

# Physique Quantique

## Cours 2009-2010: Quatrième leçon

### 8 Février 2010

Nous poursuivons l'étude du clonage optimal en décrivant comment produire  $M$  copies approchées d'un qubit unique dans un état pur, puis de façon plus générale,  $M$  copies à partir de  $N$  qubits identiques tous dans le même état pur (&IV-A). Les fidélités de clonage optimal rappellent celles de l'estimation optimale, ce qui nous donne l'occasion d'analyser la relation étroite entre estimation d'état et clonage. Cette relation exprime la cohérence interne de la théorie quantique de la mesure.

Nous montrons ensuite (&IV-B) que le clonage optimal est réalisé de façon naturelle par le processus d'amplification optique de photons dans un milieu d'atomes excités et nous retrouvons, avec un modèle très simple, la formule donnant la fidélité du clonage optimal  $1 \rightarrow 2$ , puis  $N \rightarrow M$ . Nous abordons enfin la description d'une expérience de démonstration du clonage  $1 \rightarrow 2$  exploitant un effet d'optique non-linéaire, la création de paires de photons par conversion paramétrique de fréquence. Rappelons une référence générale pour la question du clonage quantique:

« **Quantum Cloning** » par V.Scarani, S.Iblisdir, N.Gisin et A.Acin, *Review of Modern Physics*, 77, 1225 (2005).

IV-A

Clonage universel symétrique

$1 \rightarrow M$  et  $N \rightarrow M$

# Clonage 1 → M qubits

On dispose de 1 qubit a dans l'état  $|\psi\rangle$  (d'opérateur densité  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ) et on se propose d'obtenir M copies aussi fidèles que possibles, suivant le même critère que pour le clonage 1→2 (*clonage universel et symétrique*). Généralisant la procédure décrite dans le cas M=2, nous allons considérer l'application T:

$$\rho \xrightarrow{T(\rho)} T(\rho) = \rho_M^{sym} = \frac{2}{M+1} S_M [\rho \otimes I^{\otimes(M-1)}] S_M \quad (4-1)$$

où  $S_M$  est l'opérateur de symétrisation, projecteur sur le sous-espace symétrique des M qubits. L'équ. (4-1) définit une application linéaire positive (l'image d'un opérateur à valeurs propres positives ou nulles garde cette propriété) et conservant la trace des opérateurs à un qubit vers les opérateurs de l'espace symétrique à M qubits. La linéarité et la positivité de l'application sont évidentes. Il reste à montrer qu'elle conserve la trace:

$$Tr \{T(\rho)\} = Tr \{\rho_M^{sym}\} = 1? \quad (4-2)$$

La trace de T(ρ) est une fonctionnelle linéaire de ρ que l'on peut exprimer comme la valeur moyenne dans l'état décrit par ρ d'un opérateur Λ de l'espace du qubit a:

$$Tr \{T(\rho)\} = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \rho_{ji} = Tr \{\rho \Lambda\} \quad (4-3)$$

# Clonage 1 → M qubits (suite)

Considérons une rotation arbitraire représentée par l'opérateur  $R^{(1/2)}$  dans l'espace de spin 1/2 du qubit  $a$  et par la matrice  $R^{(J)}$  dans l'espace symétrique des  $M$  qubits, isomorphe à l'espace d'un moment cinétique  $J=M/2$ . De la covariance évidente de  $T$  sous l'effet de cette rotation:

$$T(R^{(1/2)}\rho R^{(1/2)\dagger}) = R^{(M/2)} [T(\rho)] R^{(M/2)\dagger} \quad (4-4)$$

on déduit que la trace de  $T(\rho)$  est invariante par rotation, ainsi que l'opérateur  $\Lambda$ :

$$\text{Tr} \left\{ T(R^{(1/2)}\rho R^{(1/2)\dagger}) \right\} = \text{Tr} \left\{ \Lambda R^{(1/2)}\rho R^{(1/2)\dagger} \right\} = \text{Tr} \left\{ \Lambda \rho \right\} \quad \text{et} \quad [\Lambda, R^{(1/2)}] = 0 \quad (4-5)$$

$\Lambda$  est donc un multiple de l'opérateur unité. Ce multiple est précisément 1, comme on le voit en calculant  $T(I_{\alpha}/2)$ , image de l'opérateur associé au qbit  $a$  dépolarisé :

$$\rho = \frac{I}{2} \rightarrow T\left(\frac{I}{2}\right) = \frac{1}{M+1} S_M \quad (4-6)$$

dont la trace satisfait bien:

$$\text{Tr} \left\{ T\left(\frac{I}{2}\right) \right\} = \text{Tr} \left\{ \frac{I}{2} \right\} = 1 \quad (4-7)$$

L'opération linéaire de symétrisation du qubit  $a$  avec les  $M-1$  clones conservant la trace peut être réalisée par une opération unitaire sur un système englobant, en plus des  $M$  qubits, une «machine» à cloner, suivie d'une trace sur l'état de cette machine. Nous en avons donné une description explicite par un circuit logique pour le clonage  $1 \rightarrow 2$ . Nous ne l'explicitons pas dans le cas  $1 \rightarrow M$ .

