

EFFETS QUANTIQUES DANS LES IMAGES OPTIQUES ET LES PEIGNES DE FREQUENCE

HISTOIRES DE MODES



INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

MODES ET MESURE

MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

CONCLUSION

Information quantique actuelle:
quelques qubits

Information quantique utile:
beaucoup de qubits

7 qubits pour factoriser 15 !

Importance de l'étude
des propriétés quantiques des systèmes
ayant de **nombreux degrés de liberté**

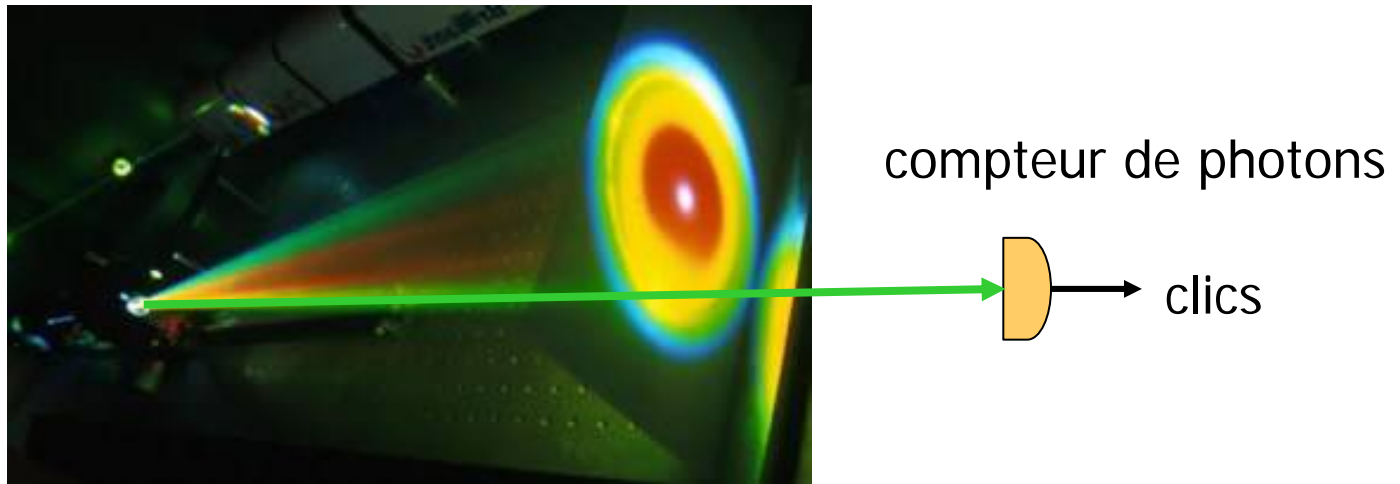
Pour la lumière:

systèmes optiques multimodes

systèmes quantiques massivement parallèles

Lumière quantique, cas 1

régime du **comptage de photons**



Peu de photons, beaucoup de modes

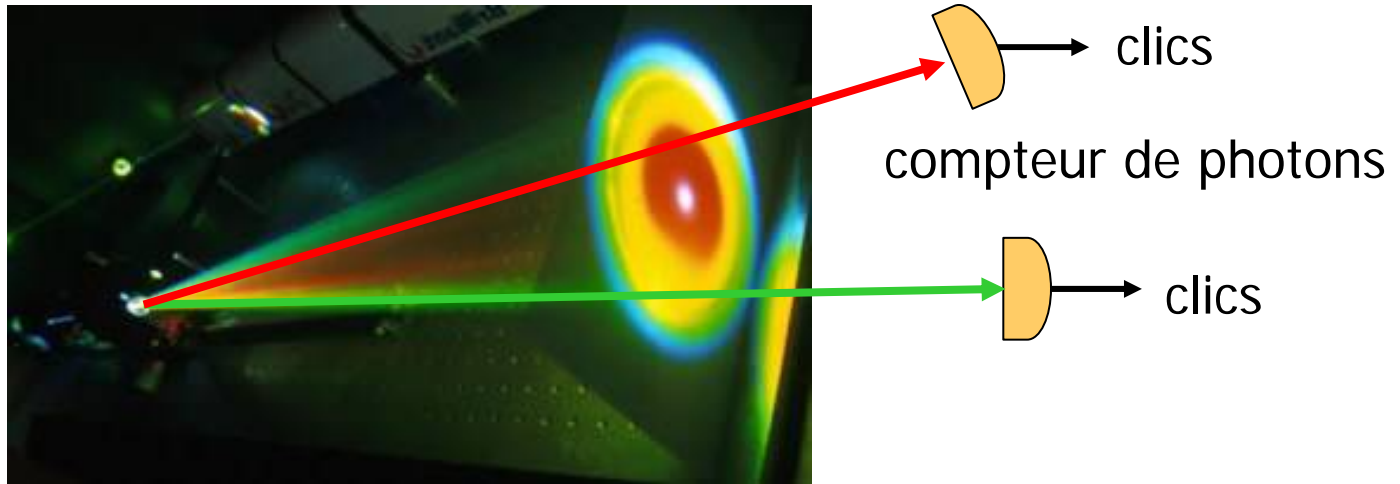
$$|\Psi\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |1/\ell\rangle$$

