quadratures du champ  $\Pi(x_\varphi)$  pour différents  $\varphi$  (en terme d'observables, déterminer  $\Pi(x_\varphi)$  revient à mesurer tous les moments de  $X_\varphi$ ). A partir des  $\Pi(x_\varphi)$  on calcule  $W$  et donc  $\rho$  en « inversant » les relations (6-32) (transformation de Radon). La mesure des quadratures se fait par une méthode d'homodynage qui mélange le champ à mesurer avec un champ de référence (oscillateur local) de phase variable. Cette méthode est bien adaptée à la mesure de champ optiques se propageant librement ou dans des fibres optiques.

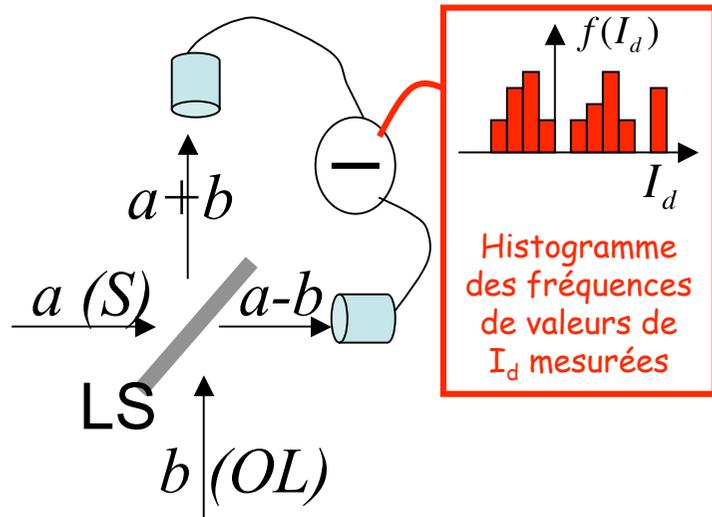
**Mesure de parité:** La seconde méthode, plus directe, consiste à translater le champ dans l'espace des phases (ce qui correspond comme l'homodynage à un mélange du champ avec une référence cohérente) puis à mesurer la parité du nombre de photons dans le champ obtenu [eq.(6-27)]. Cette méthode donne directement la valeur de la fonction de Wigner en différents points correspondant aux amplitudes des champs de translation utilisés. Elle est bien adaptée à l'étude de champs micro-onde piégés dans une cavité. Nous la décrirons plus en détail dans la prochaine leçon.

# Principe de la tomographie par détection homodyne des distributions de quadratures

On mesure les distributions de probabilités  $\Pi_\varphi(\mathbf{x})$  de quadratures  $X_\varphi$  du champ. Pour chaque  $\varphi$ , on obtient les valeurs de  $W$  intégrée sur la quadrature conjuguée  $X_{\varphi+\pi/2}$ :

$$\Pi_\varphi(x) = \int W(x, x_{\varphi+\pi/2}) dx_{\varphi+\pi/2} \quad (6-35)$$

- A partir des intégrales de  $W$  obtenues pour un grand nombre de valeurs de  $\varphi$  et de  $x$ , on remonte par un procédé mathématique de tomographie (transformation de Radon) à la fonction  $W$  et à  $\rho$ .
- La détermination de  $\Pi_\varphi(\mathbf{x})$  se fait par détection homodyne (voir cours antérieurs):