# Clonage 1 → M qubits (suite)

Le clonage par symétrisation est par définition symétrique (tous les clones ont le même opérateur densité réduit) et universel (la *fidélité* ne dépend pas de l'état cloné en raison de l'invariance manifeste par rotation). Calculons maintenant sa fidélité en évaluant la trace du produit de l'opérateur réduit de n'importe quel des qubits (a par exemple) avec celui de l'état initial à cloner:

$$F_{1 \rightarrow M} = \frac{2}{M+1} \text{Tr} \left\{ S_M \rho^a \otimes I^{\otimes(M-1)} S_M \rho^a \otimes I^{\otimes(M-1)} \right\} \quad (4-8)$$

La fidélité étant invariante par rotation du qubit, nous pouvons la calculer pour un état particulier, par exemple l'état  $|0\rangle$  associé au projecteur:

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \sigma_z) \quad (4-9)$$

On obtient en développant (4-8):

$$F_{1 \rightarrow M} = F_1 + F_2 + F_3 \quad (4-10)$$

avec:

$$F_1 = \frac{1}{2(M+1)} \text{Tr} \left\{ S_M I^{\otimes M} S_M \right\}; F_2 = \frac{1}{(M+1)} \text{Tr} \left\{ S_M \sigma_z^a I^{\otimes(M-1)} S_M \right\}; F_3 = \frac{1}{2(M+1)} \text{Tr} \left\{ S_M \sigma_z^a I^{\otimes(M-1)} S_M \sigma_z^a I^{\otimes(M-1)} \right\} \quad (4-11)$$

On vérifie immédiatement que:

$$F_1 = \frac{1}{2} \quad (4-12)$$

Et il reste à calculer  $F_2$  et  $F_3$ .

# Clonage 1 → M qubits (suite)

Remarquons que  $F_2$  et  $F_3$  sont invariants par échange des qubits. On peut donc y remplacer  $\sigma_z^a$  par l'opérateur normalisé  $\Sigma_i(\sigma_z^{(i)}/M) = 2J_z/M$  qui commute avec  $S_M$ .  
D'où:

$$F_2 = \frac{2}{M(M+1)} \text{Tr} \{ S_M J_z S_M \} ; F_3 = \frac{2}{M^2(M+1)} \text{Tr} \{ S_M J_z^2 S_M \} \quad (4-13)$$

La trace de  $J_z$  dans l'espace des états symétriques est nulle, ce qui entraîne  $F_2=0$ .  
Pour calculer  $F_3$  il faut sommer les carrés des entiers ou demi-entiers entre  $-M/2$  et  $+M/2$ :

$$F_2 = 0 ; F_3 = \frac{2}{M^2(M+1)} \left( \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} m^2 \right) = \frac{2}{M^2(M+1)} \times \frac{M(M+1)(M+2)}{12} = \frac{M+2}{6M} \quad (4-14)$$

et, d'après (4-10), (4-12) et (4-14):

$$F_{1 \rightarrow M} = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2} + \frac{M+2}{6M} = \frac{2M+1}{3M} \quad (4-15)$$

L'opérateur densité réduit de chacun des M clones de l'état (4-9) est, par symétrie, de la forme  $(1/2)(I + \eta \sigma_z)$ . Dans le cas général où a est dans l'état  $|\psi\rangle$  (vecteur de Bloch  $P_\psi$ ), on obtient 3 formes équivalentes de l'opérateur densité de chaque clone:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{2} [I + \vec{P}_\psi \cdot \vec{\sigma}] \xrightarrow{\text{clonage } 1 \rightarrow M} \rho_{1 \rightarrow M} = \frac{F_{1 \rightarrow M}}{2} |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1 - F_{1 \rightarrow M}}{2} |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp| \\ &= \frac{1}{2} [I + \eta_{1 \rightarrow M} \vec{P}_\psi \cdot \vec{\sigma}] = \eta_{1 \rightarrow M} |\psi\rangle\langle\psi| + (1 - \eta_{1 \rightarrow M}) \frac{I}{2} ; \quad \left( \eta_{1 \rightarrow M} = 2F_{1 \rightarrow M} - 1 = \frac{M+2}{3M} \right) \quad (4-16) \end{aligned}$$