nombre de photons

Indice du mode

Lumière quantique, cas 1

régime du **comptage de photons**



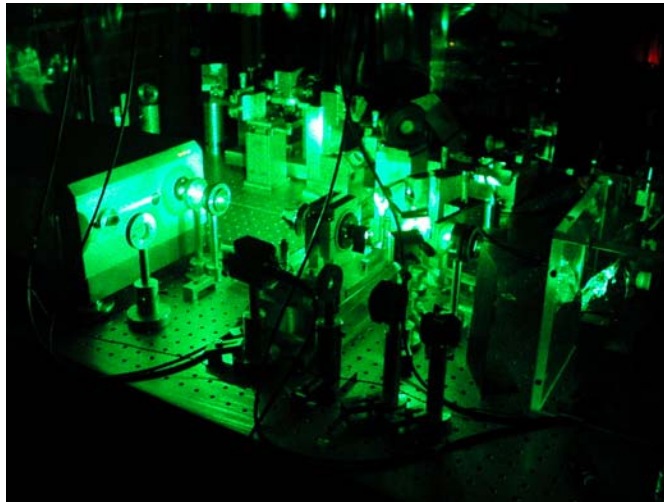
$$|\Psi'\rangle = \sum_{l,l'} c_{l,l'} |1/l, 1/l'\rangle$$

Etat bipartite intriqué

Effets quantiques dans les **corrélations** entre clics

Lumière quantique, cas 2

régime des **variables continues**



photodiode



photocourant

Peu de modes, beaucoup de photons

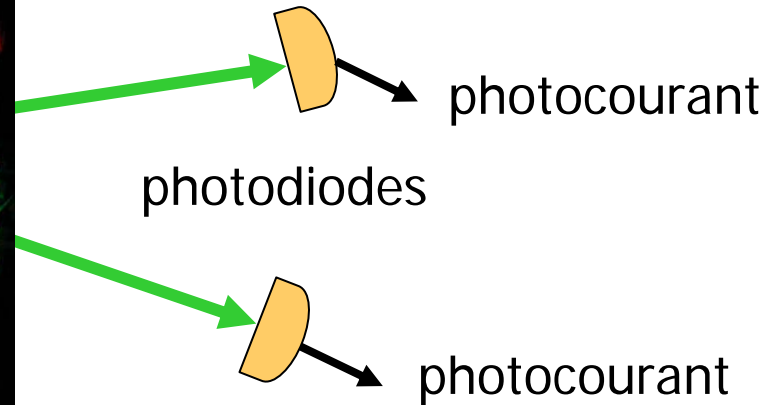
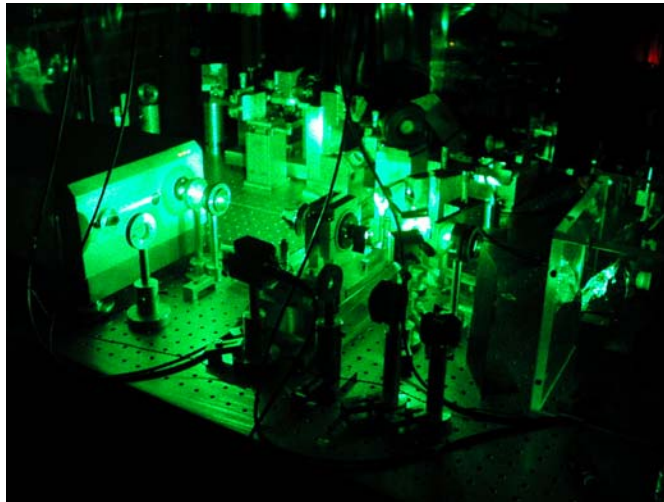
$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n/\ell_0\rangle$$