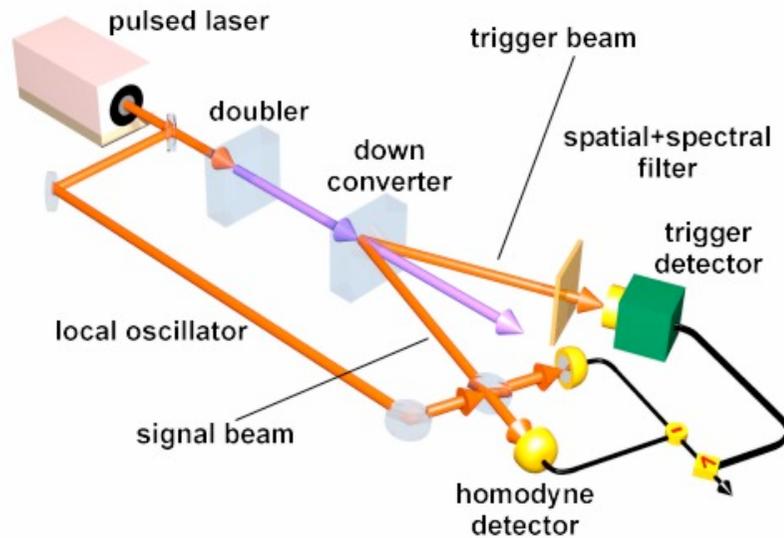


Le champ  $S$  à mesurer (opérateur d'annihilation  $a$ ) et un champ cohérent de phase  $\varphi$  variable (oscillateur local OL, amplitude  $\beta$ , opérateur d'annihilation  $b$ ) de même fréquence que  $S$  sont mélangés par une lame séparatrice LS. Le signal  $I_d$  est la différence des photocourants de détection dans les voies de sortie de la LS. Si l'OL est intense, il est quasi-classique et les fluctuations de  $I_d$  reflètent celles de la quadrature  $X_\varphi$  de  $S$  [(eq.(6-36)]. Si  $S$  est continu, on compte les photons dans un intervalle de temps  $\Delta t$  fixé, on recommence  $N$  fois et on construit l'histogramme donnant  $\Pi_\varphi(\mathbf{x})$  (hypothèse ergodique). Si le champ est pulsé, on fait la statistique de  $I_d$  détecté dans  $N$  impulsions successives.

$$I_d \propto (a^\dagger + b^\dagger)(a + b) - (a^\dagger - b^\dagger)(a - b) \propto (a^\dagger b + b^\dagger a) \propto |\beta| (a^\dagger e^{i\varphi} + a e^{-i\varphi}) \propto X_\varphi \quad (6-36)$$

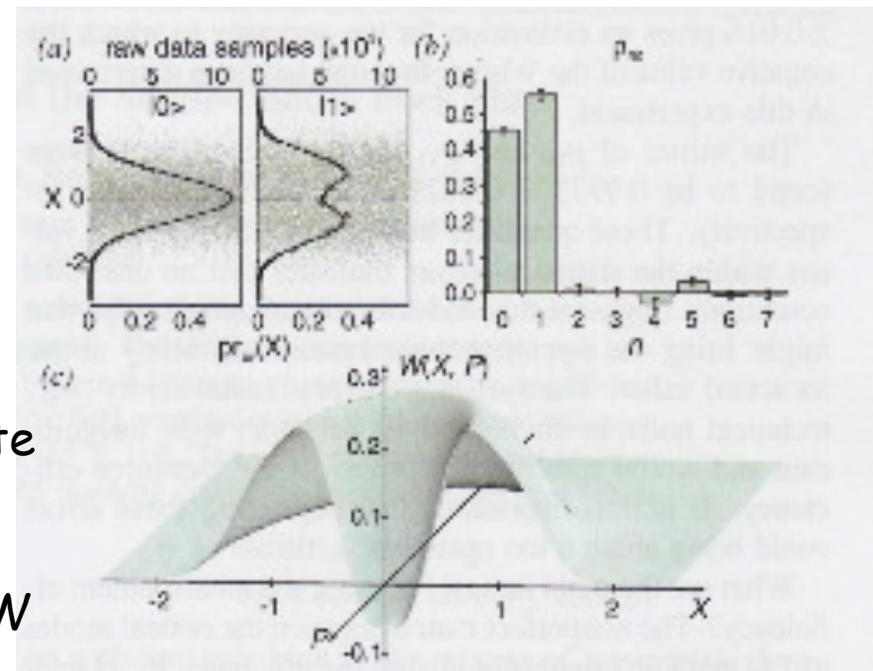
# Reconstruction de l'état de Fock $n=1$

*Lvovsky et al, Phys.Rev.Lett. 87, 050402 (2001)*



Le dispositif est analogue à celui décrit pour le clonage de photon à la leçon 5. Un photon détecté dans le mode « trigger » annonce la présence d'un photon unique dans le mode signal. L'oscillateur local OL est prélevé sur le faisceau pompe, avant doublage de fréquence.