# Clonage $1 \rightarrow M$ : discussion

La fidélité du clonage  $1 \rightarrow M$  est une fonction décroissante du nombre de copies. L'opération de symétrisation dilue en effet l'information sur l'ensemble des qubits, une partie de cette information, croissante avec  $M$ , étant cachée dans les corrélations que l'on n'observe pas lorsqu'on s'intéresse à un seul qubit. Voyons quelques cas particuliers intéressants pour des  $M$  croissants:

- $M=1$ :  $F = 1$ : le qubit est son propre clone parfait
- $M=2$ : On retrouve les résultats du clonage  $1 \rightarrow 2$ :  $F = 5/6$  et  $\eta_{1 \rightarrow 2} = 2/3$
- $M \gg 1$   $F \rightarrow 2/3$  et  $\eta_{1 \rightarrow 2} \rightarrow 1/3$

Le cas limite  $M \gg 1$  montre que le clonage symétrique a, pour  $M$  grand, la même fidélité que celle de la stratégie triviale de mesure du qubit a, suivie d'une préparation des  $M$  qubits dans l'état propre ainsi obtenu (voir plus haut). Ce résultat est consistant du point de vue de la mesure quantique. Si on ne dispose au départ que d'un qubit dans un état inconnu, la fidélité d'une estimation de l'état est  $2/3$ . Si on avait une fidélité de clonage  $F > 2/3$  pour  $M$  grand, cela voudrait dire que l'on pourrait, à partir d'un qubit unique, réaliser un échantillon aussi grand que l'on veut de clones avec une fidélité supérieure au résultat donné par mesure unique, à partir duquel on pourrait obtenir une information sur le système initial correspondant à cette fidélité « amplifiée ». Il y aurait alors contradiction dans la théorie de la mesure (voir relation entre clonage  $N \rightarrow M$  et estimation plus loin).

# Généralisation: clonage symétrique universel

## N → M

Le clonage de  $N \rightarrow M$  qubits avec  $N > 1$  se traite de façon analogue au clonage  $1 \rightarrow M$ , en envisageant une application linéaire positive conservant la trace des opérateurs densités de l'espace symétrique de  $N$  qubits vers celui de  $M = N + k$  qubits:

$$\rho_N^{sym} \xrightarrow{T(\rho_N^{sym})} \rho_M^{sym} = T(\rho_N^{sym}) = \frac{N+1}{M+1} S_M \left[ \rho_N^{sym} \otimes I^{\otimes(M-N)} \right] S_M \quad (4-17)$$

$S_M$  est le projecteur symétriseur dans l'espace des  $M$  qubits, la normalisation  $(N+1)/(M+1)$  assurant la conservation de la trace des opérateurs densité dans l'application  $T$ . Nous ne détaillons pas les calculs qui généralisent ceux décrits plus haut pour  $N = 1$ . On effectue le clonage en appliquant  $T$  à un état initial symétrique, produit tensoriel de  $N$  qubits tous dans l'état  $|\psi\rangle$ , on y adjoint  $M-N$  qubits dépolarisés et on symétrise l'ensemble. La fidélité du clonage obtenu est:

$$F_{N \rightarrow M} = \frac{MN + M + N}{M(N+2)} \quad \text{avec} \quad \eta_{N \rightarrow M} = 2F_{N \rightarrow M} - 1 = \frac{N}{M} \frac{M+2}{N+2} \quad (4-18)$$

Cette formule, établie par **N.Gisin et S.Massar (Phys.Rev.Lett. 79, 2153 (1997))**, redonne bien les résultats précédents pour  $N = 1$ . Nous retrouverons la même expression au &IVB lorsque nous considèrerons le clonage de photons par amplification de la lumière. On montre par des arguments variationnels que le clonage universel ainsi défini est optimal.

# Clonage $N \rightarrow M = \infty$ et estimation d'un qubit

Le cas du clonage symétrique  $N \rightarrow M = \infty$  est intéressant, car il permet de faire le lien avec le problème de l'estimation optimale. On a en effet:

$$F_{N \rightarrow M = \infty} = \frac{N+1}{N+2} \quad (4-19)$$

ce qui coïncide avec la fidélité d'estimation optimale d'un qubit donné en  $N$  exemplaires. Cette coïncidence n'est pas fortuite. La consistance de la théorie exige en effet que les fidélités optimales d'estimation et de clonage soient égales. Montrons-le par un raisonnement simple. Considérons une stratégie d'estimation basée sur le clonage qui consiste à tirer des  $N$  exemplaires un très grand nombre de clones (dans un état collectif intriqué) et à effectuer une mesure idéale sur ces clones traités individuellement. Cette méthode d'estimation dont la fidélité est  $F_{N \rightarrow M = \infty}$  n'est pas forcément optimale. La fidélité d'estimation optimale  $F_N^{(e)}$  est donc supérieure ou égale à la fidélité du clonage optimal  $N \rightarrow M = \infty$ :

