

# Cours 2009-2010: Septième Leçon

## 1<sup>er</sup> Mars 2010

Nous commençons (&VI I -A) par présenter dans cette dernière leçon la méthode de reconstruction d'états inspirée par le principe d'entropie maximum (Max Ent). Cette méthode est basée sur un argument thermodynamique différent du principe de maximum de vraisemblance (Max Like) décrit à la leçon 6. Alors que Max Like repose sur des analyses de fréquences de mesures, Max Ent exploite plutôt des valeurs moyennes. Max Ent est la méthode naturelle lorsque les mesures sont effectuées sur un ensemble incomplet d'observables. Lorsque un grand nombre de mesures sur un ensemble suffisant d'observables contraint complètement l'opérateur densité, Max Ent et Max Like donnent des résultats équivalents et le choix d'utiliser l'une ou l'autre dépend de considérations pratiques de calcul. Avant de décrire l'application de Max Ent et de Max Like à des reconstructions d'états du champ piégé dans une cavité, nous rappelons (& VI I -B) les principes généraux de l'Electrodynamique quantique en cavité (CQED) et plus particulièrement les effets de déplacement lumineux des niveaux d'énergie d'atomes de Rydberg exploités dans nos reconstructions. Nous analysons ensuite les expériences faites sur des états *chats de Schrödinger* (&VI I -C) et des *états de Fock* (&VI I -D). Le dernier séminaire complètera le cours en décrivant des synthèses et reconstructions d'états d'un champ micro-onde dans des expériences d'Electrodynamique des Circuits très semblables dans leur esprit à celles de CQED,

## VII - A

# Reconstruction d'états par principe d'entropie maximum

[Vladimír Bužek and Gabriel Drobný : Quantum tomography via MaxEnt principle  
J. Mod. Opt. 47 , 823-2840 (2000)]

# La méthode d'entropie maximum (Max Ent)

Nous cherchons à exploiter l'information obtenue sur un système physique sous la forme des valeurs moyennes  $g_i$  de  $N$  observables  $G_i$  devant satisfaire les relations:

$$\text{Tr}\{\rho G_i\} = g_i \quad (7-1)$$

Alors que Max Like détermine l'opérateur maximisant la probabilité d'obtention des fréquences de valeurs propres observées, la méthode d'entropie maximum Max Ent obéit à une logique différente. Elle cherche *parmi tous les opérateurs qui satisfont les contraintes (7-1)*, celui qui a l'entropie  $S(\rho) = -\text{Tr}\{\rho \log \rho\}$  *la plus grande possible*. Cette condition, naturelle lorsque l'ensemble des  $G_i$  mesurés ne fournit qu'une information partielle sur le système, revient à ne faire sur  $\rho$  *aucune hypothèse autre que celles imposées par les résultats des mesures*.

La recherche de  $\rho$  se ramène à un problème de variation sous  $N+1$  contraintes (les  $N$  décrites par les eqs (7-1) auxquelles on ajoute  $\text{Tr}\rho = 1$ ). La méthode classique pour résoudre ce problème est celle des *multiplicateurs de Lagrange* évoquée à la leçon 3. On introduit  $N+1$  coefficients réels  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N$  et on cherche l'extremum de la combinaison linéaire de  $S$  et des contraintes affectées de ces coefficients et considérées comme des fonctionnelles de  $\rho$ :

$$\delta S - \lambda_0 \delta[\text{Tr}\rho] - \sum_i \lambda_i \delta[\text{Tr}\rho G_i] = 0 \quad (7-2)$$

soit:

$$\delta \left[ \text{Tr}\rho \left\{ \text{Log}\rho + \lambda_0 I + \sum_i \lambda_i G_i \right\} \right] = \text{Tr} \left[ \delta\rho \left\{ \text{Log}\rho + \lambda_0 I + \sum_i \lambda_i G_i \right\} \right] + \text{Tr}[\rho \delta\{\text{Log}\rho\}] = 0 \quad (7-3)$$

# La méthode d'entropie maximum (suite)

De la relation(\*)  $Tr[\rho\delta\text{Log}\rho]=Tr[I\delta\rho]$  on déduit:

$$Tr\left[\delta\rho\left\{\text{Log}\rho + (\lambda_0 + 1)I + \sum_i \lambda_i G_i\right\}\right] = 0 \quad (7-4)$$

L'éq.(7-4) doit être vraie pour  $\delta\rho = \delta\varepsilon |m\rangle\langle m'|$ ,  $\forall |m\rangle, |m'\rangle$  ce qui impose au terme entre  $\{ \}$  d'être nul et met  $\rho$  sous la *forme canonique d'une exponentielle d'opérateur (\*\*)*:

$$\rho_{ME} = e^{-(\lambda_0 + 1)I - \sum_i \lambda_i G_i} = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i \lambda_i G_i} \quad ; \quad Z = Tr\left\{ e^{-\sum_i \lambda_i G_i} \right\} \quad (7-5)$$

Les  $\lambda_i$  sont fixés en satisfaisant au mieux les contraintes (7-1) par la méthode des moindres carrés. On cherche par itération les valeurs des  $\lambda_i$  minimisant la somme:

$$\chi^2 = \sum_i \left| Tr\left\{ (G_i - g_i) \frac{1}{Z} e^{-\sum_i \lambda_i G_i} \right\} \right|^2 \quad (7-6)$$

---

<p>(*) On écrit <math>\rho</math> dans sa base propre : <math>\rho = \sum_m  m\rangle \varepsilon_m \langle m </math> (7-4a)</p> <p>d'où <math>\text{Log}\rho = \sum_m  m\rangle \text{Log}(\varepsilon_m) \langle m </math> (7-4b)</p> <p>et <math>\delta\text{Log}\rho = \sum_m  m\rangle \frac{\delta\varepsilon_m}{\varepsilon_m} \langle m  + \sum_m \text{Log}(\varepsilon_m) ( \delta m\rangle \langle m  +  m\rangle \langle \delta m )</math> (7-4c)</p>	<p>où <math> \delta m\rangle</math> vérifie la condition de normalisation :</p> $\langle \delta m   m \rangle + \langle m   \delta m \rangle = \delta \langle m   m \rangle = 0 \quad (7-4d)$ <p>On déduit alors de (7-4a,b,c,d) :</p> $Tr\rho\delta\text{Log}\rho = \sum_m \delta\varepsilon_m + \sum_m \varepsilon_m \text{Log}\varepsilon_m \delta \langle m   m \rangle = Tr[I\delta\rho]$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

---

(\*\*) Le même argument est employé en physique statistique pour mettre l'état d'un oscillateur sous la forme exponentielle  $\rho \sim \exp(-H/k_B T)$  lorsqu'on ne fixe que son énergie moyenne, c-à-d sa température ( $\langle H \rangle = k_B T$ ).

# Estimation de mesures binaires par Max Ent

Appliquons Max Ent à l'analyse des mesures sur un système d'un ensemble d'observables *binaires*  $G_i$  n'ayant que *deux valeurs propres  $\pm 1$* . C'est le cas d'un qubit pour lequel on mesure les opérateurs de Pauli  $\sigma_i$  ( $i=x,y,z$ ) ou encore d'un mode du champ quand on détermine son état par mesure des parités du nombre de photons translatées dans l'espace des phases  $D(\alpha_i) \rho D(-\alpha_i)$ . Dans ces cas, la donnée des valeurs moyennes  $\langle G_i \rangle = [f_i(+1) - f_i(-1)] / [f_i(+1) + f_i(-1)]$  contient la même information que celle des fréquences  $f_i(\pm 1)$  des résultats  $+1$  et  $-1$ . On s'attend alors à ce que sur un grand nombre de mesures, Max Like (qui fait une analyse des fréquences) et Max Ent (qui exploite des valeurs moyennes) donnent des résultats équivalents. Montrons que c'est bien le cas pour des mesures de qubits. La forme canonique de l'opérateur densité Max Ent s'écrit:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i \lambda_i \sigma_i} \quad \text{avec} \quad \sum_i \lambda_i \sigma_i = |\lambda| \sum_i \xi_i \sigma_i = |\lambda| \sigma_\xi \quad ; \quad \xi_i = \frac{\lambda_i}{|\lambda|} \quad \left( |\lambda| = \sqrt{\sum_i \lambda_i^2} \right) \quad (7-7)$$

On développe alors l'exponentielle de  $\rho$  tenant compte de l'identité  $\sigma_\xi^2 = I$ :

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-|\lambda| \sigma_\xi} = \frac{1}{Z} [\cosh|\lambda| I - \sinh|\lambda| \sigma_\xi] = \frac{1}{2} [I - \tanh|\lambda| \sigma_\xi] \quad (7-8)$$

et on détermine les  $\lambda_i$  en identifiant  $\text{Tr} \rho \sigma_i$  aux valeurs moyennes mesurées  $P_i$  des  $\sigma_i$ . On obtient, comme pour Max Like (et comme pour la reconstruction tomographique directe):

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ I + \sum_i P_i \sigma_i \right] \quad (7-9)$$

# Max Ent et observables à plus de 2 valeurs propres

Si les opérateurs  $G_i$  ont plus de deux valeurs propres, l'information traitée par Max Ent est a priori moins riche que celle de Max Like qui exploite les détails des histogrammes de valeurs mesurées et pas seulement leurs moyennes. Ainsi, si on mesure des quadratures  $X_\varphi$  du champ, les fréquences  $f(x_\varphi)$  incluses dans la procédure Max Like contiennent plus d'information que les valeurs moyennes  $\langle X_\varphi \rangle = \int x_\varphi f(x_\varphi) dx_\varphi$ . On peut toujours améliorer Max Ent en ajoutant aux  $G_i$  leurs moments  $G_i^2, G_i^3$  etc...avec leurs multiplicateurs de Lagrange dans l'exponentielle canonique donnant l'expression de  $\rho$  qui devient:

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp \left[ - \sum_i \lambda_i^{(1)} G_i - \sum_i \lambda_i^{(2)} G_i^2 - \dots \right] \quad (7-10)$$

Les moments sont déterminés à partir des histogrammes des mesures et si ces histogrammes sont enregistrés il n'y a aucune raison de se priver de l'information qu'ils contiennent. Lorsqu'on a introduit ces moments dans l'analyse on s'attend à ce que Max Ent donne un résultat équivalent à Max Like. Comme pour Max Like, l'opérateur densité obtenu est automatiquement 'physique' (positif de trace unité). La méthode que l'on emploie dépend de considérations pratiques (longueur du calcul notamment). Nous ne discutons pas ici de ces aspects techniques. Nous comparons plus loin Max Like et Max Ent sur un exemple (reconstruction d'états de Fock).

# VII - B

## Rappels sur l'électrodynamique quantique en cavité (CQED)

S.Haroche et Jean-Michel Raimond,

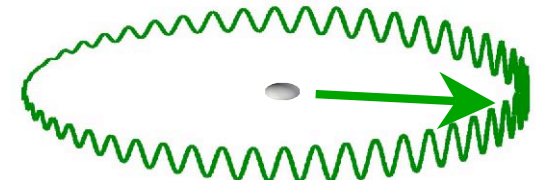
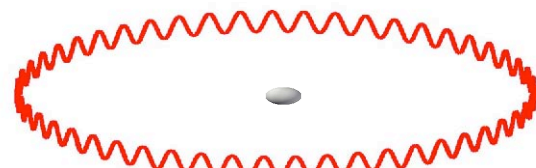
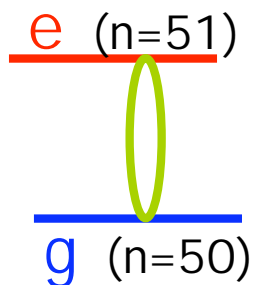
Exploring the Quantum: Atoms, cavities and photons, Oxford UP(2006)

# CQED micro-onde



Couplage d'un atome avec un mode du champ micro-onde ( $\omega/2\pi = 51$  GHz) dans une cavité de grand facteur de qualité  $Q$ . La cavité Fabry-Perot est formée de miroirs supraconducteurs aux surfaces usinées avec précision. Le facteur  $Q$  vaut  $4 \cdot 10^{10}$  et le temps d'amortissement du champ  $T_{\text{cav}} = \omega/Q = 0,130$  s.