nombre de photons

indice du mode

Lumière quantique, cas 2

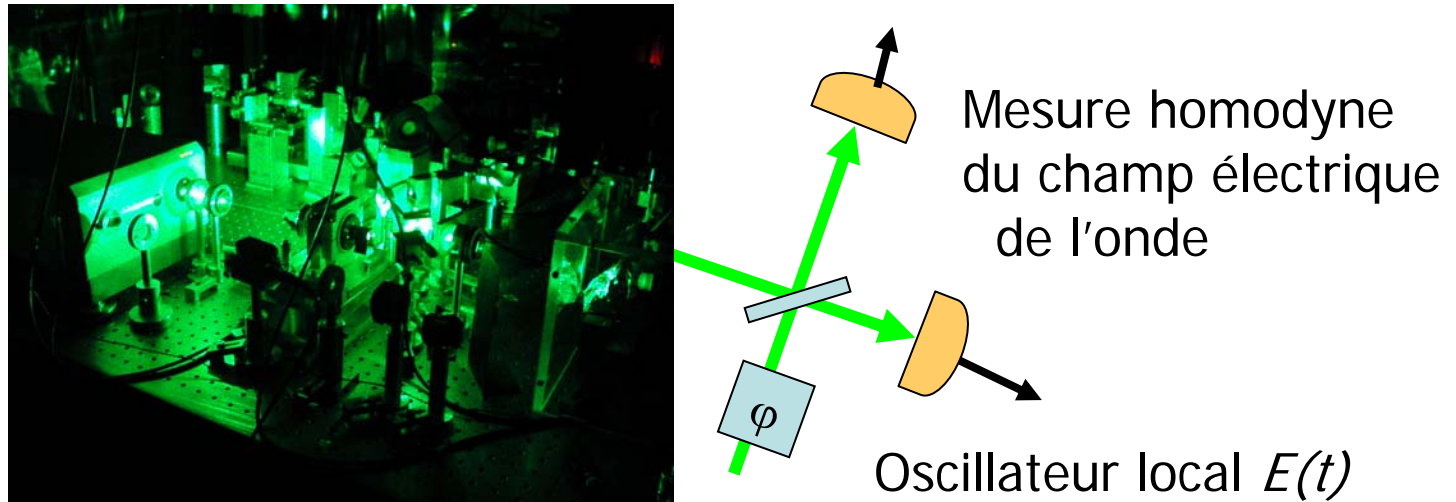
régime des **variables continues**



$$|\Psi'\rangle = \sum_{n,n'} c_{n,n'} |n/\ell_0, n'/\ell'_0\rangle$$

Lumière quantique, cas 2

régime des **variables continues**



$E(t) = E_0 \cos \omega t$: quadrature E_1 mesurée

$E(t) = E_0 \sin \omega t$: quadrature E_2 mesurée

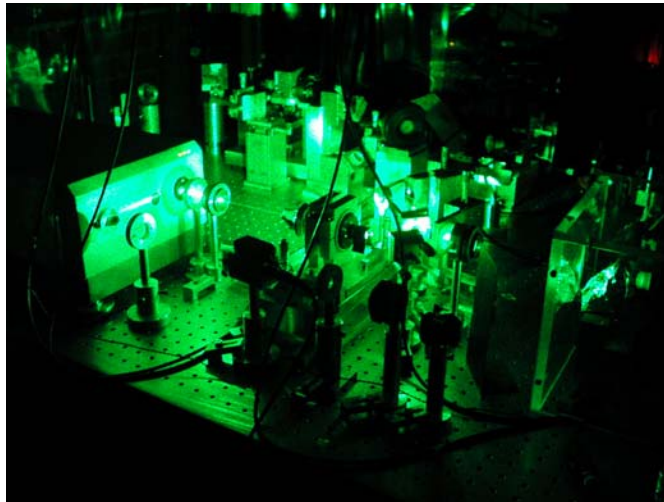
quadratures E_1 et E_2 analogues quantiques de x et p

$$\Delta E_1 \times \Delta E_2 \geq E_{vide}^2$$

Effets quantiques dans les **fluctuations** de quadrature

Lumière quantique, cas 2

régime des **variables continues**



$$E_1^A E_2^A$$

$$E_1^B E_2^B$$

Effets quantiques dans les **corrélations**
entre quadratures

(intrication à la Einstein, Podolsky, Rosen ...)