$$F_N^{(e)} \geq F_{N \rightarrow M = \infty} \quad (4-20)$$

Inversement, une stratégie de clonage peut être basée sur l'estimation. On estime de façon optimale l'état des  $N$  qubits et on prépare dans l'état ainsi estimé un nombre aussi grand que l'on veut de clones. La fidélité de cette méthode de clonage,  $F_N^{(e)}$  par définition, est bornée par la probabilité de clonage optimal, d'où:

$$F_N^{(e)} \leq F_{N \rightarrow M = \infty} \quad (4-21)$$

De (4-20) et (4-21), on déduit bien:

$$F_N^{(e)} = F_{N \rightarrow M = \infty} = \frac{N+1}{N+2} \quad (4-22)$$

# Relation entre estimation d'état et clonage

Clonage et estimation optimales sont donc deux opérations reliées, même si le point de départ et le but recherché diffèrent. Nous avons analysé ce lien dans le cas de qubits, mais les résultats se généralisent (voir plus loin) à des systèmes quantiques à  $d$  états ( $d > 2$ ). Le clonage optimal d'un nombre infini de copies peut servir de méthode d'estimation optimale d'un échantillon de  $N$  systèmes et réciproquement.

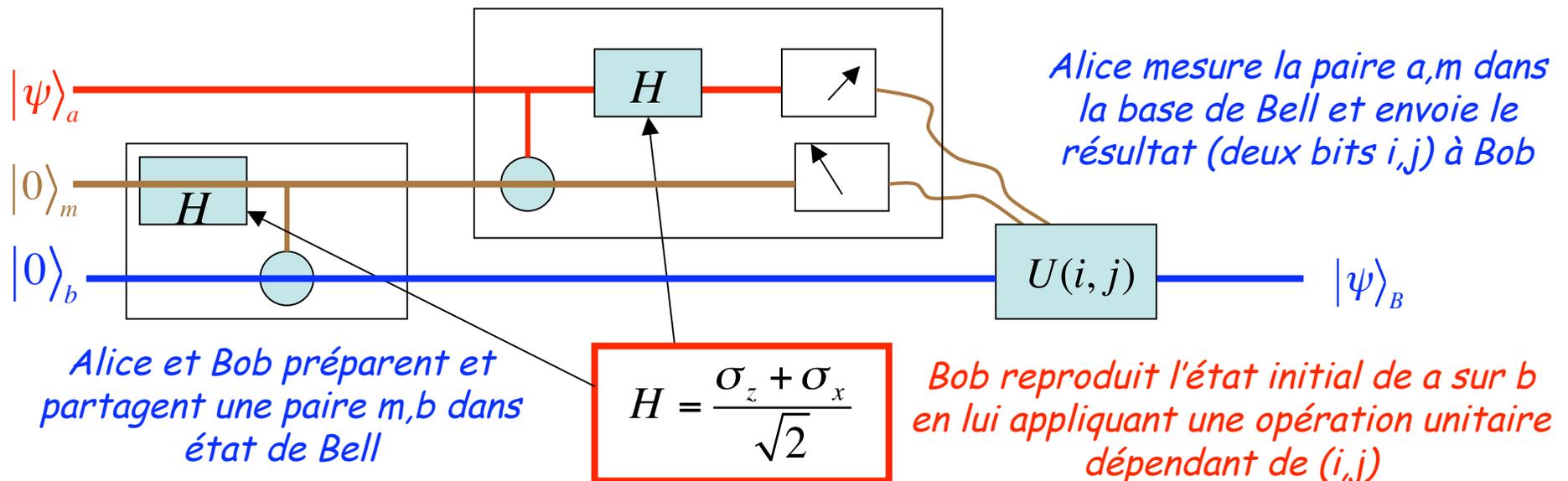
Remarquons qu'en général, on peut obtenir  $N+k$  clones de  $N$  systèmes avec une fidélité supérieure à l'estimation que l'on peut faire de leur état. Pour  $N=1$ , on peut cloner avec une fidélité de  $5/6$  alors que l'estimation optimale de l'état est  $2/3$ . Pour  $N$  qubits, la fidélité du clonage  $N \rightarrow N+k$  est:

$$F_{N \rightarrow N+k} = \frac{N+1 + \frac{N}{N+k}}{N+2} > \frac{N+1}{N+2} = F_N^{(e)} \quad (4-23)$$

l'égalité  $F_{N \rightarrow N+k} = F_N^{(e)}$  n'étant réalisée que pour  $k = \infty$ . Ainsi, en physique quantique, on peut copier (en nombre fini) avec une fidélité plus grande que l'on n'estime, ce qui est contraire à l'intuition classique. La même caractéristique, encore plus marquée, se retrouve dans la procédure de téléportation: on peut téléporter avec une fidélité égale à 1 un qubit dont l'état est complètement inconnu (voir page suivante).