Atomes de Rydberg circulaires de grand nombre quantique principal ( $n \sim 50$ ) et moment angulaire maximum. Ce sont des atomes «quasi-classiques» de diamètre orbital  $\sim 10^{-7}$  m ayant une longue durée de vie radiative ( $T_a = 0,030$  s) et un très fort couplage au rayonnement micro-onde. Une impulsion résonnante sur la transition entre deux niveaux voisins  $e$  ( $n=51$ ) et  $g$  ( $n=50$ ) prépare un dipôle atomique (vecteur de Bloch dans le plan équatorial de la sphère de Bloch).



$$|e\rangle = |0\rangle_a \xrightarrow{\text{pulse résonnant } \pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_a + |1\rangle_a)$$

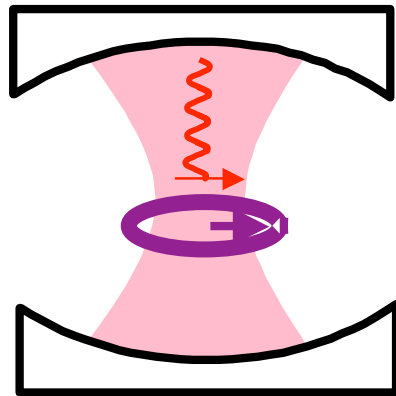
Atome à deux états 'utiles' décrit comme un qubit



# Déplacements des énergies atomiques (light shifts) induits par le champ quantique

La cavité a une fréquence  $\omega = \omega_a - \delta$  légèrement différente de la fréquence de précession du dipôle atomique: les photons ne peuvent être absorbés et l'interaction atome-champ est purement dispersive (effets de phase).

Le champ électrique associé aux photons perturbe la rotation du dipôle et change légèrement sa fréquence (light shift).



$$E_{\text{photon}} \approx \sqrt{\frac{h\nu}{\epsilon_0 V_{\text{boîte}}}} \approx 10^{-3} \text{ V / m}$$

$$E_{\text{atome}} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{at}}^2} \approx 10^5 \text{ V / m}$$

Un effet petit mais mesurable: le champ électrique par photon est environ  $10^8$  fois plus petit que le champ de Coulomb « vu » par l'électron de Rydberg. Le déplacement relatif de la fréquence atomique est de l'ordre de  $4 \cdot 10^{-7}$ , ce qui est suffisant pour déphaser de  $\pi$  la phase du dipôle pendant qu'un atome traverse la cavité:

$$\frac{\Delta\omega_a}{\omega_a} \approx 4 \cdot 10^{-7} / \text{photon} \quad \rightarrow \quad \Delta\omega_a \approx 2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad \rightarrow \quad \Phi_0 = \Delta\omega_a T_{\text{transit}} \approx \pi / \text{photon}$$

# Effets dispersifs en CQED ( $\delta \neq 0$ )

Les déplacements d'énergie se calculent par diagonalisation exacte du hamiltonien de Jaynes-Cummings couplant **2 à 2** les états atome-champ:

$$H_{\text{int}} = -i\hbar \frac{\Omega_0}{2} \left[ a|0\rangle_{aa} \langle 1| - a^\dagger |1\rangle_{aa} \langle 0| \right] \quad ; \quad \Omega_0 = 2 \frac{D_a E_{\text{photon}}}{\hbar} = 2\pi \times 50 \text{kHz} \quad (7-11)$$

Les énergies de la multiplicité  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$  sont:

$$E_n^\pm = (n+1/2)\hbar\omega \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\delta^2 + \Omega_0^2(n+1)} \quad ; \quad (\delta = \omega_a - \omega) \quad (7-12)$$

On identifie les états couplés  $|\pm, n\rangle$  à  $|e, n\rangle$  et  $|g, n+1\rangle$  par débranchement adiabatique du couplage et on obtient les déplacements *exacts* de e et g dans n photons:

$$\frac{\Delta E_e(n)}{\hbar} = \frac{\delta}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\Omega_0^2(n+1)}{\delta^2}} - 1 \right] \quad ; \quad \frac{\Delta E_g(n)}{\hbar} = -\frac{\delta}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\Omega_0^2 n}{\delta^2}} - 1 \right] \quad ; \quad (\delta = \omega_a - \omega) \quad (7-13)$$

et leurs développements au 2<sup>ème</sup> ordre en  $\Omega_0 \sqrt{n} / \delta$ :

$$\frac{\Delta E_e(n)}{\hbar} = \frac{\Omega_0^2(n+1)}{4\delta} + \dots \quad ; \quad \frac{\Delta E_g(n)}{\hbar} = -\frac{\Omega_0^2 n}{4\delta} + \dots \rightarrow \Delta\omega_a = \frac{\Omega_0^2}{2\delta} \left( n + \frac{1}{2} \right) + \dots \quad (7-14)$$

On décrit ces 'light shifts' par un *hamiltonien effectif*, dont l'expression à l'ordre le plus bas en n est:

$$H_{DL} = \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta} a^\dagger a \sigma_z + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta} |0\rangle_a \langle 0| + \dots \quad (7-15)$$

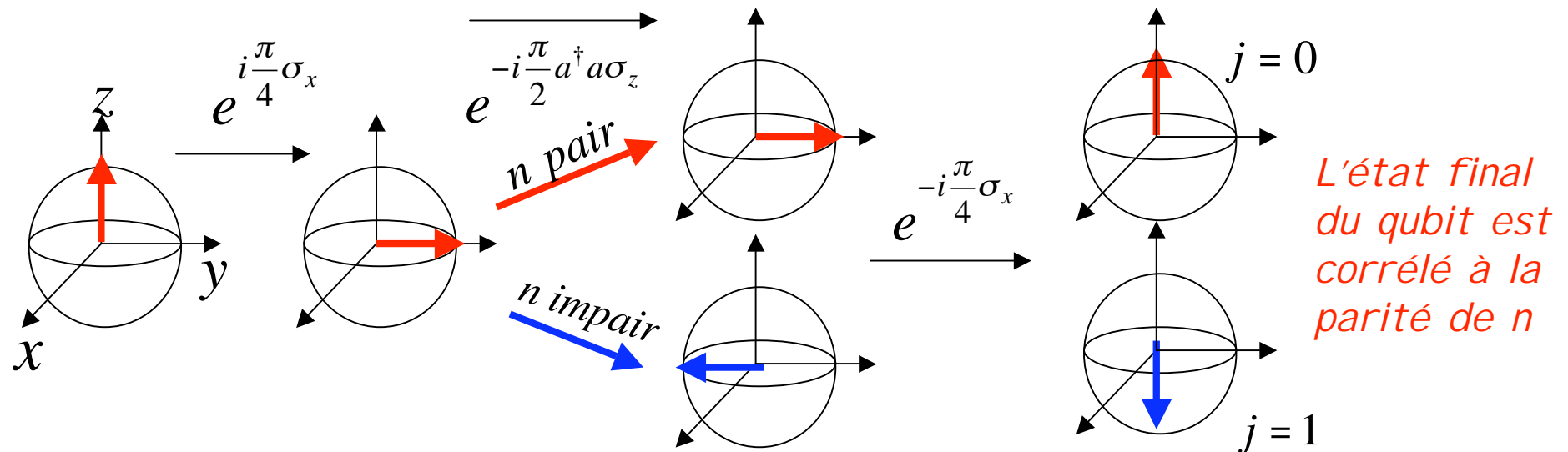
Le terme en  $a^\dagger a \sigma_z$  est une rotation du qubit d'axe Oz et d'angle *proportionnel au nombre de photons*. Le second terme n'agit que sur  $|e\rangle = |0\rangle_a$  et décrit un effet du vide (*Lamb shift dans cavité*), réincorporable dans la définition de l'énergie de  $|e\rangle$ .

# Mesure de la parité du nombre de photons

Considérons l'opérateur unitaire  $U_\rho$  produit de 3 rotations du qubit (a), la seconde étant *conditionnée* par le nombre de photons dans la cavité:

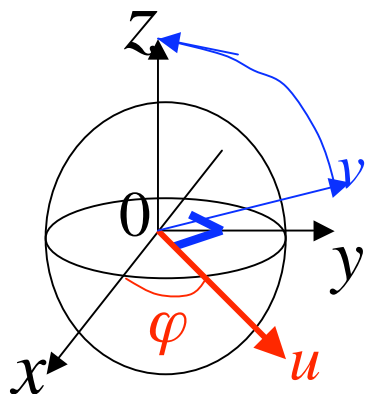
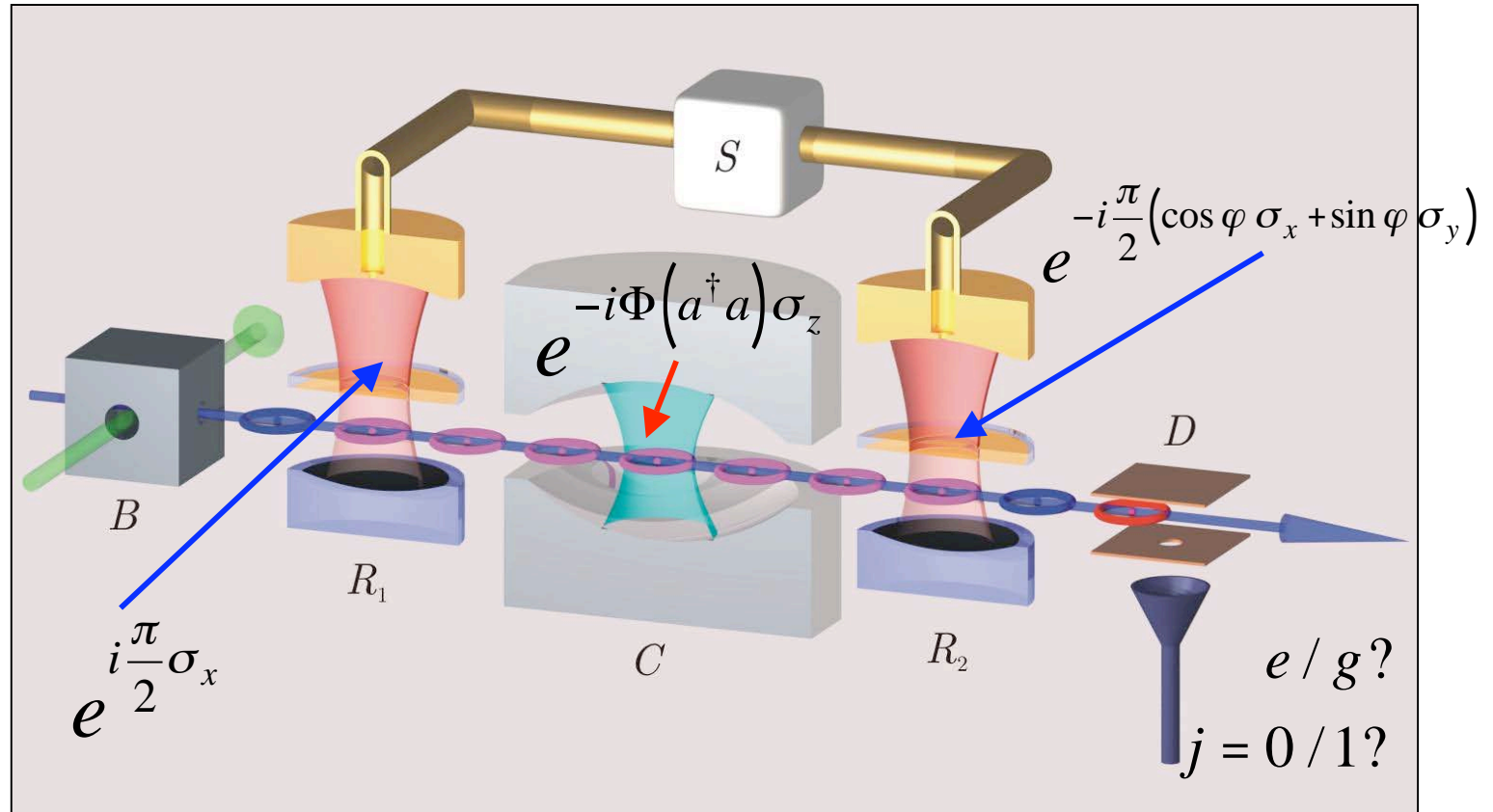
$$U_\rho = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_x} e^{-i\frac{\pi}{2}a^\dagger a \sigma_z} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_x} \quad (7-16)$$

Le vecteur de Bloch bascule vers Oy par rotation d'angle  $-\pi/2$  autour de Ox, de  $|0\rangle_a = |\sigma_z=+1\rangle$  à  $|\sigma_y=+1\rangle$ . Il subit ensuite une rotation autour de Oz d'angle  $n\pi$  *dépendant de n*. Puis enfin une 2<sup>de</sup> rotation autour de Ox opposée à la 1<sup>ère</sup>. Pour **n pair**, la rotation d'axe Oz laisse l'état de (a) invariant (à une phase près). A la fin, (a) revient dans  $|j=0\rangle_a$  si **n est pair** (la 2<sup>de</sup> rotation d'axe Ox annulant l'effet de la 1<sup>ère</sup>). Si **n est impair**, la rotation d'axe Oz bascule (a) vers  $|\sigma_y=-1\rangle$  orthogonal à  $|\sigma_y=+1\rangle$ . La dernière rotation porte donc (a) pour **n impair** dans  $|j=1\rangle_a$  orthogonal à  $|j=0\rangle_a$ .