Lumière quantique, cas général

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_\ell} \dots c_{n_1, \dots, n_\ell, \dots} |n_1/1, \dots, n_\ell/\ell, \dots\rangle$$

Beaucoup de photons, beaucoup de modes

Colossales possibilités d'intrication

INTRODUCTION

 **QU'EST-CE QU'UN MODE ?**

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

MODES ET MESURE

MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

CONCLUSION

Un minimum de formalisme

Opérateur champ électrique complexe en \vec{r}, t :

$$\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} \epsilon_{\ell} \hat{a}_{\ell} \vec{u}_{\ell}(\vec{r}, t)$$

facteur d'échelle

Opérateur d'annihilation

amplitude du mode

$\{\vec{u}_{\ell}\}$

base de modes =

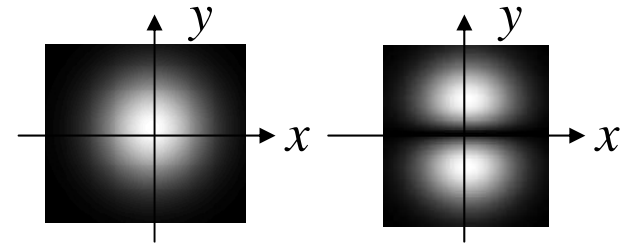
ensemble complet et orthonormé
de solutions des équations de Maxwell

Exemple de modes

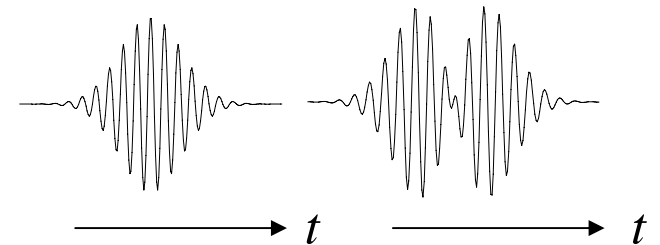
$$\vec{u}_\ell(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{\varepsilon}_\ell e^{i(\vec{k}_\ell \cdot \vec{r} - \omega_\ell t)}$$

Ondes planes progressives

Modes de Hermite-Gauss spatiaux



Modes de Hermite-Gauss temporel



N'importe quelle solution des équations de Maxwell est le premier élément d'une base de modes

quelle base de modes choisir ?

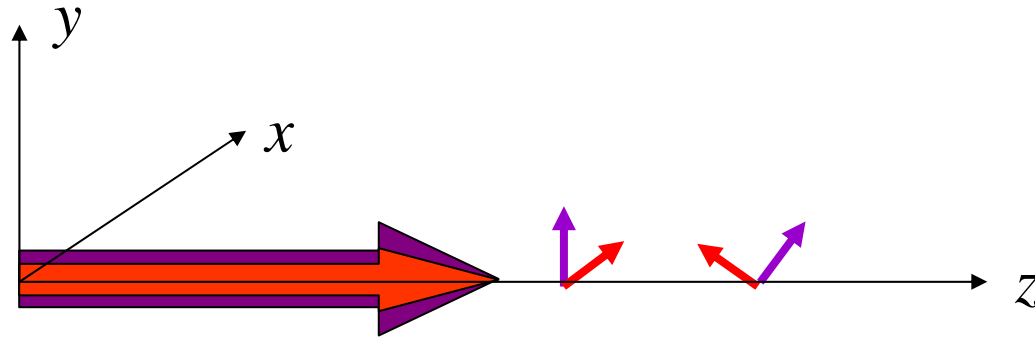
La plus pratique pour le problème considéré

Le même état quantique

peut avoir des formes très différentes

selon la base de mode choisie pour l'écrire

Exemple 1: états bi-modes



$$|\Psi\rangle = |\psi_x^{\text{comprimé}}\rangle \otimes |\varphi_y^{\text{comprimé}}\rangle$$

Etat **séparable** sur la base des polarisations O_x, O_y

$$|\Psi\rangle = \alpha |\varphi_{45}\rangle \otimes |\psi_{-45}\rangle + \beta |\chi_{45}\rangle \otimes |\xi_{-45}\rangle$$

Etat **intriqué** sur la base des polarisations $O_{+45} O_{-45}$

Exemple 2: « paquet d'onde à un photon »

$$|\Psi\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |1/\ell\rangle$$

On définit la fonction $\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \sum_{\ell} c_{\ell} \vec{u}_{\ell}(\vec{r}, t)$

On complète la base de modes: $\{ \vec{v}_j \}$

$$|\Psi\rangle = |1/j=1\rangle \otimes |0/j \neq 1\rangle$$

Multimode sur une base

Monomode sur une base bien choisie

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

 LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

MODES ET MESURE

MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

CONCLUSION

Y a-t-il des propriétés intrinsèques,
invariantes
par changement de base de modes ?