# Relation entre téléportation et clonage

La téléportation (voir Cours 2001-2002) consiste à reproduire parfaitement à distance sur un qubit  $b$  l'état pur d'un qubit  $a$ . Toute l'information sur le qubit initial est détruite. Le circuit logique implique trois qubits: le qubit à téléporter  $a$ , et deux qubits  $m$  et  $b$  intriqués dans un état de Bell partagé entre Alice (l'expéditrice) et Bob (le récepteur). Pour faire une analogie avec le clonage  $1 \rightarrow 2$ , le qubit  $m$  d' Alice est « sa machine à téléporter » (analogue à la machine à cloner  $M$ ) et le qubit  $b$  de Bob est la « page blanche » sur laquelle apparaît la copie, analogue au qubit « clone »  $b$  décrit plus haut.



L'opérateur densité final de  $\{a, b\}$  est  $(I_a/2) \otimes (|\psi\rangle\langle\psi|)_b$ . La téléportation apparaît comme un clonage asymétrique de fidélité moyenne  $3/4$ . Noter que téléportation et clonage ne supposent aucune connaissance a priori de l'état traité.

# Généralisation: clonage de qudits

Le résultat établis pour les qubits se généralise au clonage de « qudits » appartenant à un espace de dimension  $d > 2$  (*R.F. Werner, Phys.Rev.A 58, 1827 (1998)*). Le clonage optimal consiste à appliquer l'opération de symétrisation des  $M$  qudits à un état initial produit tensoriel des  $N$  qudits à cloner dont on a fait le produit avec l'opérateur unité des  $M-N$  qudits de clonage. Les dimensions des espaces d'états symétriques par échange de  $N$  et  $M$  qudits sont:

$$d(N) = \frac{(d+N-1)!}{N!(d-1)!} \quad ; \quad d(M) = \frac{(d+M-1)!}{M!(d-1)!} \quad (4-24)$$

et l'opération de symétrisation s'écrit:

$$\rho_N = (|\psi\rangle\langle\psi|)^{\otimes N} \xrightarrow{T(\rho_N)} T(\rho_N) = \frac{d(N)}{d(M)} S_M (|\psi\rangle\langle\psi|)^{\otimes N} \otimes I^{\otimes(M-N)} S_M \quad (4-25)$$

Le symétriseur  $S_M$  est le projecteur sur les états symétriques des  $M$  qudits. Le facteur de normalisation dans (4-25) assure la conservation de la trace dans la symétrisation. L'opérateur densité réduit de chacun des  $M$  qudits finals s'écrit:

$$\rho_i = \eta(N, M, d) |\psi\rangle\langle\psi| + [1 - \eta(N, M, d)] \frac{I}{d} \quad \text{avec} \quad \eta(N, M, d) = \frac{N}{M} \frac{M+d}{N+d} \quad (4-26)$$

ce qui correspond à la fidélité de clonage:

$$F_{N \rightarrow M}^{(d)} = \langle\psi|\rho_i|\psi\rangle = \eta(N, M, d) + \frac{1 - \eta(N, M, d)}{d} = \frac{N}{M} + \frac{(M-N)(N+1)}{M(N+d)} \quad (4-27)$$

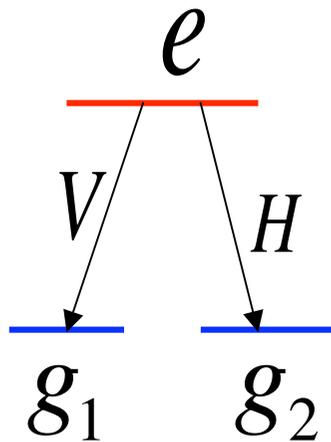
Les équations (4-25), (4-26) et (4-27) se ramènent bien pour  $d=2$  à (4-17) et (4-18).

## IV-B

Clonage de photons par émission  
stimulée

# Clonage 1 → 2 photons par amplification

Décrivons maintenant un processus physique réalisant de façon naturelle le clonage optimal symétrique de qubits  $1 \rightarrow 2$  (que nous généraliserons ensuite au cas  $N \rightarrow M$ ). Nous supposons l'information des qubits codée dans l'état de polarisation (H ou V) de photons appartenant au même mode spatial (S). La machine à cloner 1 qubit dans 2 est un atome amplifiant la lumière. Nous considérons un atome à un niveau excité  $e$  et deux niveaux fondamentaux  $g_1$  et  $g_2$ , les photons V et H étant émis avec la même probabilité d'émission spontanée sur les transitions  $e \rightarrow g_1$  et  $e \rightarrow g_2$  respectivement (cette égalité est requise par le caractère universel du processus de clonage que nous cherchons à réaliser).