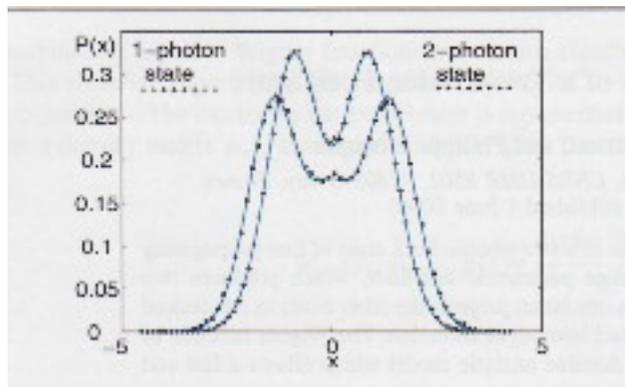
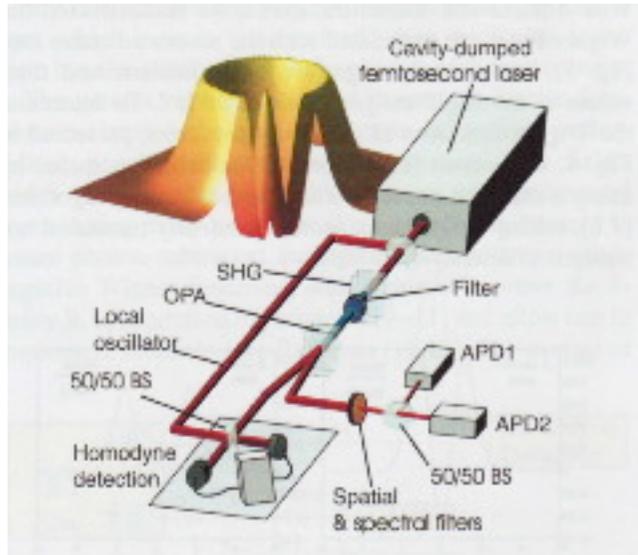
La figure (a) montre pour le vide et pour l'état à 1 photon le signal d'homodynage: le nuage de points présente une petite diminution de densité autour de  $x=0$  pour l'état à un photon, absente pour le vide. La figure b donne la fonction de Wigner déduite par inversion de Radon, avec une valeur légèrement négative autour de l'origine. La fig.c montre l'opérateur densité déduit de  $W$  (éléments diagonaux).



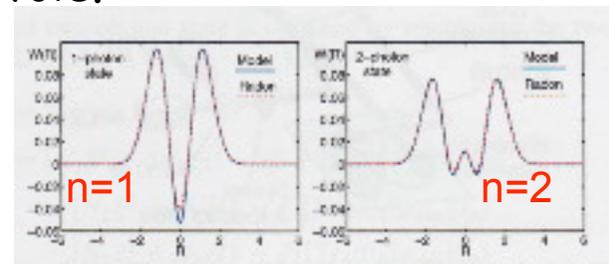
# Reconstruction de l'état de Fock $n=2$

A. Ourjountsev et al, Phys.Rev.Lett. 96, 213601 (2006)

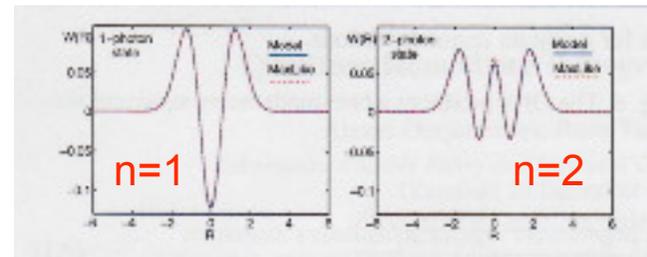
Même principe d'expérience. Maintenant le cristal non-linéaire (OPA) crée **une ou deux** paires de photons par impulsion. Deux photons détectés dans le faisceau « trigger » sur les diodes à avalanche APD1 et APD2 annoncent deux photons dans l'autre voie, qui sont analysés par homodyne. Un seul photon détecté annonce l'arrivée d'un photon unique dans l'autre voie.