- L'état vide $|0\rangle = |0, \dots, 0, \dots\rangle$
- Le nombre total de photons

$$\hat{N} = \sum_{\ell} \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} = \sum_j \hat{b}_j^{\dagger} \hat{b}_j$$

Etat monomode intrinsèque

Un état est **intrinsèquement monomode** s'il existe une base de modes $\{\vec{u}_i(\vec{r})\}$ sur laquelle on peut l'écrire sous la forme:

$$|\Psi\rangle = |\varphi : \vec{u}_1\rangle \otimes |0, \dots, 0, 0, \dots\rangle$$

Un état est **intrinsèquement multimode** s'il n'existe pas une telle base

Critère pour un état intrinsèquement monomode

N. Treps, V. Delaubert, A. Maître, J.M. Courty, C. Fabre Phys. Rev A **71** 013820 (2005)

Tous les vecteurs $\hat{a}_\ell |\Psi\rangle$ sont proportionnels

$$\Leftrightarrow |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}', t, t')| = 1$$

où

$$g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}', t') \rangle}{\sqrt{\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}', t') \hat{E}^{(+)}(\vec{r}', t') \rangle}}$$

cohérence parfaite du champ dans cet état

(cf Glauber, Mandel ...)

nombre intrinsèque de modes

dimension de l'espace engendré

par les $\{\hat{a}_\ell |\Psi\rangle\}$

Exemple : $|\Psi\rangle = |1,1\rangle$ est un état intrinsèquement à deux modes

on ne peut l'écrire $|2,0\rangle$ sur aucune base de modes

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

 **MODES PROPRES OU « SUPERMODES »**

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

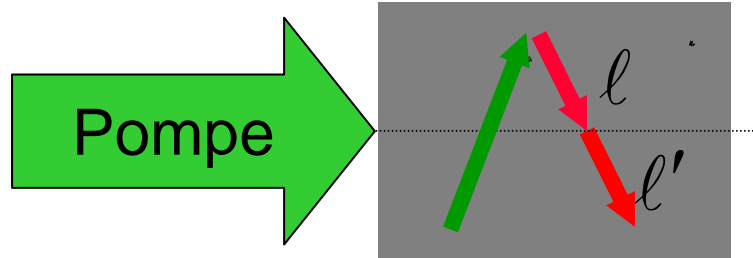
MODES ET MESURE

MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

CONCLUSION

Génération de « photons jumeaux » dans un milieu paramétrique



$$\hat{H} = \sum_{l,l'} \left(G_{l,l'} \hat{a}_l \hat{a}_{l'} + G_{l,l'}^* \hat{a}_l^+ \hat{a}_{l'}^+ \right)$$

Diagonalisation de la matrice \mathbf{G} : $\hat{b}_m = \sum_l U_m^l \hat{a}_l$

$$\hat{H} = \sum_{m=1}^{N_m} \left(\Lambda_m \left(\hat{b}_m \right)^2 + \Lambda_m^* \left(\hat{b}_m^+ \right)^2 \right)$$

$\hat{b}_m^+ |0\rangle = |1/m\rangle$ photon dans « **supermode** » $\vec{w}_m = \sum_l U_m^l \vec{u}_l$

Etat quantique produit ?

$$\hat{H} = \sum_{m=1}^{N_m} \left(\Lambda_m (\hat{b}_m)^2 + \Lambda_m^* (\hat{b}_m^+)^2 \right)$$

$|\Psi\rangle$ Produit tensoriel d'états comprimés

Nombre intrinsèque de modes dans l'état produit ?