# Interféromètre de Ramsey

Cavité C entre 2 cavités auxiliaires ( $R_1$ ,  $R_2$ ) où sont effectuées (avec pulses classiques) des rotations d'angle  $\pi/2$  des qubits atomiques. L'état final ( $e/g$ ) est détecté par ionisation dans D



Le 1<sup>er</sup> pulse ( $R_1$ ) amène  $Oz$  sur  $Oy$ . Le 2<sup>nd</sup> pulse ( $R_2$ ) (qui peut être déphasé de  $\varphi$  par rapport au 1<sup>er</sup>) fait la rotation d'angle  $\pi/2$  d'axe  $Ou$  amenant l'axe  $Ov$  ( $\varphi+\pi/2$ ) du plan  $xOy$  sur  $Oz$ : **appliquer ce pulse et détecter (0/1) revient à mesurer le qubit dans la direction  $Ov$ .** Le champ de la cavité C produit, entre les rotations d'axe  $Ox$  et  $Ou$ , une rotation du qubit autour de  $Oz$  d'un angle  $\Phi(a^\dagger a)$  dépendant de  $n$ . Pour mesurer la parité, on fait  $\Phi(a^\dagger a)=\pi a^\dagger a$  et  $\varphi=0$  ( $Ou=Ox$ ).

# Parité mesurée par franges de Ramsey

Si C contient  $n$  photons, l'opérateur  $U_{\rho}$  [défini par (7-16)] laisse  $|0\rangle_a$  inchangé ou le transforme en  $|1\rangle_a$  avec les probabilités:

$$\pi_e = \pi_{j=0} = \frac{1 + \cos n\pi}{2} \quad ; \quad \pi_g = \pi_{j=1} = \frac{1 - \cos n\pi}{2} \quad (7-17)$$

Dans le cas où  $R_2$  fait la rotation  $\pi/2$  d'axe Ou faisant l'angle  $\varphi$  avec Ox,  $U_{\rho}$  devient:

$$U_{\rho}^{\varphi} = e^{-i\frac{\pi}{4}(\sigma_x \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi)} e^{-i\frac{\pi}{2}a^{\dagger}a\sigma_z} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_x} \quad (7-18)$$

Les probabilités de détecter e et g si le champ contient  $n$  photons s'écrivent alors:

$$\pi_e^{\varphi}(n) = \pi_{j=0}^{\varphi}(n) = \frac{1 + \cos(n\pi - \varphi)}{2} \quad ; \quad \pi_g^{\varphi}(n) = \pi_{j=1}^{\varphi}(n) = \frac{1 - \cos(n\pi - \varphi)}{2} \quad (7-19)$$

Elles définissent le POVM binaire:

$$E_j^{\varphi} = \sum_n \frac{1 + (-1)^j \cos(n\pi - \varphi)}{2} |n\rangle\langle n| \quad (7-20)$$

La différence des probabilités e et g pour un champ décrit par l'opérateur  $\rho$  s'écrit:

$$\pi_e^{\varphi} - \pi_g^{\varphi} = Tr\{(E_0^{\varphi} - E_1^{\varphi})\rho\} = \sum_n \rho_{nn} \cos(n\pi - \varphi) = \sum_n \rho_{nn} \cos n\pi \cos \varphi = \langle \mathcal{P} \rangle \cos \varphi \quad (7-21)$$

Ce signal se mesure en effectuant la statistique des comptages e et g sur un grand nombre d'atomes traversant des réalisations identiques du champ, pour une suite de valeurs de  $\varphi$ . Les oscillations en fonction de  $\varphi$  sont des *franges de Ramsey*. La parité moyenne du champ est l'amplitude (algébrique) des franges (signal à  $\varphi = 0$ ):

$$\pi_e^0 - \pi_g^0 = Tr\{(E_0^0 - E_1^0)\rho\} = \sum_n (-1)^n \rho_{nn} = Tr\{\mathcal{P}\rho\} = \langle \mathcal{P} \rangle \quad (7-22)$$

# POVM binaire avec déphasage non-linéaire du qubit et interféromètre imparfait

L'expression du POVM binaire (7-20) se généralise au cas d'un déphasage par photon  $\Phi_0$  différent de  $\pi$ . On doit également tenir compte de la non-linéarité du déphasage induit par le champ, décrit par une fonction  $\Phi(n)$  dont l'expression linéaire est l'approximation à l'ordre le plus bas. Nous obtenons ainsi le POVM:

$$E_j^\varphi = \sum_n \frac{1 + (-1)^j \cos(\Phi(n) - \varphi)}{2} |n\rangle\langle n| = \frac{1 + (-1)^j \cos(\Phi(a^\dagger a) - \varphi)}{2} \quad (7-23)$$

Il faut aussi tenir compte des imperfections de l'appareil décrites par 2 paramètres de qualité  $\eta_1$  et  $\eta_2$  qui valent 1 pour un appareil idéal et sont en fait  $< 1$ .  $\eta_1$  décrit un offset des franges lié, entre autre, à un déséquilibre dans le bruit de détection des états e et g.  $\eta_2$  décrit un contraste limité des franges dû, par exemple, à l'existence de déplacements lumineux non identiques pour tous les atomes. Ces paramètres, de l'ordre de 0,6 à 0,8, sont mesurés par des expériences de calibration. Le POVM et la différence des taux de comptage e et g s'écrivent finalement:

$$E_j^{(\varphi; \eta_1, \eta_2)} = \frac{1 + (-1)^j [(1 - \eta_1) + \eta_2 \cos(\Phi(a^\dagger a) - \varphi)]}{2} \quad (7-24)$$

$$\pi_e^\varphi - \pi_g^\varphi = 1 - \eta_1 + \eta_2 \sum_n \rho_{nn} \cos(\Phi(n) - \varphi) \quad (7-25)$$

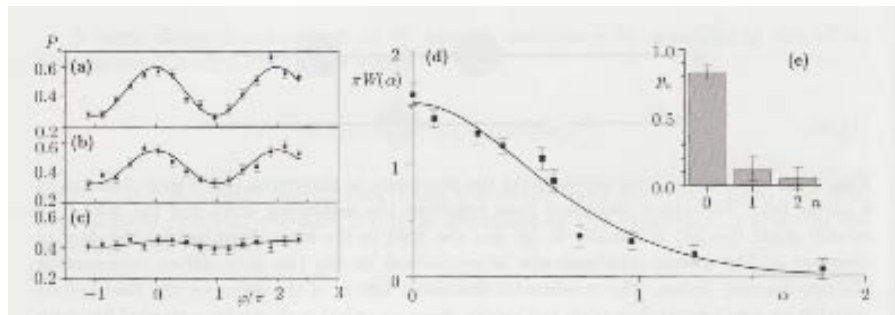
L'expression (7-24) est un cas particulier de l'éq. générale (6-59). Les défauts du POVM binaire décrivant l'interféromètre de Ramsey sont définis par deux éléments de 'matrice d'erreur'  $\eta_{01}$  et  $\eta_{10}$ , dont  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont des combinaisons linéaires.

# Reconstruction de $W$ des états $n = 0$ et $1$

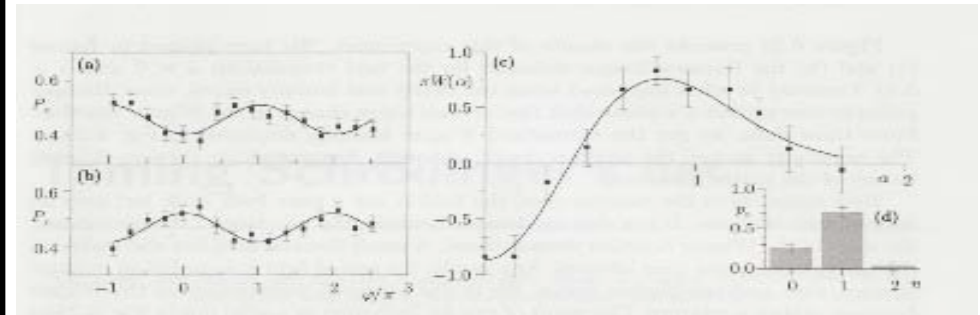
[Théorie: Lutterbach et Davidovich, *Phys.Rev.Lett.* 78, 2547 (1997);  
Expérience: P.Bertet et al, *Phys.Rev.Lett.* 89, 200402 (2002)].

L'expérience exploite la définition (6-27) de  $W(\alpha)$  comme moyenne de la parité du champ translaté: (i) La translation se fait en ajoutant dans  $C$  un champ cohérent d'amplitude  $-\alpha$  produit par une source classique. (ii) On envoie un atome avec un  $\delta$  correspondant à un déphasage  $\sim \pi$  par photon. (iii) On recommence et moyenne sur un grand nombre d'atomes pour différentes phases  $\varphi$  de  $R_2$ . La statistique reconstruit la différence  $\pi_e - \pi_g$  en fonction de  $\varphi$  [eq.(7-25)] et, pour  $\varphi=0$ , donne la valeur de  $W(\alpha)$ . (iv) On recommence pour différents  $\alpha$  et on reconstruit directement  $W$ . La fonction  $W$  (et donc  $\rho$ ) est déterminée en tenant compte des défauts de l'appareil.

**Test de la méthode sur  $n=0$ :** A gauche, 3 signaux de franges pour des  $\alpha$  croissants de haut en bas. Le signe des franges reste toujours  $> 0$ . A droite, variation radiale gaussienne de  $W$  et (insert) distribution  $P(n)$  inférée à partir de  $W$ . Noter la contamination de  $n=0$  par  $n=1$  (champ thermique).



**Même expérience sur un état  $n=1$**  produit par l'atome qui sert ensuite à mesurer la parité. A gauche, 2 signaux de frange obtenus pour  $\alpha=0$  et  $\alpha=0.8$ . **Noter l'inversion des franges.** A droite, la variation radiale de  $W(\alpha)$  montrant la valeur négative de  $W$  à l'origine. Insert:  $P(n)$  inféré. Noter la contamination de  $n=1$  par  $n=0$ .