Histogrammes de distributions de quadrature pour les états à 1 et 2 photons



Fonctions de Wigner radiales obtenues directement par transformation de Radon des signaux de quadrature



Fonctions de Wigner améliorées reconstruites par traitement Max Like (voir &VI-C)

# Fidélités de préparation et de reconstruction

La fidélité de l'état reconstruit dans ces expériences peut être décrite en séparant le processus de préparation de l'état de Fock de celui de sa reconstruction. Dans le cas simple de l'état à 1 photon, des événements «parasites» donnant lieu à un signal détecté non voulu doivent être considérés. Parmi eux:

- Un clic de courant d'obscurité du trigger déclenche la mesure homodyne alors qu'aucun photon n'arrive.
- Le clic du « trigger » est réel, mais le photon signal est absorbé avant d'arriver au détecteur homodyne.

Dans ces cas, c'est le vide qui est mesuré par l'analyseur homodyne. En appelant  $\eta_p$  (fidélité de préparation) la probabilité qu'aucun de ces processus ne se produise, on peut écrire l'état réellement préparé sous la forme:

$$\rho_p = \eta_p |1\rangle\langle 1| + (1 - \eta_p) |0\rangle\langle 0| \quad (6 - 37)$$

Aux erreurs de préparation s'ajoutent celles de la mesure. Une imperfection de l'accord des modes réduit le contraste des histogrammes  $\Pi(x)$ . Un rendement  $< 1$  des deux détecteurs de photons a un effet analogue. Le résultat peut se décrire phénoménologiquement par une fidélité de mesure  $\eta_m$ , l'état reconstruit  $\rho_m$  étant un mélange dans les proportions  $\eta_m$  et  $1 - \eta_m$  de  $\rho_p$  et de l'état gaussien du vide:

$$\rho_m = \eta_m \rho_p + (1 - \eta_m) |0\rangle\langle 0| = \eta_m \eta_p |1\rangle\langle 1| + (1 - \eta_m \eta_p) |0\rangle\langle 0| \quad (6 - 38)$$

# Fidélités de préparation et de reconstruction (suite)

La valeur à l'origine de l'espace des phases de  $W$  s'écrit donc pour l'état reconstruit:

$$W_m(0) = \frac{2}{\pi} \sum_n (-1)^n \langle n | \rho_m | n \rangle = \frac{2}{\pi} (1 - 2\eta_m \eta_p) \quad (6-39)$$

La démonstration directe du caractère non-classique de l'état du champ ( $W_m(0) < 0$ ) exige donc de remplir la condition portant sur le produit des fidélités de préparation et de reconstruction:

$$\eta_m \eta_p > \frac{1}{2} \quad (6-40)$$

Dans les expériences décrites plus haut, on a  $\eta_m \eta_p \sim 0,55$  à  $0,60$  et la mesure directe de  $W(0)$  donne une valeur (légèrement) négative.

On améliore cette « négativité » en distinguant l'opérateur préparé et l'opérateur reconstruit. La fidélité de mesure  $\eta_m$  est en effet calibrable indépendamment et sa connaissance peut être exploitée pour estimer, à partir des mesures, l'opérateur  $\rho_p$ . La méthode d'estimation, basée sur le principe Max Like, est décrite au §VI-C. Les résultats de l'estimation Max Like *tenant compte des imperfections de mesure connues* montrent que les valeurs négatives de  $W$  sont multipliées par un facteur de 2 à 3 lorsqu'on estime l'état réellement préparé.