Un photon dans le mode spatial  $S$ , de polarisation  $V$ , passe sur l'atome préparé dans l'état  $e$ . L'évolution du système atome + champ est décrite par:

$$|1_V, 0_H; e\rangle \rightarrow c_1 |1_V, 0_H; e\rangle + \sum_{S'} \sum_{i=1,2} c_{2,S'}^i |1_V, 0_H, 1_{S'}; g_i\rangle + c_{2,S} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} |2_V, 0_H; g_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1_V, 1_H; g_2\rangle \right] \quad (4-28)$$

L'amplitude  $c_1$  est associée à l'absence d'émission,  $c_{2,S'}^i$  à l'émission dans un mode  $S'$  différent de  $S$ , l'atome aboutissant dans l'état  $g_i$  ( $i=1$  ou  $2$ ) et  $c_{2,S}$  à l'émission d'un second photon dans le mode  $S$ . Nous notons ici les états du champ dans le formalisme de la seconde quantification par les nombres d'occupation dans les modes  $(S,V)$ ,  $(S,H)$  et  $(S')$  (0 représente le vide).

# Clonage 1→2 photons par amplification (suite)

Supposons que l'on puisse détecter sélectivement l'émission dans le mode S en éliminant les événements où aucun photon n'est créé et ceux où il apparaît dans un autre mode (nous discutons plus loin de la réalisation pratique de ce «filtrage» de l'état quantique). Dans le sous-espace des états associé au mode S, les amplitudes des termes à 2 et 1 photon(s) de polarisation V sont dans le rapport  $\langle 2|a^\dagger|1\rangle/\langle 1|a^\dagger|0\rangle = \sqrt{2}$  des éléments de matrice de l'opérateur  $a^\dagger$  de création d'un photon. L'état final du système dans ce sous-espace peut s'écrire dans un formalisme qui distingue par des labels a et b les photons, en symétrisant leur état pour tenir compte de leur caractère bosonique. Ce formalisme nous permet de faire simplement le lien avec le clonage décrit plus haut. On obtient en effet immédiatement:

$$|\Psi(2 \text{ photons, atome})\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\Psi_a(V)\rangle |\Psi_b(V)\rangle |g_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left[ \frac{|\Psi_a(V)\rangle |\Psi_b(H)\rangle + |\Psi_a(H)\rangle |\Psi_b(V)\rangle}{\sqrt{2}} \right] |g_2\rangle \quad (4-29)$$

On retrouve l'expression de la première ligne de (3-30), où les 2 photons, dans un état symétrique par échange sont les qubits a et b (V et H jouant le rôle des états logiques 0 et 1 et l'atome celui du qubit auxiliaire m). On obtient de même la seconde ligne de (3-30) en écrivant le résultat de l'amplification d'un photon H. Le processus de clonage étant identique pour les deux états de la base logique, il l'est également, par superposition, pour toute combinaison linéaire. Nous voyons ainsi que le clonage optimal avec fidélité 5/6 d'un qubit dans deux est automatiquement réalisé par l'amplification optique. ***Le caractère approximatif du clonage et l'intrication entre les qubits est ici une conséquence de l'inévitable émission spontanée qui ajoute son « bruit quantique » au processus classique d'amplification.***

# Clonage $N \rightarrow M = N+k$ photons par amplification optique

Le modèle photonique s'applique aussi au cas où l'on veut obtenir  $N+k$  copies d'un qubit à partir de  $N$ . La machine à cloner est modélisée par un ensemble de  $k = M - N$  atomes identiques à 3 niveaux (voir figure plus haut), initialement tous dans l'état  $e$ . Elle interagit avec  $N$  photons dans l'état  $V$ . On se restreint au sous-espace correspondant à l'émission de exactement  $k$  photons supplémentaires dans le mode des  $N$  photons initiaux. Généralisant le cas  $1 \rightarrow 2$ , nous obtenons, à l'ordre  $k$  de la théorie des perturbations l'état final du système «photons + atomes» sous la forme:

$$|\Psi(N + k \text{ photons}, k \text{ atomes})\rangle = \sum_{l=0}^k b_{n,l,k} |N + l\rangle_V |k - l\rangle_H \sum_{q=1}^{Q_{kl}} |G_q\rangle \quad (4 - 30)$$