## VII - C

Synthèse et reconstruction de chats de Schrödinger du champ



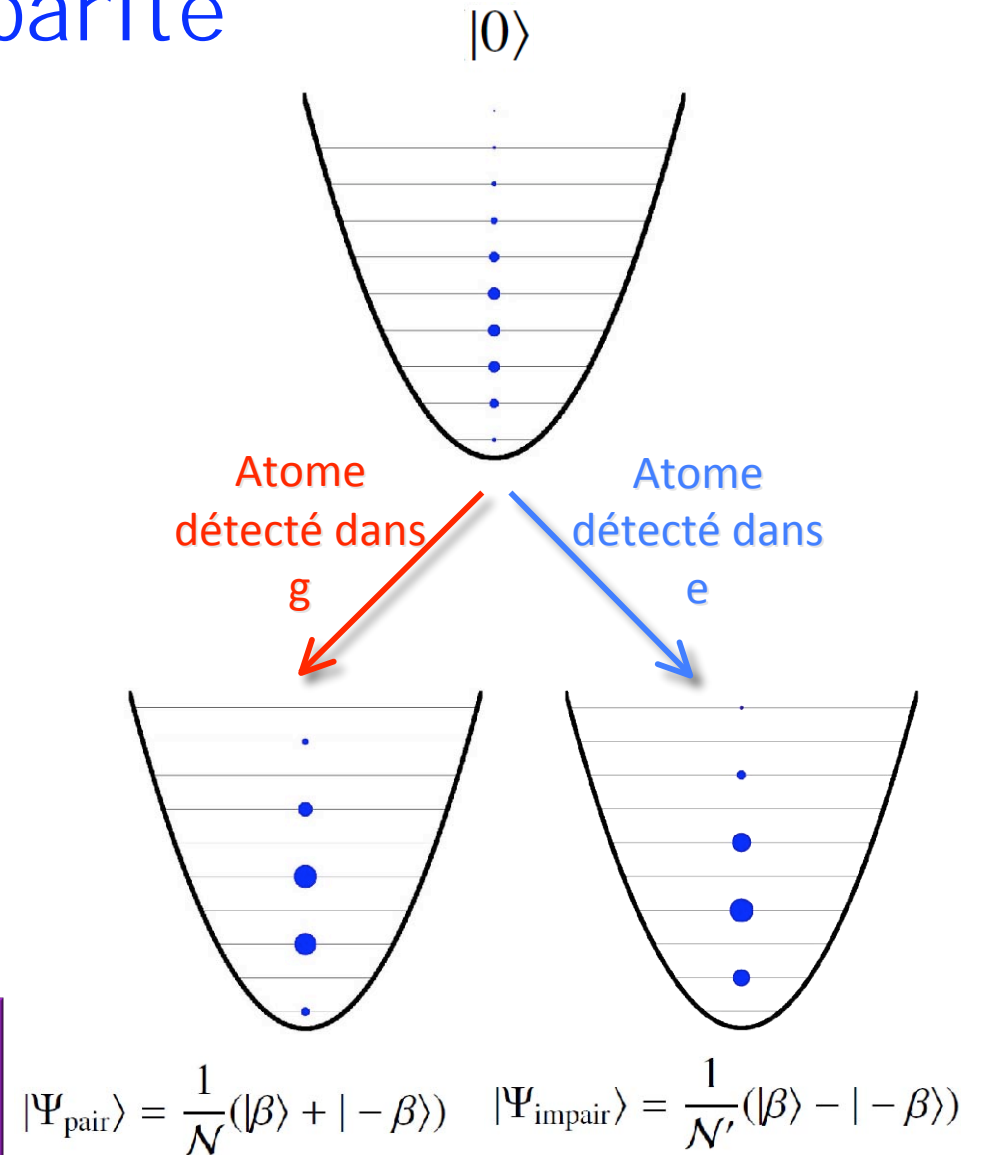
# Préparation d'un chat de Schrödinger du champ par mesure de parité

$$|\beta\rangle = \underbrace{\frac{1}{2}[|\beta\rangle + |-\beta\rangle]}_{\sum_{n \text{ pair}} C_n |n\rangle} + \underbrace{\frac{1}{2}[|\beta\rangle - |-\beta\rangle]}_{\sum_{n \text{ impair}} C_n |n\rangle}$$

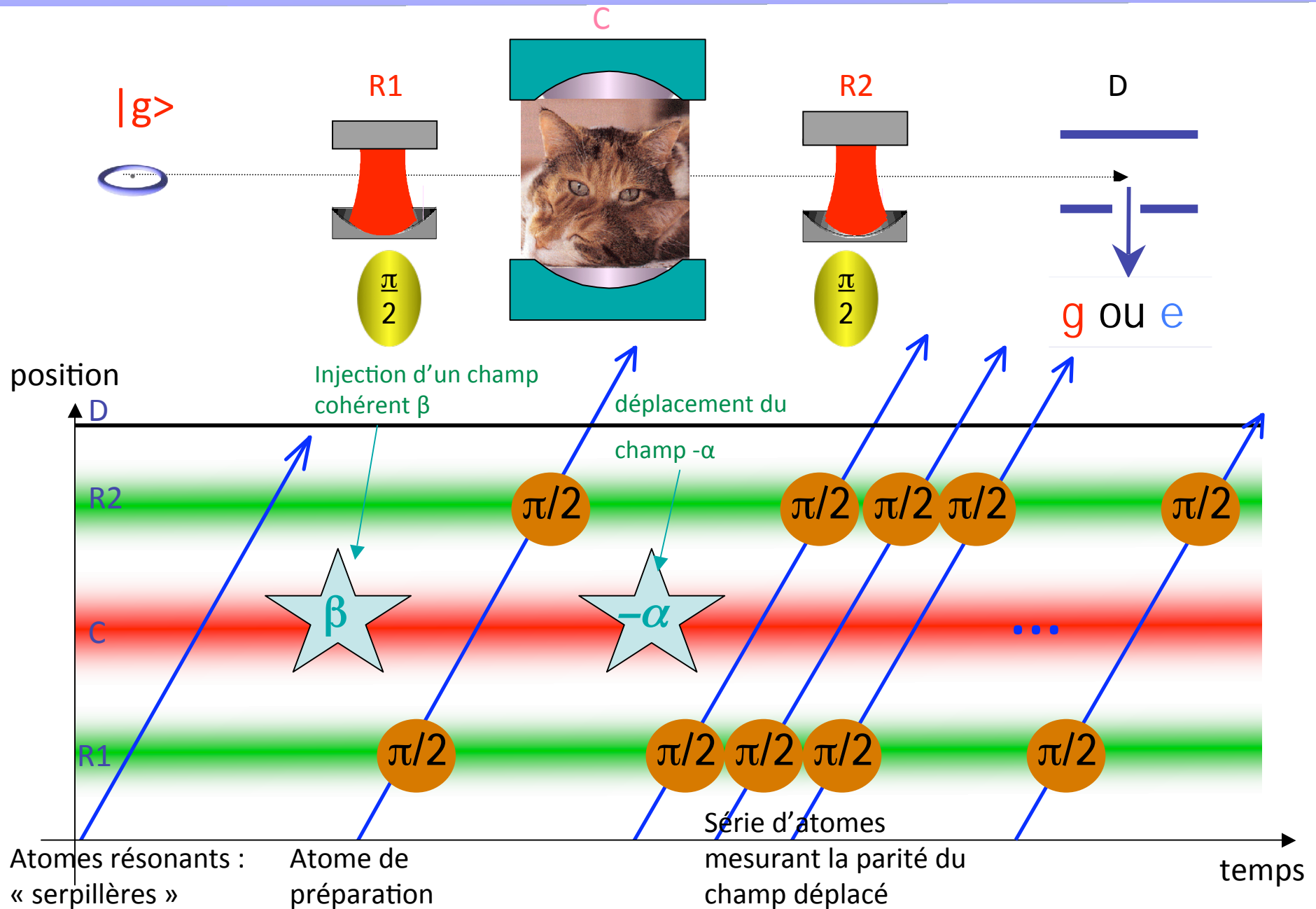
Partie paire                  Partie impaire

1. Injection d'un champ cohérent : couplage à une source classique
2. Mesure de parité : interaction avec un atome avec  $\varphi_0 = \pi$

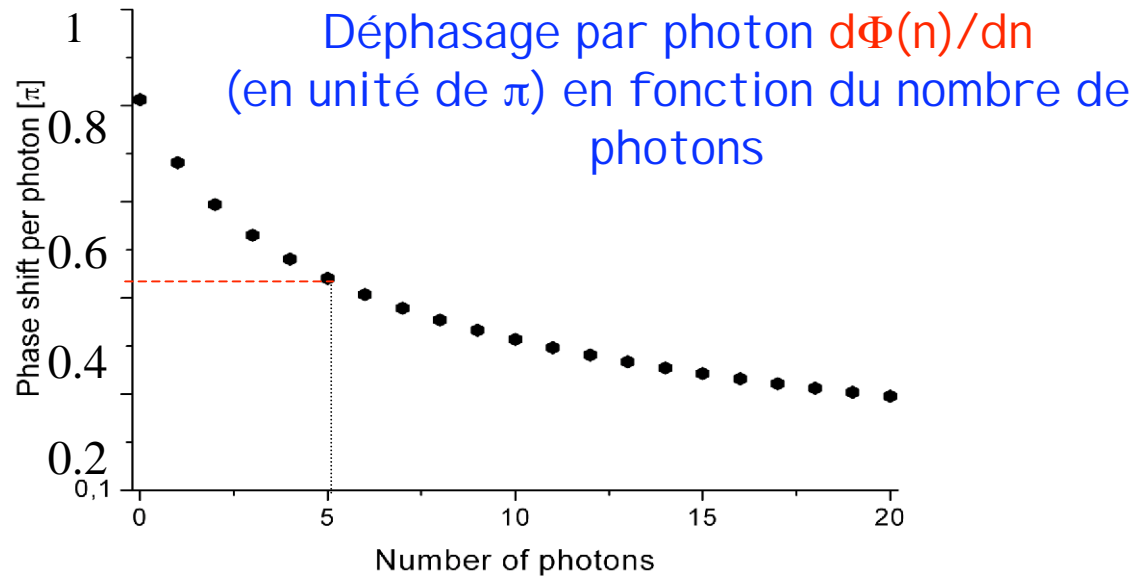
⇒ L'état chat de Schrödinger est produit par l'action en retour d'une mesure de parité sur la phase du champ



# Préparation et reconstruction d'un « chat »



# Prise en compte de la non linéarité des déplacements lumineux



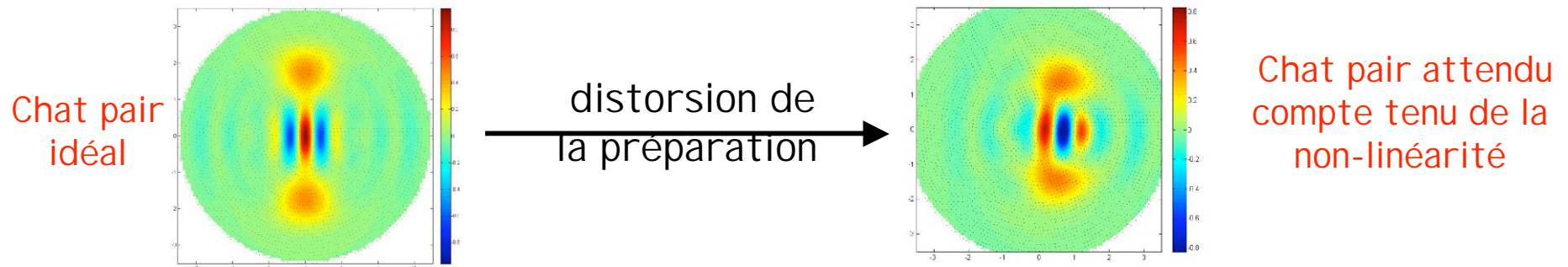
Il faut choisir une petite valeur de  $\delta$  pour avoir un grand déphasage par photon. Le rapport  $\Omega_0/\delta$  étant de l'ordre de 1, les termes non linéaires en n des énergies du système atome-champ rendent le déphasage par photon *dépendant de n* : environ  $\pi$  pour  $n = 0$ , il ne vaut plus que  $\sim 0.5 \pi$  pour  $n=5$ .