**VI-C**

**Reconstruction d'états par  
maximum de vraisemblance**

# Problèmes de la reconstruction directe

La méthode de reconstruction tomographique directe repose sur une formulation mathématique exacte du problème qui contraint de façon « rigide » les éléments de matrice de  $\rho$  (ou les valeurs de la fonction  $W$ ) lorsqu'un grand nombre de mesures ont été faites. Elle revient à identifier les fréquences de mesures obtenues (données par des histogrammes expérimentaux) aux valeurs théoriques exactes attendues (données par leur expression en fonction de  $\rho$  ou de  $W$ ), ce qui conduit à la résolution d'un grand nombre d'équations couplées. Si les mesures sont entachées de bruit systématique ou si les échantillons ne sont pas assez grand, entraînant des fluctuations statistiques importantes, les équations à résoudre peuvent conduire à un  $\rho$  grossièrement faux, voire non physique ( $\rho$  avec valeurs propres négatives).

Un point fondamental est que les mesures sont faites avec un appareil non idéal. Ses imperfections sont cependant quantifiables et peuvent être mesurées dans des opérations de calibrations préliminaires. L'introduction de ces informations dans la procédure de dépouillement des données permet de remonter à l'état préparé, différent de l'état « brut » mesuré.

Une façon naturelle de procéder est d'utiliser pour déterminer  $\rho$  la stratégie d'estimation par **maximum de vraisemblance (Max Like)** que nous avons esquissée à la leçon 2. Cette stratégie fournit une méthode générale, facilement mise en œuvre par un ordinateur, qui conduit automatiquement pour  $\rho$  et  $W$  à un résultat physique (pas de probabilités négatives!) en exploitant « au mieux » toute l'information que l'on a sur le système à mesurer et sur l'appareil de mesure.

# Méthode Max Like de reconstruction

Suivant les principes de la théorie de l'estimation (leçon 2), on infère à partir de résultats de mesures l'opérateur  $\rho$  le plus vraisemblable reproduisant la statistique de  $N$  observations d'un système quantique. On fait la liste des états propres de toutes les observables mesurées, chacun étant repéré par un indice  $i$ . On appelle  $\Pi_i = |y\rangle_i \langle y|$  le projecteur sur l'état propre  $|y\rangle_i$  d'une observable. On exprime le résultat d'une expérience comme la donnée de la liste des  $i$ , chacun des termes étant affecté d'un poids égal à la fréquence  $f_i = n_i/N$  des observations ayant donné le résultat correspondant. Si les observables ont un spectre continu, on le discrétise en « pas » (« bins ») et on se ramène toujours au cas discret. La probabilité théorique  $p_i$  d'obtention d'un résultat  $i$  pour un système décrit par  $\rho$  est:

$$p_i = k \text{Tr}[\rho \Pi_i] \quad (6 - 41)$$

où  $k$  est une constante qui dépend de la façon dont l'échantillon des mesures est construit. Par exemple, si on a mesuré sur un ensemble de qubits tous dans le même état les trois observables  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  en consacrant un tiers des mesures à chacune, on a 6 projecteurs  $\Pi_i$  (sur les états propres  $|\pm 1\rangle$  de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ ) et  $k = 1/3$ . On peut donc renormaliser les  $\Pi_i$  et considérer la mesure globale comme celle d'un POVM défini par les opérateurs positifs  $E_i = k\Pi_i$  satisfaisant la relation de fermeture:

$$p_i = \text{Tr}[\rho E_i] \quad ; \quad \sum_i E_i = 1 \quad (6 - 42)$$

En tomographie homodyne, les  $E_i$  sont proportionnels aux projecteurs  $|x\rangle_{\varphi\varphi} \langle x|$  sur les états propres des quadratures  $X_\varphi$ . La normalisation dépend de la discrétisation utilisée (nombre de bins du spectre de  $X_\varphi$  et nombre d'angles de phase choisis).

# Fonctionnelle de vraisemblance de la mesure

La fonction de vraisemblance  $L(\rho)$  d'un résultat  $\{i, j, \dots\}$  est la fonctionnelle de  $\rho$  égale à la probabilité d'observer ce résultat quand le système est dans l'état décrit par  $\rho$ :

$$L(\rho) = p(i, j, \dots, k, \dots | \rho) = \left( N! / \prod_j n_j! \right) \prod_i (Tr[\rho E_i])^{N f_i} \quad (6-43)$$

soit en passant au logarithme ( $C$  étant le logarithme du facteur combinatoire):

$$\text{Log}[L(\rho)] = C + N \sum_i f_i \text{Log}[Tr\{\rho E_i\}] \quad (6-44)$$