= nombre N_m de valeurs propres Λ_m non nulles

= rang de la matrice \mathbf{G}

$|\Psi\rangle$ état **intriqué multipartite** sur d'autres bases de modes

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

 **SUPERMODES TEMPORELS**

SUPERMODES SPATIAUX

MODES ET MESURE

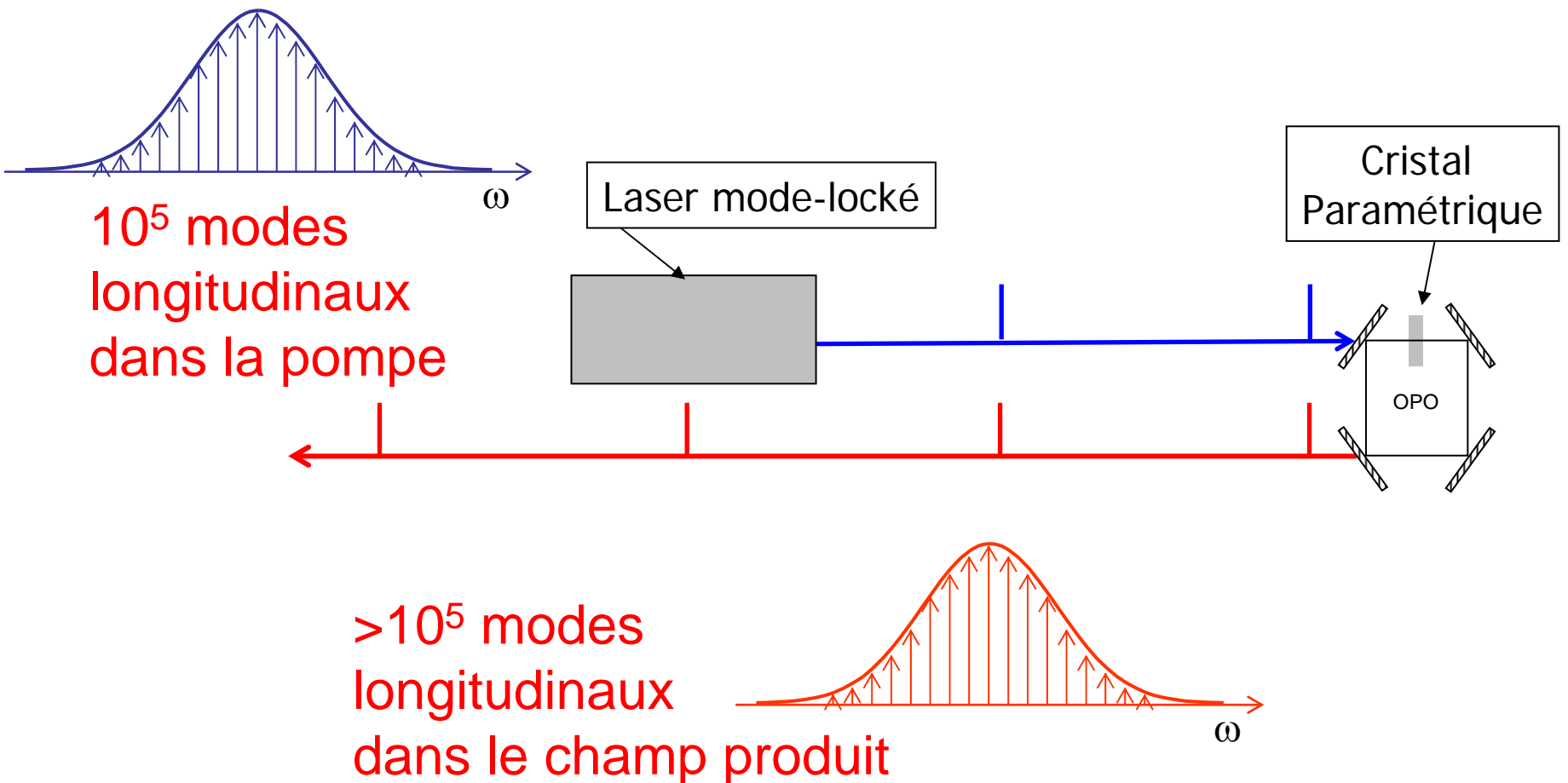
MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

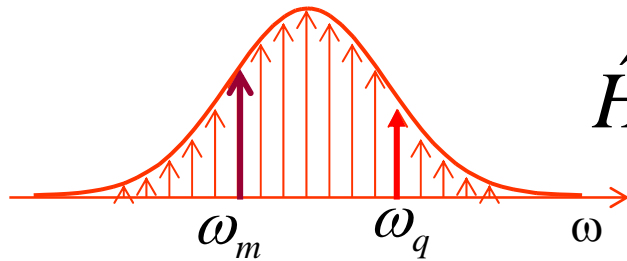
CONCLUSION

L'exemple du « SPOPO »

Synchronously Pumped Optical Parametric Oscillator



Hamiltonien du système



$$\hat{H} = \sum_{m,q} \left(G_{m,q} \hat{a}_{\omega_m} \hat{a}_{\omega_q} + G_{m,q}^* \hat{a}_{\omega_m}^+ \hat{a}_{\omega_q}^+ \right)$$