Cette non-linéarité (entièrement calculable) a deux effets: elle déforme l'état « chat » préparé par le premier atome et modifie la reconstruction directe qui ne détermine plus la fonction de Wigner  $W$  mais une fonction «  $W$  généralisée » qui pour un détecteur idéal s'écrit:

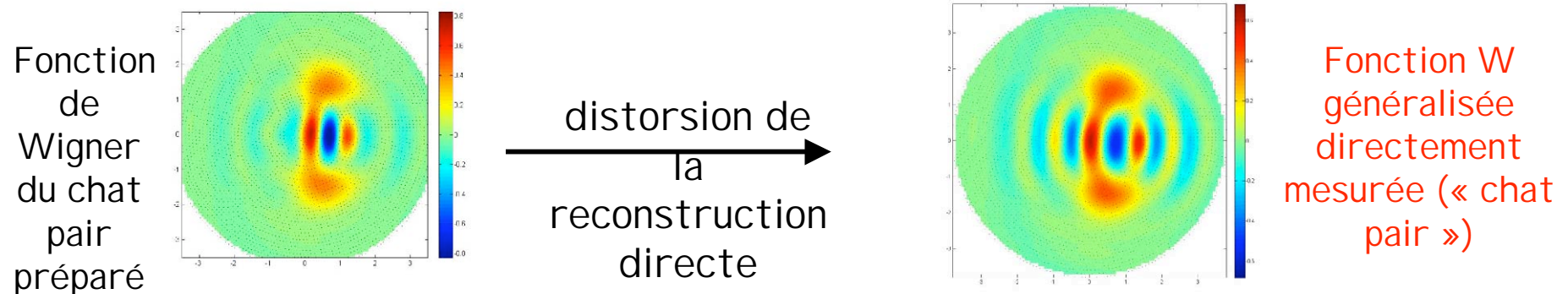
$$W_{gen}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} \left\{ D(-\alpha) \rho D(\alpha) \cos \Phi(a^\dagger a) \right\} = \frac{2}{\pi} \left\langle D(\alpha) \cos \Phi(a^\dagger a) D(-\alpha) \right\rangle \quad (7-26)$$

# Effets du déphasage non-linéaire

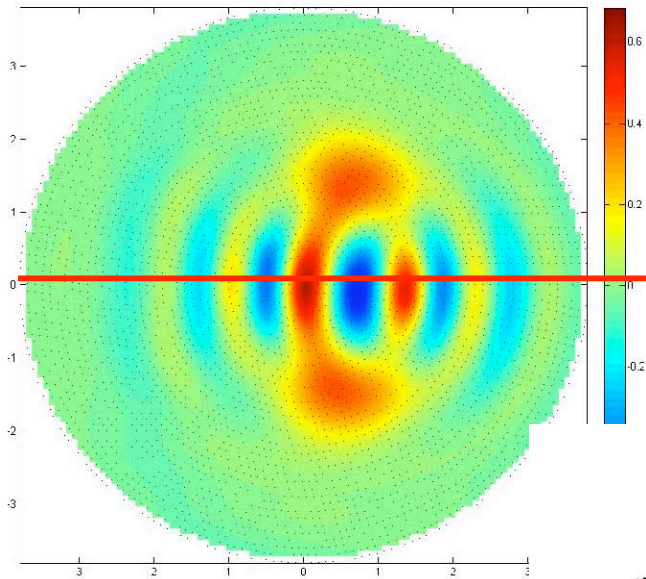
1. Le chat préparé par le 1<sup>er</sup> atome est déformé par rapport au chat idéal:



2. La fonction reconstruite en mesurant les différences de probabilités  $\pi_e - \pi_g$  n'est pas la fonction de Wigner  $W(\alpha)$ , mais une «fonction W généralisée», à partir de laquelle l'opérateur densité, et donc la vraie fonction W peuvent être obtenues:

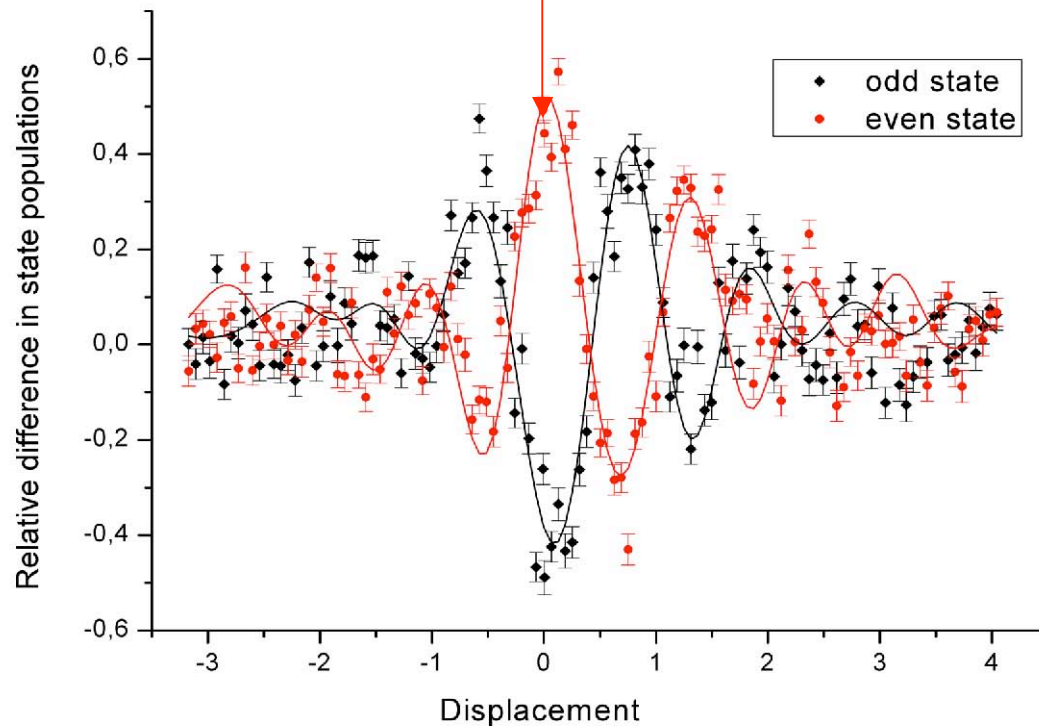


# Mesure directe de la fonction $W$ généralisée

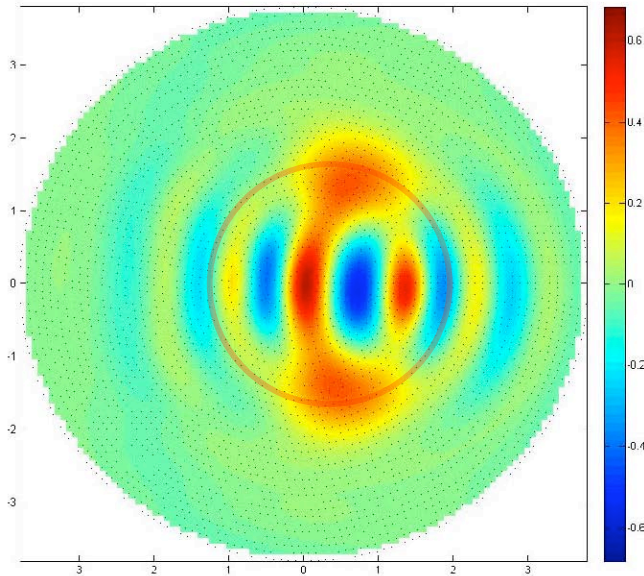


L'observation de franges avec des phases opposées pour les chats pair et impair est la signature de la cohérence quantique

Mesures de  $\pi_e - \pi_g$  pour des champs translattés le long de l'axe réel de l'espace des phases pour les chats pair et impair

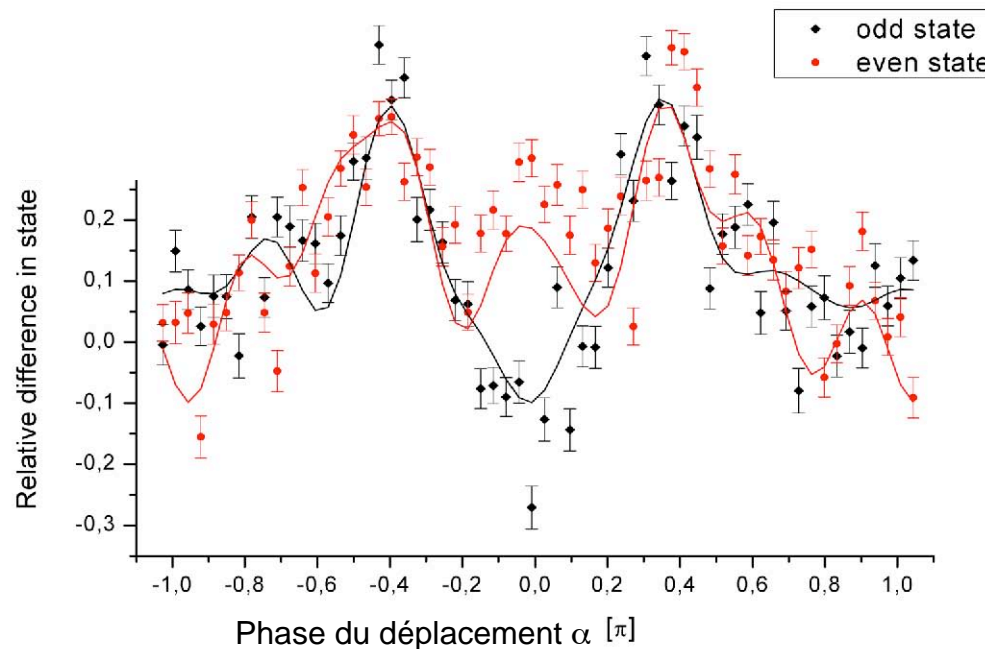


# Mesure directe de $W$ généralisée (suite)



Les points sont les valeurs expérimentales de  $\langle \pi_e - \pi_g \rangle$  et les courbes des fits théoriques (voir plus loin).

Mesures suivant un cercle centré sur l'origine de l'espace des phases pour les chats « pair » et « impair »



# Reconstruction des «chats de Schrödinger» par Max Ent

Les observables mesurées étant 'proches' de parités, elles sont pratiquement «binaires » et la méthode Max Ent s'applique bien, sans avoir à introduire les moments d'ordre supérieur à 1 (voir &VI I -A). Nous avons précisément mesuré les valeurs moyennes d'opérateurs de parité généralisée déplacés  $G_i = \mathcal{P}_{gen}^{(\alpha_i)}$  tenant compte des imperfections de l'appareil:

$$\begin{aligned} G_i &= \mathcal{P}_{gen}^{\alpha_i} = D(\alpha_i) \mathcal{P}_{gen} D(-\alpha_i) = D(\alpha_i) \left( E_0^{(\varphi; \eta_1, \eta_2)} - E_1^{(\varphi; \eta_1, \eta_2)} \right) D(-\alpha_i) \\ &= 1 - \eta_1 + \eta_2 D(\alpha_i) \cos \left\{ \Phi(a^\dagger a) - \varphi \right\} D(-\alpha_i) \quad (7-27) \end{aligned}$$

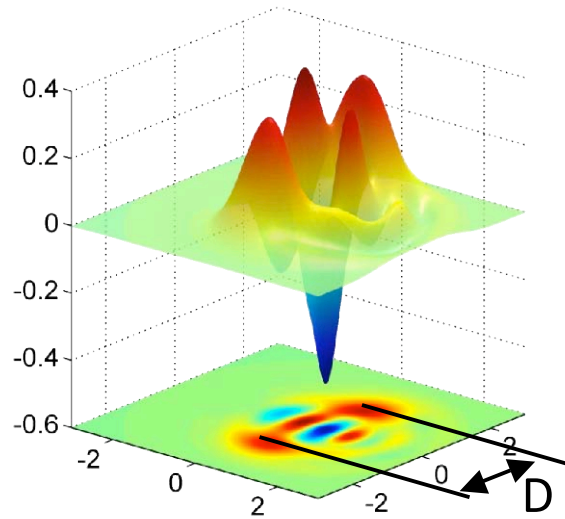
La mesure a été faite avec un light shift tel que  $d\Phi(n)/dn = 0.75\pi$  pour  $n = 3$  et une seule phase  $\varphi$  du pulse  $R_2$ .  $N = 500$  déplacements  $\alpha_i$  ont été faits avec 400 réalisations par déplacement. La mesure par un atome ne changeant pas  $n$ , on a accumulé dans chaque réalisation l'information de plusieurs ( $\sim 10$ ) atomes. La solution cherchée est l'exponentielle d'une combinaison linéaire des 500 opérateurs  $G_i$  définis par (7-27), dont les coefficients sont 500 multiplicateurs de Lagrange. La valeur de ces coefficients est fixée par un algorithme minimisant l'expression  $\chi^2$  donné par (7-6). Les courbes théoriques superposées aux points expérimentaux des pages précédentes sont les «fits» correspondant aux valeurs optimales de ces multiplicateurs. On constate un excellent accord. Une fois  $\rho_{ME}$  déterminé, la fonction  $W$  en est déduite. Sur la page suivante nous montrons les représentations 3D des fonctions  $W$  des états « chats » obtenus par cette méthode.