Les  $|G_q\rangle$  sont des états produits tensoriels de  $k$  atomes dans lesquels  $l$  atomes sont dans l'état  $g_1$  et  $k-l$  dans  $g_2$ . Ces états orthogonaux (donc distinguables) sont repérés par l'indice  $q$  prenant, pour une valeur de  $l$  donnée  $Q_{kl}$  valeurs dont le nombre est donné par la loi combinatoire:

$$Q_{kl} = \binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!} \quad (4 - 31)$$

Les amplitudes  $b_{Nlk}$  sont proportionnelles aux éléments de matrice des puissances d'opérateurs de création de photons:

$$b_{N,l,k} \propto \langle N + l | (a_V^\dagger)^l | N \rangle \langle k - l | (a_H^\dagger)^{k-l} | 0 \rangle = \sqrt{\frac{(N + l)!(k - l)!}{N!}} \quad (4 - 32)$$

# Clonage $N \rightarrow M = N+k$ photons par amplification optique (suite)

La fidélité du clonage va dépendre du nombre moyen de photons reproduits dans l'état  $V$  et celui émis par processus spontané dans  $H$  va être à l'origine du bruit rendant le clonage imparfait. Appelons  $P(N+l, k-l)$  la probabilité de la partition où  $N+l$  photons ont *la « bonne » polarisation ( $V$ )* et  $k-l$  la mauvaise ( $H$ ). On a tout de suite:

$$P(N+l, k-l) = Z |b_{n,l,k}|^2 Q_{kl} = Z \frac{k!(N+l)!}{N!l!} \quad (4-33)$$

où  $Z$  est une constante de normalisation satisfaisant:

$$Z \sum_{l=0}^k \frac{k!(N+l)!}{N!l!} = 1 \quad (4-34)$$

La somme dans (4-34) se calcule par récurrence sur  $k$  à partir de  $k=0$ . On trouve sans peine:

$$\sum_{l=0}^k \frac{k!(N+l)!}{N!l!} = \frac{(N+k+1)!}{(N+1)!} \quad \text{d'où } Z = \frac{(N+1)!}{(N+k+1)!} \quad (4-35)$$

et:

$$P(N+l, k-l) = (N+1)k! \frac{(N+l)!}{l!(N+k+1)!} \quad (4-36)$$

# Clonage $N \rightarrow M = N+k$ photons (fin)

Calculons maintenant la valeur moyenne  $\langle l \rangle_{Nk}$  du nombre de photons ajoutés avec la polarisation V:

$$\langle l \rangle_{N,k} = \sum_{l=0}^k l P(N+l, k-l) = \frac{(N+1)k!}{(N+k+1)!} \sum_{l=1}^k \frac{(N+l)!}{(l-1)!} = \frac{(N+1)k!}{(N+k+1)!} \sum_{l'=0}^{l'=k'} \frac{(N+l'+1)!}{l'!} \quad (4-37)$$

en posant  $l'=l-1$  et  $k'=k-1$  dans la dernière somme qui se calcule par récurrence comme à la page précédente:

$$\sum_{l'=0}^{k'=k-1} \frac{(N+l'+1)!}{l'!} = \frac{1}{N+2} \frac{(N+k+1)!}{(k-1)!} \quad (4-38)$$

D'où on déduit le résultat simple:

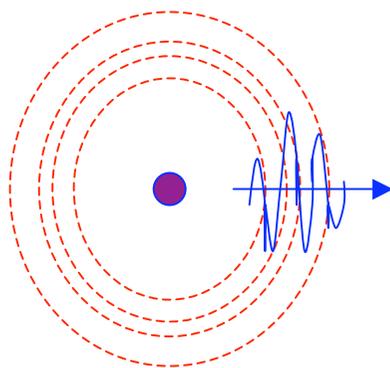
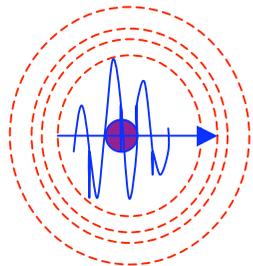
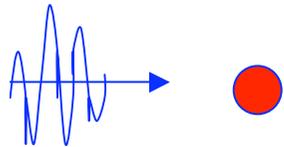
$$\langle l \rangle_{N,k} = \frac{N+1}{N+2} k \quad (4-39)$$

qui indique que la fraction  $(N+1)/(N+2)$  des photons ajoutés est clonée dans le bon état. On en déduit l'expression de la fidélité, identique à celle donnée par (4-18):

$$F = \frac{N + \langle l \rangle_{N,k}}{N+k} = \frac{N(N+2) + k(N+1)}{(N+k)(N+2)} = \frac{M(N+1) + N}{M(N+2)} \quad (4-40)$$

***L' amplification optique réalise de façon naturelle l'opération de symétrisation des  $M$  qubits en prenant en compte le caractère bosonique des photons: on obtient automatiquement le clonage optimal par ce processus.***