S'inspirant de la théorie classique de l'estimation, **Max Like** consiste à trouver  $\rho$  qui maximise cette fonction dépendant des fréquences mesurées  $f_i$ .

$$\text{Log}[L(\rho)] \leq C + N \sum_i f_i \text{Log}(f_i) \quad (6-45)$$

conséquence de la relation vraie pour tout ensemble de positifs  $x_i$  (concavité du log):

$$\text{Log}\left(\sum_i x_i f_i\right) \geq \sum_i f_i \text{Log} x_i \quad \left(f_i \geq 0; \sum_i f_i = 1\right) \quad (6-46)$$

L'inégalité (6-46) exprimée pour  $x_i = \text{Tr}\{\rho E_i\}/f_i$  et compte tenu de (6-42) et (6-44) donne bien (6-45).  $\text{Log}[L(\rho)]$  est donc borné par le membre de droite de (6-45) et la recherche du maximum de vraisemblance revient à déterminer l'opérateur  $\rho$  tel que  $\text{Log}[L(\rho)]$  s'approche le plus possible de la borne, satisfaisant le 'mieux possible' les relations:

$$\text{Tr}[\rho E_i] = f_i \quad (6-47)$$

faisant ainsi coïncider au mieux fréquences mesurées et probabilités théoriques.

# Méthode itérative de reconstruction de $\rho$

La recherche de l'opérateur  $\rho_{ML}$  maximisant  $L(\rho)$  peut se faire par une méthode itérative particulièrement bien adaptée au calcul sur ordinateur [A.Lvovsky, *Journ.of Optics B-Quantum and semiclassical optics* 6, 5556 (2004)]. On commence par définir à partir des résultats des mesures un opérateur de l'espace de Hilbert du système S, fonction non linéaire de  $\rho$ :

$$R(\rho) = \sum_i \frac{f_i E_i}{\text{Tr}[\rho E_i]} \quad (6-48)$$

qui pour  $\rho \rightarrow \rho_{ML}$  et  $\text{Tr}\{\rho E_i\} \rightarrow f_i$  doit donner une bonne approximation de  $\sum_i E_i = I$ . On en déduit que  $R(\rho_{ML})$  doit satisfaire « au mieux » les identités:

$$R(\rho_{ML})\rho_{ML} = \rho_{ML}R(\rho_{ML}) = R(\rho_{ML})\rho_{ML}R(\rho_{ML}) = \rho_{ML} \quad (6-49)$$

Pour approcher  $\rho_{ML}$ , on part d'une solution à l'ordre 0,  $\rho_0$  (par exemple l'opérateur identité à trace normalisée à l'unité) et on calcule des approximations successives  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k$  par la chaîne itérative suivante, où les  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{k+1}$  sont des facteurs de normalisation assurant la trace unité des  $\rho_k$ :

$$\rho_0 \rightarrow R(\rho_0)\rho_0R(\rho_0) = \mathcal{N}_1 \rho_1 \rightarrow R(\rho_1)\rho_1R(\rho_1) = \mathcal{N}_2 \rho_2 \cdots \rightarrow \cdots \rho_k \rightarrow R(\rho_k)\rho_kR(\rho_k) = \mathcal{N}_{k+1} \rho_{k+1} \cdots \rightarrow \rho_{ML} \quad (6-50)$$

La méthode converge généralement au bout d'un nombre fini d'itérations, donnant une matrice  $\rho_k$  qui reste pratiquement fixe si on poursuit la procédure. Ce point fixe satisfait alors au mieux (6-49) et constitue la solution  $\rho_{ML}$  cherchée. Cette solution est *par construction positive et normée* et est donc un « bon » opérateur densité.