# Chats de Schrödinger reconstruits (Max Ent)

Chat **pair**

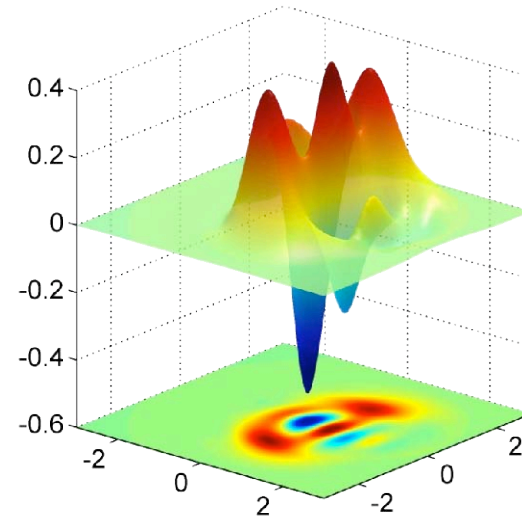
(1<sup>er</sup> atome détecté dans **g**)

$D^2 \approx 7,5 \text{ ph.}$

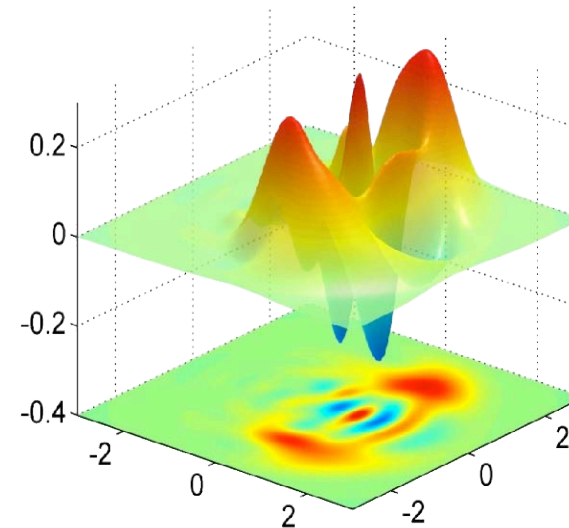
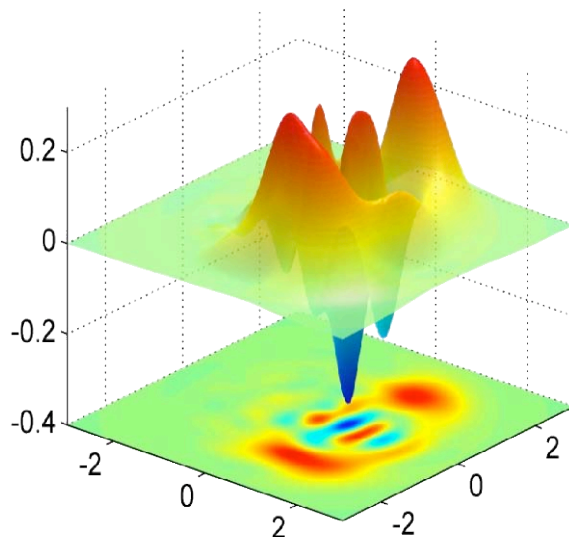


Chat **impair**

(1<sup>er</sup> atome détecté dans **e**)



$D^2 \approx 12 \text{ ph.}$

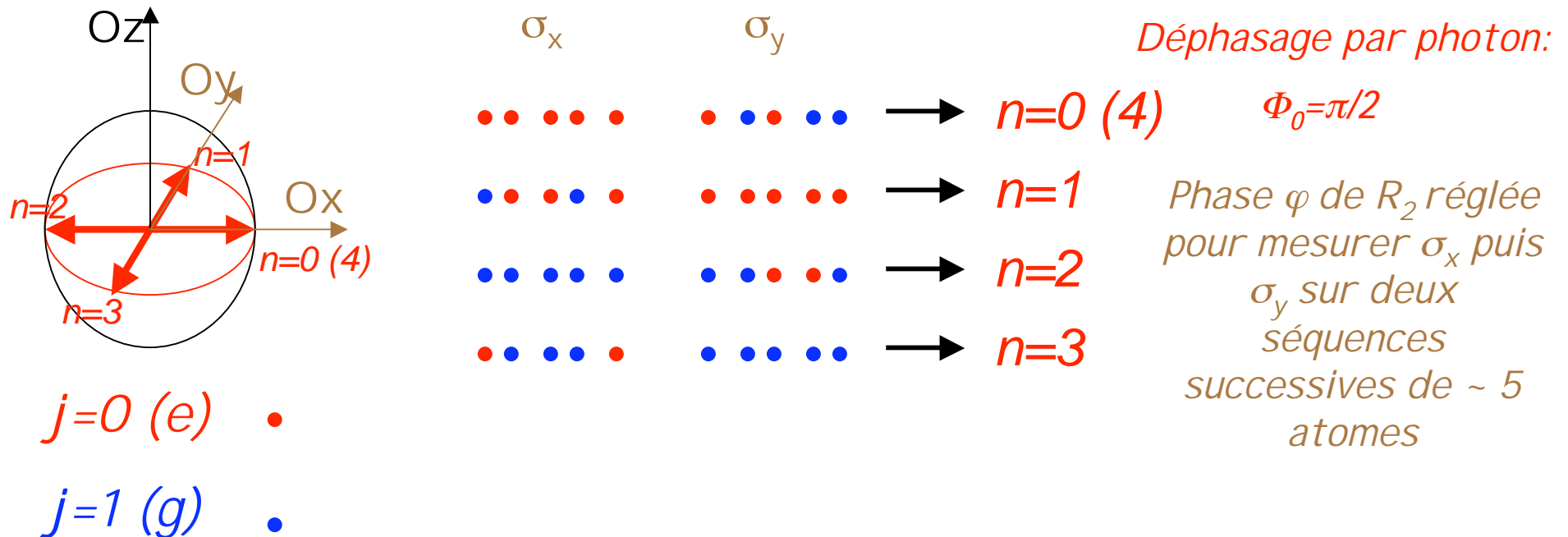




## VII-D

Reconstruction d'états de Fock:  
comparaison entre Max Like et  
Max Ent

# Préparation d'états de Fock par mesure QND du nombre de photons (rappel)



Une suite d'atomes traverse l'interféromètre dans lequel C contient un petit champ cohérent ( $p(n) \geq 4$  négligeable). Le désaccord  $\delta$  empêche l'absorption et rend l'interaction atome-champ non destructive. La détection des atomes successifs sur chaque réalisation du champ donne 4 «*signatures*» différentes annonçant la *projection* du champ dans un des états de Fock  $n=0,1,2$  ou  $3$ . Cette méthode de préparation, non déterministe, génère des états  $|n\rangle$  avec les probabilités de la loi de Poisson du champ cohérent initial. En partant d'un champ cohérent plus grand, (tel que  $p(0)$  soit négligeable), on peut préparer aussi  $n=4$ . Dans l'expérience réelle, les imperfections font qu'il faut environ 60 atomes pour converger et non 10.

# Reconstruction des états de Fock:

Une fois l'état  $|n\rangle$  préparé, il est déplacé de  $-\alpha_i$  ( $N = 400$  valeurs différentes sur 14 axes passant par l'origine du plan de phase). Puis des mesures de  $\sigma_x$  ou  $\sigma_y$  sont faites sur  $\sim 10$  atomes avec un  $\Phi_0 \sim \pi/2$  par photon en ajustant la phase  $\varphi_i$  du pulse  $R_2$ . On mesure  $\sigma_x$  sur 7 axes et  $\sigma_y$  sur les 7 autres. On recommence  $\sim 100$  à 200 fois pour chaque  $\alpha_i$  et on utilise les mêmes données pour **Max Ent** et **Max Like**.

**Max Ent** moyenne la différence des taux de comptage  $e$  et  $g$  pour chaque valeur de  $\alpha_i$  et cherche le  $\rho$  optimal reproduisant ces moyennes sous la forme :

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp \left\{ - \sum_i \lambda_i \left[ D(\alpha_i) \left[ E_0^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)} - E_1^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)} \right] D(-\alpha_i) \right] \right\} \quad (7-28)$$

où les  $E_j^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)}$  sont donnés par l'équation (7-24) pour les deux valeurs de  $\varphi_i$ .

**Max Like** n'utilise (encore) que 3 atomes sur la suite de 10 traversant C et exploite pour chaque  $\alpha_i$  les fréquences  $f_i(p)$  de détection de  $p$  atomes dans  $e$  et  $3-p$  dans  $g$  ( $p=0,1,2,3$ ). Les  $E_j^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)}$  satisfont la relation de fermeture (POVM à  $4N$  éléments):

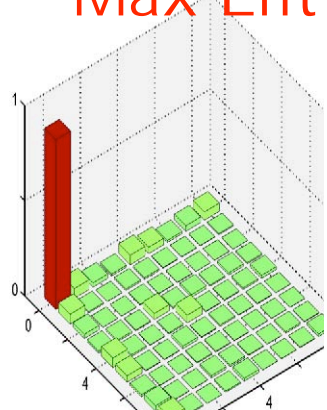
$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_i D(\alpha_i) \left[ \sum_j E_j^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)} \right]^3 D(-\alpha_i) = I \\ & = \frac{1}{N} \sum_i D(\alpha_i) \left[ (E_0^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)})^3 + 3(E_0^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)})^2 (E_1^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)}) + 3(E_0^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)}) (E_1^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)})^2 + (E_1^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)})^3 \right] D(-\alpha_i) \quad (7-29) \end{aligned}$$

et l'opérateur **R( $\rho$ )** de la procédure d'itération **Max Like** (voir & VI-C) est:

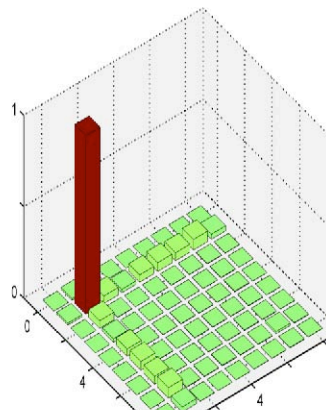
$$R(\rho) = \sum_i^{p=0,1,2,3} \frac{f_i(p) D(\alpha_i) \left[ E_0^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)} \right]^p \left[ E_1^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)} \right]^{3-p} D(-\alpha_i)}{\text{Tr} \left\{ \rho D(\alpha_i) \left[ E_0^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)} \right]^p \left[ E_1^{(\varphi_i; \eta_1, \eta_2)} \right]^{3-p} D(-\alpha_i) \right\}} \quad (7-30)$$