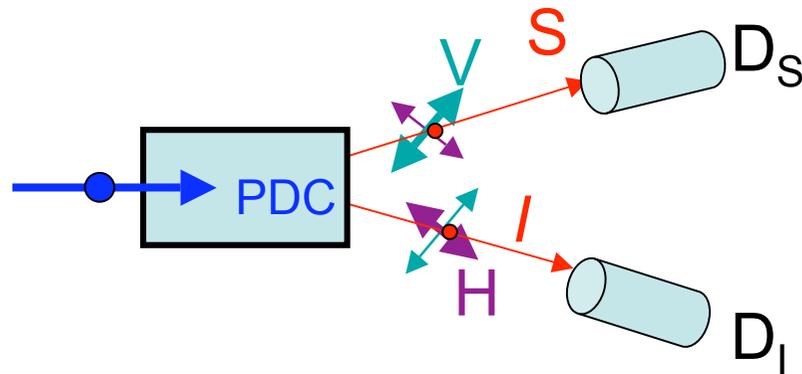
# Difficultés de l'expérience de clonage par émission stimulée atomique de photon



Pour réaliser le clonage  $1 \rightarrow 2$  sous la forme décrite plus haut, il faut envoyer un seul photon sur un atome excité et détecter en coïncidence les 2 photons résultants. Mais l'atome émet spontanément dans tous les modes du vide, alors que le photon incident n'amplifie cette émission que dans son propre mode (voir eq (4-28)). La probabilité de clonage est donc faible, le processus le plus fréquent étant l'émission spontanée et incontrôlable de l'atome dans un mode différent du photon à cloner.

Pour résoudre ce problème d'accord de mode (« mode matching »), on remplace l'émission spontanée atomique d'un photon par un processus de conversion paramétrique dans un cristal non-linéaire émettant des photons par paires. L'avantage est que la détection d'un photon de la paire fixe le mode dans lequel l'autre est émis. En envoyant le photon à cloner dans ce mode, on n'est sensible qu'aux événements pour lesquels l'amplification optique est importante. La conversion paramétrique opérant en impulsions brèves, la synchronisation de la séquence est cruciale (coïncidence du photon à cloner et de la conversion paramétrique créant la paire de photons).

# Principe du clonage par conversion paramétrique de photon



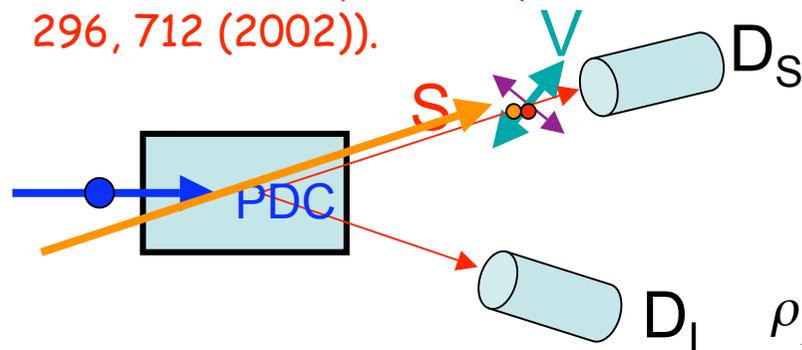
Le cristal PDC (Parametric Down Converter) convertit un **photon pompe** en deux photons (Signal **S** et Idler **I**) corrélés en directions et en polarisation, formant une paire EPR.

$$|\Psi_{\text{paire}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V_S H_I\rangle - |H_S V_I\rangle) \quad (4-41)$$

Un clic de  $D_I$  (détectant **H et V**) annonce la présence d'un photon dans le mode **S**, décrit par l'opérateur densité:

$$\rho_S = \frac{1}{2}(|1_V\rangle\langle 1_V| + |1_H\rangle\langle 1_H|) \quad (4-42)$$

(A.Lamas-Linares, C.Simon, J.C.Howell et D.Bouwmeester, Science, 296, 712 (2002)).



Un **photon «à cloner»** polarisé **V** est envoyé dans le PDC, **en coïncidence temporelle et spatiale avec le photon S** de la paire EPR. Le processus d'émission stimulée favorise dans le rapport 2:1 l'émission d'un 2<sup>nd</sup> photon **V** sur celle d'un photon **H** dans le mode **S**. La paire de photons détectés par  $D_S$  est décrite par:

$$\rho_{\text{paire}(S)} = \frac{2}{3}|2_V, 0_H\rangle\langle 2_V, 0_H| + \frac{1}{3}|1_V, 1_H\rangle\langle 1_V, 1_H| \quad (4-43)$$

La réalisation expérimentale de ce schéma de principe sera décrite dans la leçon 5.