# Exemple de convergence de la méthode

Supposons qu'une mesure de  $\sigma_z$  et  $\sigma_x$  sur un qubit dont le vecteur de Bloch est dans le plan xOz a donné les résultats  $\{+1,+1\}$ . La procédure d'estimation Max Like peut alors être menée exactement. On trouve l'opérateur densité (voir leçon 2):

$$\rho_{ML} = \frac{1}{2} \left[ I + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,853 & 0,353 \\ 0,353 & 0,147 \end{pmatrix} \quad (6-51)$$

Comparons avec la méthode itérative appliquée à partir de  $\rho_0 = I/2$  :

$$R(\rho_0) = \frac{1}{2} \frac{|+\rangle_z \langle +|}{\langle +|(I/2)|+\rangle_z} + \frac{1}{2} \frac{|+\rangle_x \langle +|}{\langle +|(I/2)|+\rangle_x} = |+\rangle_z \langle +| + |+\rangle_x \langle +| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6-52)$$

ce qui donne à la première itération:

$$\rho_1 \propto (|+\rangle_z \langle +| + |+\rangle_x \langle +|) \rho_0 (|+\rangle_z \langle +| + |+\rangle_x \langle +|) = \frac{1}{2} (|+\rangle_z \langle +| + |+\rangle_x \langle +|)^2$$

$$\rightarrow \rho_1 = \frac{1}{\mathcal{N}_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{\mathcal{N}_1} \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,833 & 0,333 \\ 0,333 & 0,167 \end{pmatrix} \quad (6-53)$$

...avec la fidélité:

$$F_1 = \text{Tr}(\rho_{ML} \rho_1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{8}{9}} \right) = 0,971 \quad (6-54)$$

et à la seconde itération:

$$R(\rho_1) = \frac{1}{2} \frac{|+\rangle_z \langle +|}{\langle +|\rho_1|+\rangle_z} + \frac{1}{2} \frac{|+\rangle_x \langle +|}{\langle +|\rho_1|+\rangle_x} \propto |+\rangle_z \langle +| + |+\rangle_x \langle +| = R(\rho_0) \propto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \rho_2 \propto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rho_1 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 \rightarrow \rho_2 = \frac{1}{\mathcal{N}_2} \begin{pmatrix} 116 & 48 \\ 48 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \quad (6-55)$$

...la fidélité est devenue:

$$F_2 = \text{Tr}(\rho_{ML} \rho_2) = \frac{1}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{17}$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{288}{289}} \right) = 0,99913... \quad (6-56)$$

# Prise en compte des erreurs de mesure

Max Like peut incorporer les imperfections de l'appareil dans la reconstruction. La mesure d'une observable sur un système préparé dans un état propre  $j$  de cette observable donne le résultat  $i$  avec la loi de probabilité  $p_i = \eta_{ij}$  qui n'est égale à  $\delta_{ij}$  que dans le cas idéal. Les  $\eta_{ij}$  forment en général une matrice avec des éléments non-diagonaux décrivant les erreurs de mesure. Cette matrice caractérise l'appareil et est déterminée par des calibrations. La probabilité d'obtenir un résultat est normée:

$$\sum_i \eta_{ij} = 1 \quad (\forall j) \quad (6-57)$$

Lorsque l'on tient compte des imperfections, la probabilité de trouver le résultat  $i$  conditionnée au fait que le système est dans l'état décrit par  $\rho$  devient:

$$p(i|\rho) = \sum_j \eta_{ij} \text{Tr}[E_j \rho] = \text{Tr}[E_i^{(\eta)} \rho] \quad (6-58)$$

en définissant le nouveau POVM:  $E_i^{(\eta)} = \sum_j \eta_{ij} E_j$  (6-59)

qui compte tenu de (6-57) satisfait bien la relation de fermeture:

$$\sum_i E_i^{(\eta)} = \sum_{i,j} \eta_{ij} E_j = \sum_j E_j = I \quad (6-60)$$

La méthode itérative doit maintenant être menée avec le nouvel opérateur  $R^{(\eta)}(\rho)$ :

$$R^{(\eta)}(\rho) = \sum_i \frac{f_i E_i^{(\eta)}}{\text{Tr}[E_i^{(\eta)} \rho]} \quad (6-61)$$

C'est en appliquant une procédure de ce type à leurs mesures tomographiques que Ourjoumtsev et al ont obtenu les  $W$  améliorées pour  $n=1$  et 2 photons (voir page 10).