# Reconstruction d'états de Fock par Max Ent et Max Like: opérateurs densité

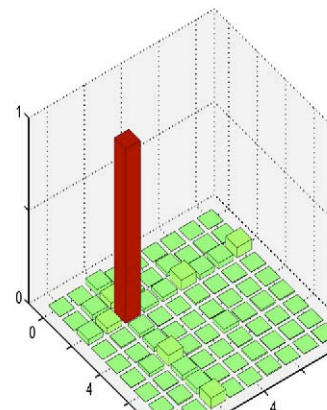
Max Ent



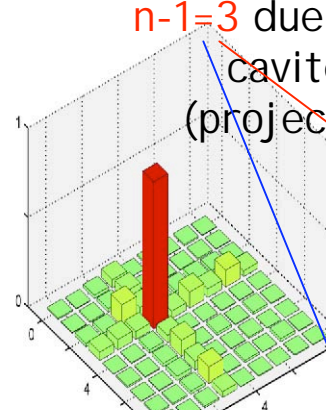
$$F=\rho_{00}=0,890$$



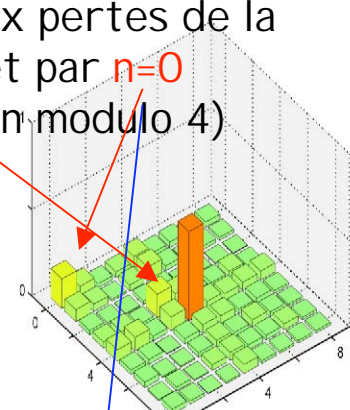
$$F=\rho_{11}=0,976$$



$$F=\rho_{22}=0,936$$



$$F=\rho_{33}=0,821$$



$$F=\rho_{44}=0,51$$

Contamination par l'état  $n-1=3$  due aux pertes de la cavité et par  $n=0$  (projection modulo 4)

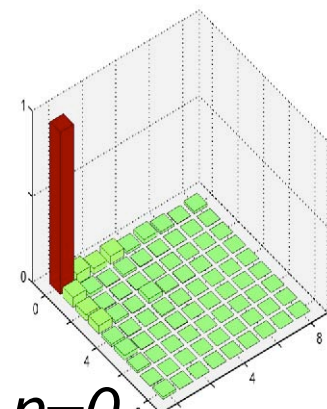
$$F=\rho_{00}=0,945$$

$$F=\rho_{11}=0,966$$

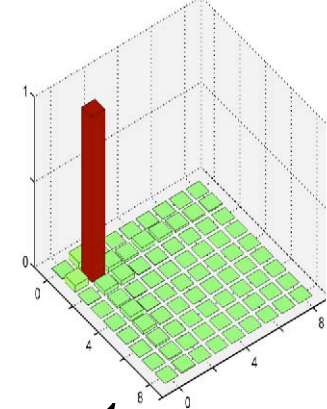
$$F=\rho_{22}=0,920$$

$$F=\rho_{33}=0,823$$

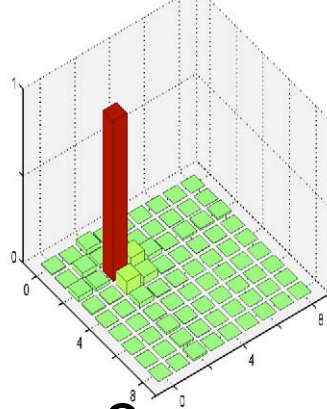
$$F=\rho_{44}=0,556$$



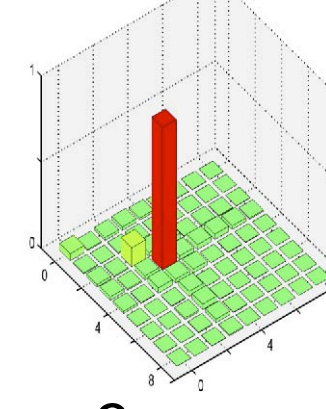
$n=0$



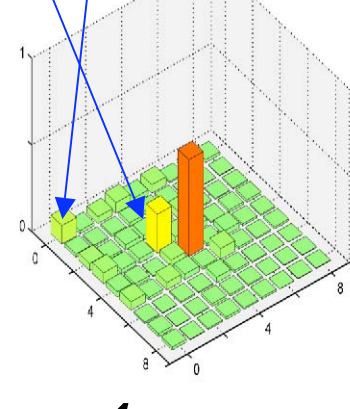
$n=1$



$n=2$



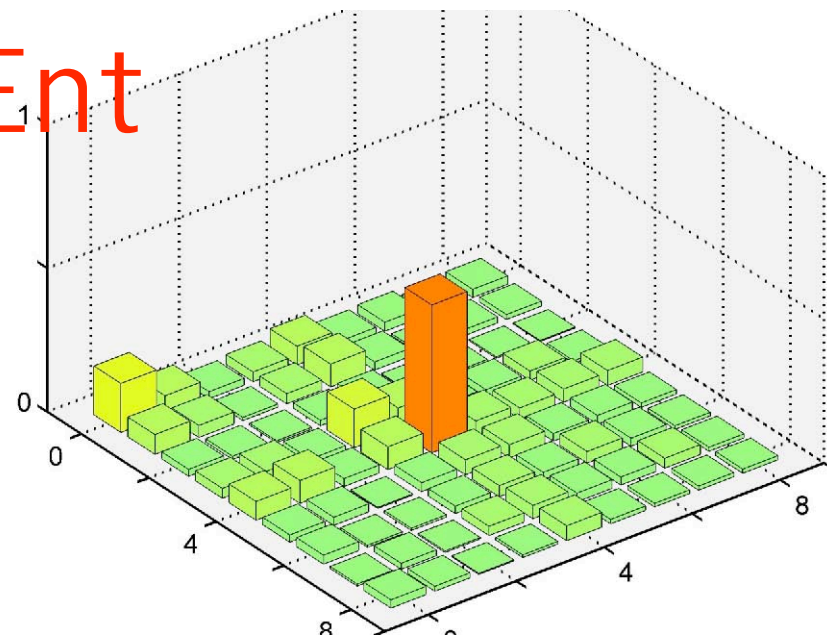
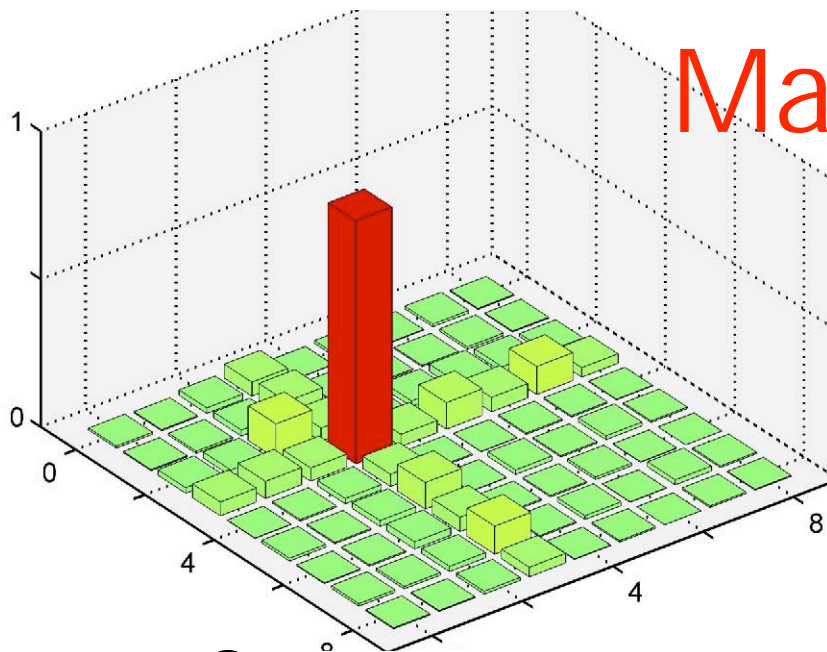
$n=3$



$n=4$

Max Like

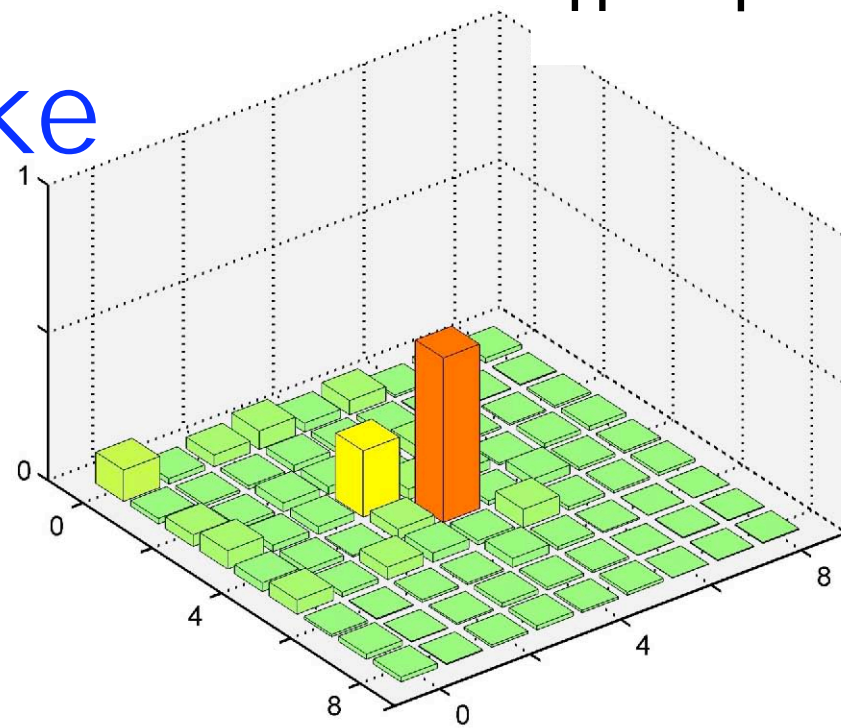
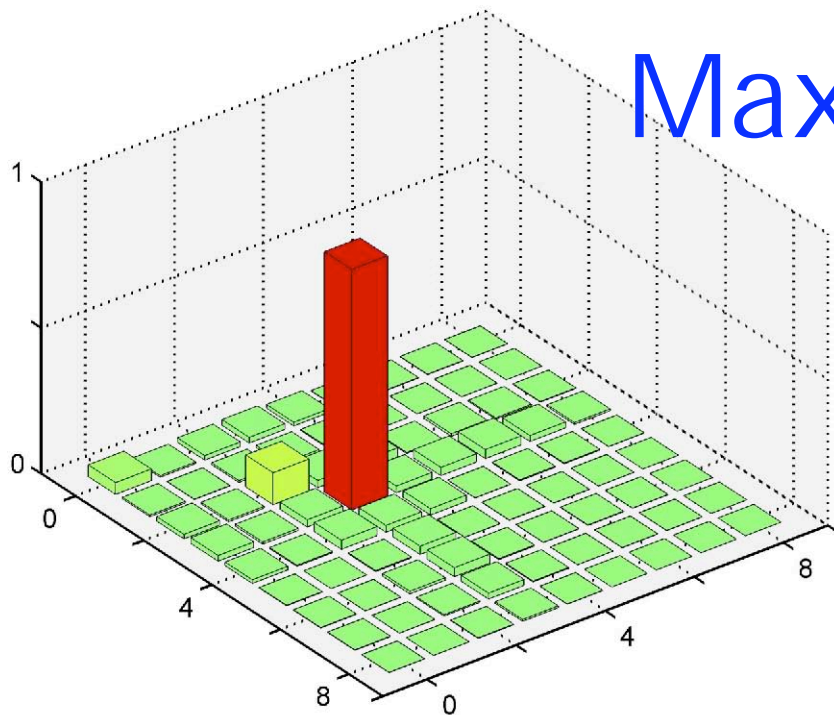
# Max Ent