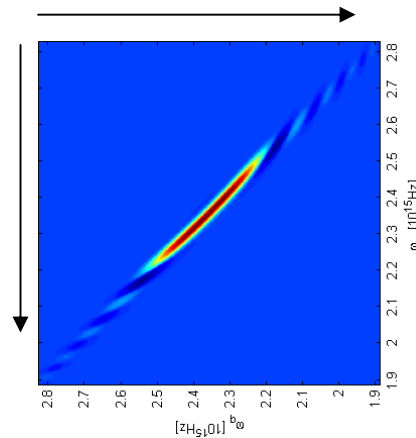
$$G_{mq} = \chi(\omega_m, \omega_q) \alpha_{\text{pump}}(\omega_m + \omega_q)$$

dépend du cristal

amplitude spectrale de la pompe

$G_{l,l'}$

l

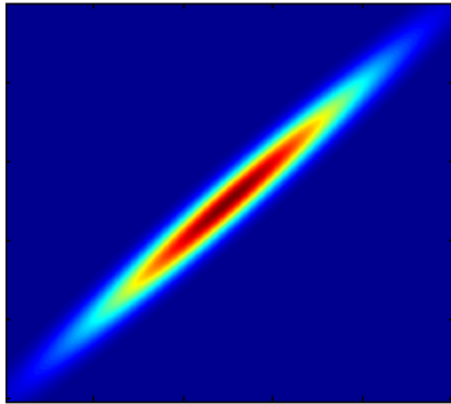


(matrice $10^5 \times 10^5$)