$n = 3$

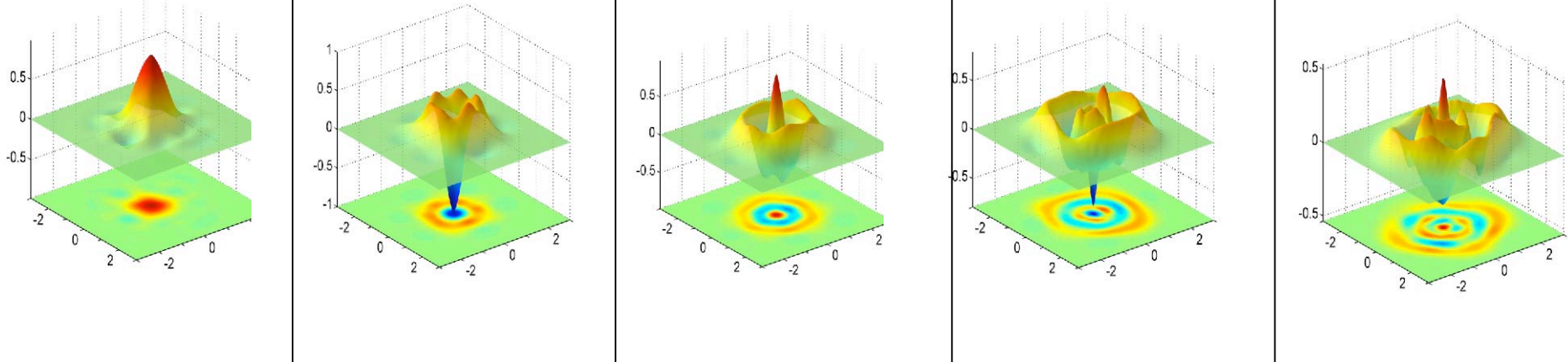
$n = 4$

# Max Like

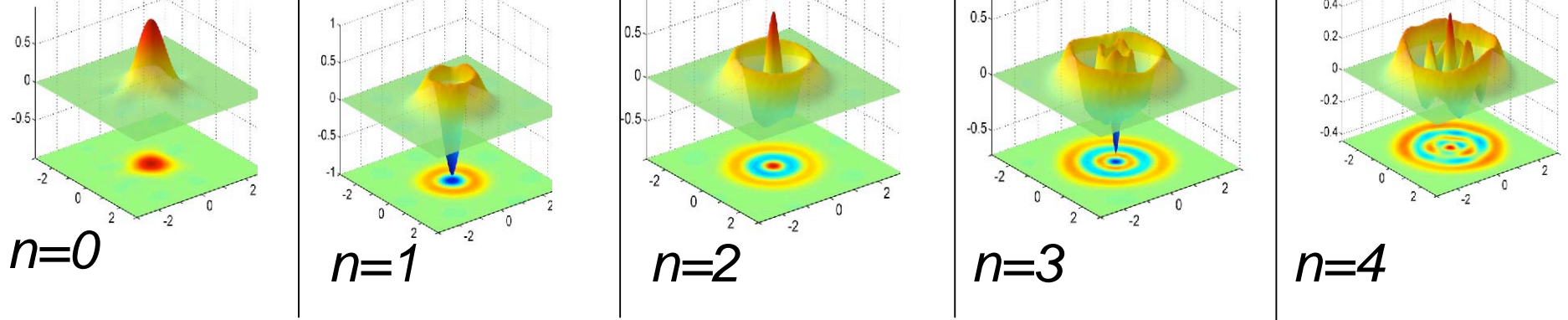


# Reconstruction d'états de Fock par Max Ent et Max Like: fonctions de Wigner

Max Ent



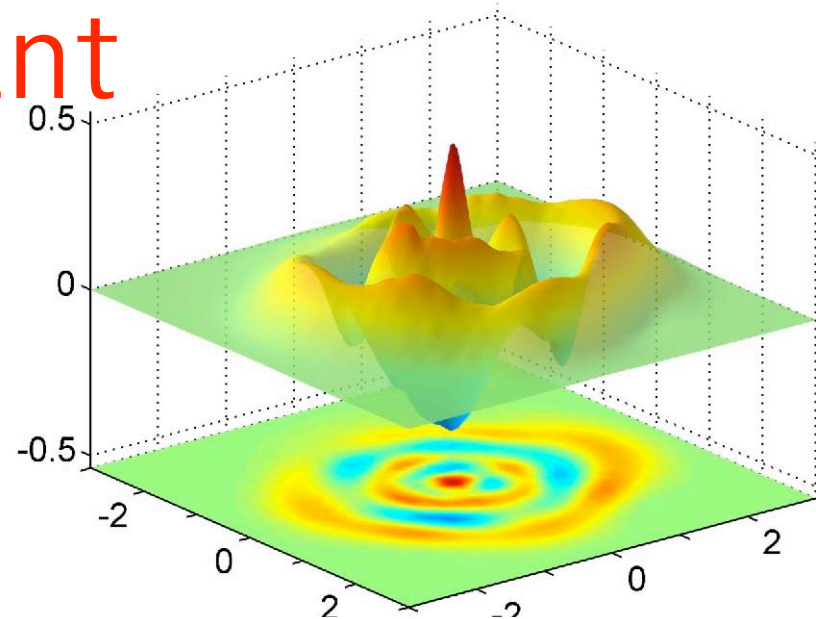
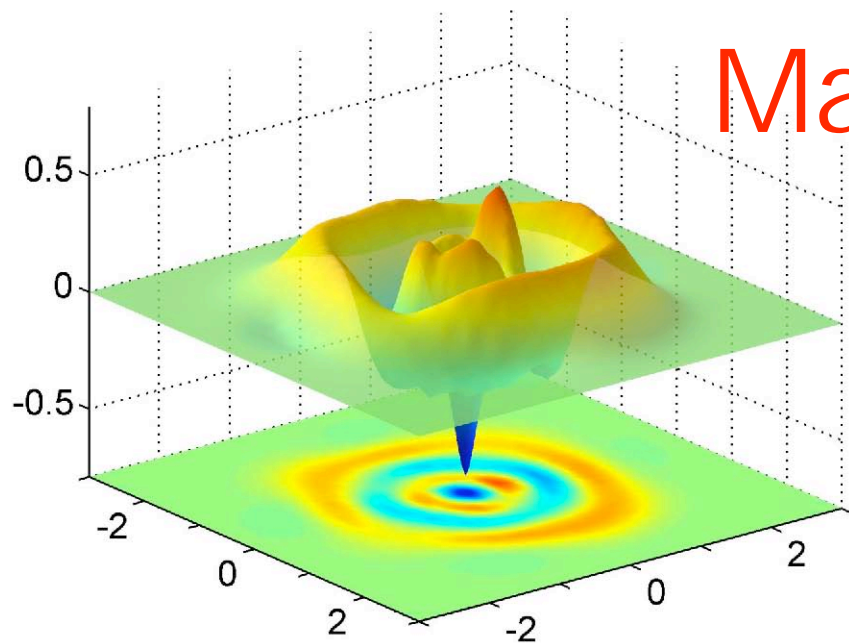
*Max Like exploite des fluctuations négligées par Max Ent qui moyenne les taux de comptage sur toutes les réalisations de chaque  $\alpha_j$ . Max Like a moins de bruit de phase, bien qu'il n'utilise pas toutes les données (3 atomes sur  $\sim 10$  par réalisation)*



Max Like

*Reconstructions par Xing Zhou et I.Dotsenko (non publiées)*

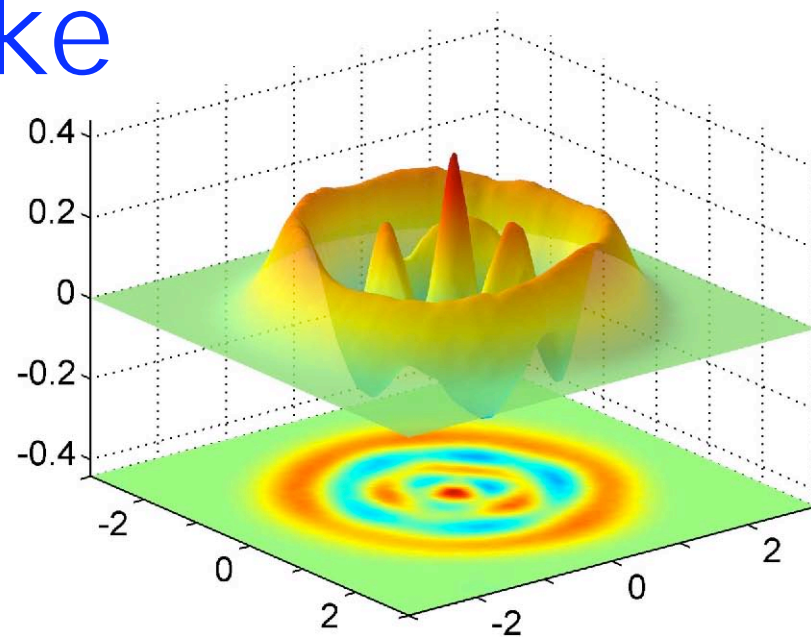
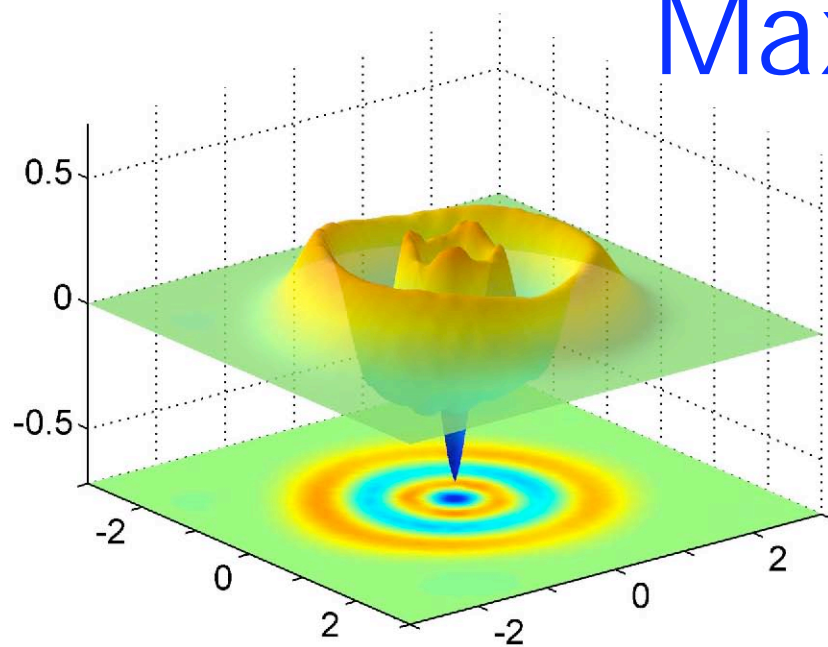
# Max Ent



$n = 3$

$n = 4$

# Max Like



# Conclusion du Cours 2009-2010

Le cours 2009-2010 a décrit divers aspects du problème de l'estimation des états quantiques. Dans les leçons 1 à 5 nous avons parlé de qubits, analysé les limites imposées par la théorie à l'estimation de leurs états et discuté des relations entre estimation, clonage, cryptographie quantique et impossibilité de communication super-luminale. Dans les leçons 6 et 7 nous avons parlé d'expériences de génération et de reconstruction d'états d'un oscillateur (mode du champ dans l'espace libre ou en cavité). Nous avons décrit la méthode de reconstruction par tomographie quantique (inversion de Radon) et la méthode directe de mesure de parité du nombre de photons. Nous avons enfin analysé et comparé des procédures de traitement statistique des données basées sur les principes de maximum de vraisemblance et de maximum d'entropie. Les procédures de préparation d'états non-classiques de nos expériences CQED sont (pour le moment) non-déterministes (basées sur la projection aléatoire du champ par une mesure). Le séminaire de Max Hofheinz qui suit décrit une élégante méthode déterministe et générale de synthèse d'états arbitraires du champ piégé dans un résonateur.

En plus de celles déjà données, ajoutons une référence générale sur l'estimation et la reconstruction des états (chapitres indépendants, multiples auteurs) :

[Quantum State Estimation, M.G.A. Paris et J.Rehacek editeurs, Springer \(2004\).](#)

---

Erratum: Dans la Leçon 1, l'équation (1-27) doit être remplacée par:

$$\rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0| \rightarrow \sum_{i,j} \sqrt{E_i} \rho_A \sqrt{E_j} |b_i\rangle_B \langle b_j|$$