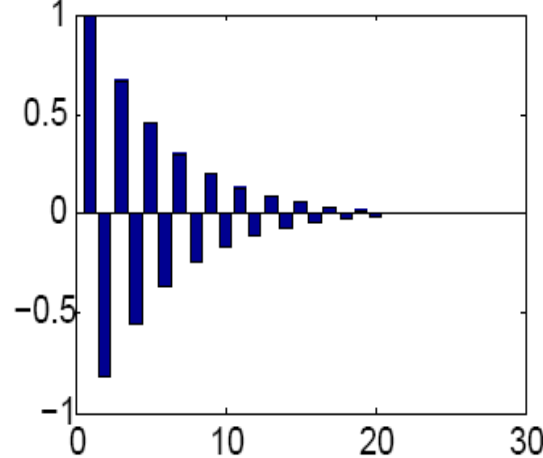
Modes propres, cas Gaussien

variation Gaussienne de G_{mq} : solution analytique

G(m,q) matrix



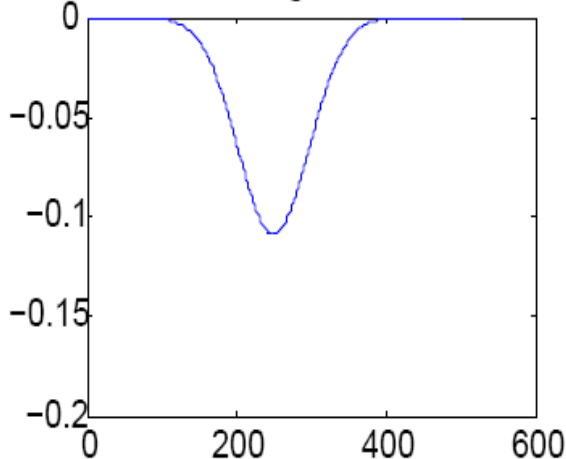
Eigenvalues, s1=30, s2=300, n1=0, n2=0



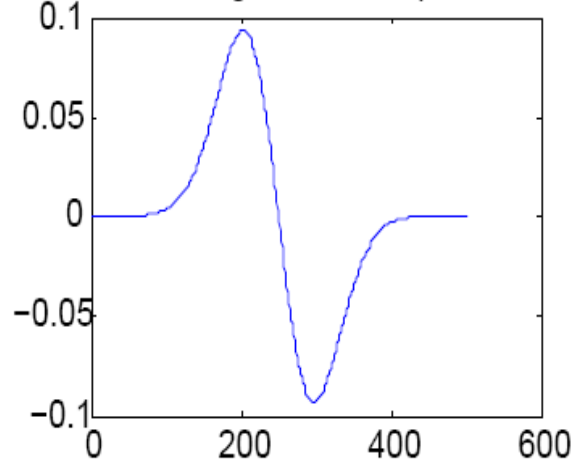
$$\Lambda_k = \Lambda_0 (-r)^k$$

Sur les 10^5 valeurs propres, seulement 30 environ sont non nulles

first eigen-mode



second eigen-mode, vp=0.66942

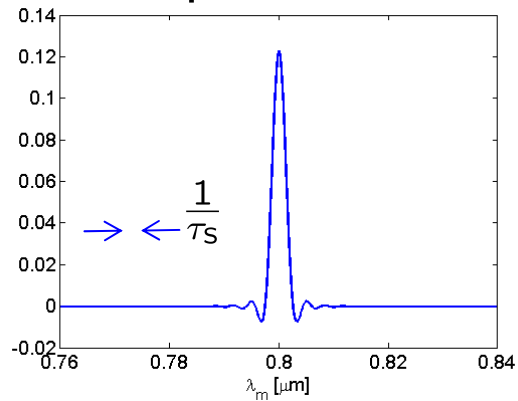


Supermodes :
Hermite-Gauss
temporels

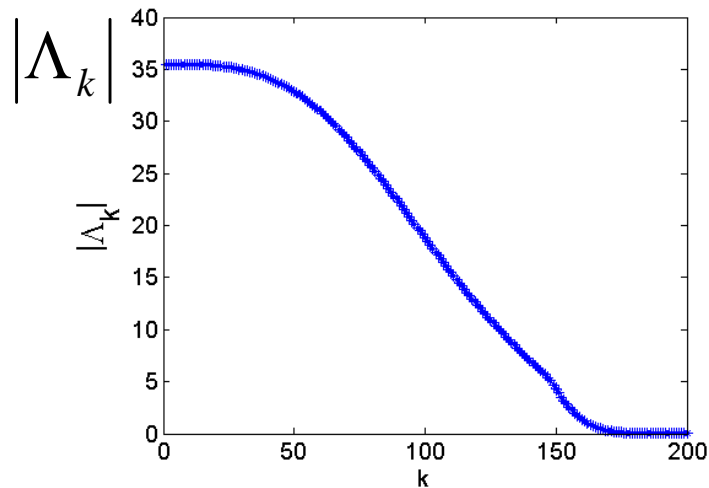
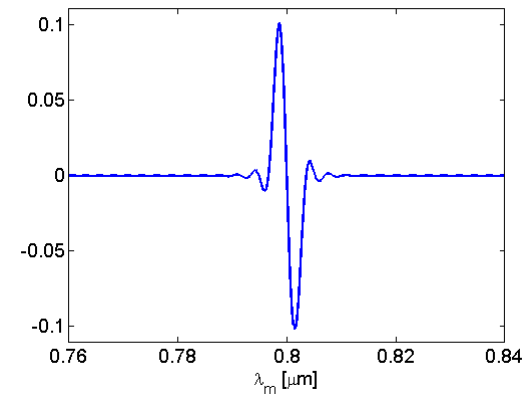
Modes propres, cas non-Gaussien

Cristal de BIBO, $0.4\mu\text{m}$, $t_p=100\text{fs}$ $l=5\text{mm}$

supermode 1



supermode 2



150 valeurs propres
non nulles

A partir d'une situation très multimode
(10^5 modes longitudinaux)

Il est en général possible
d'extraire un espace de Hilbert plus petit

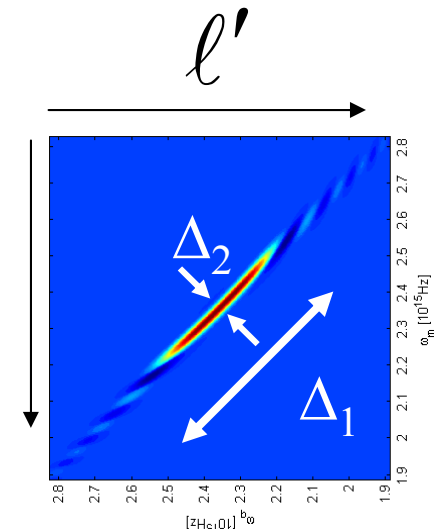
$$N_m \approx 1-100$$

dans lequel les effets quantiques
sont concentrés et maximisés

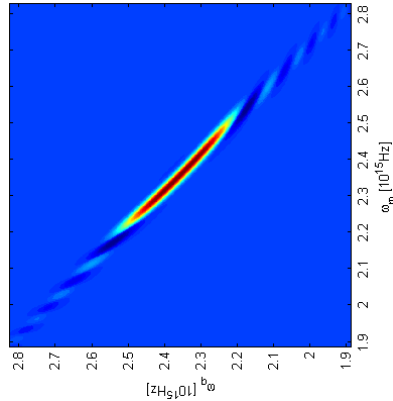
- squeezing multimode
- intrication multipartite

$$N_m \approx \frac{\Delta_1}{2\Delta_2}$$

$G_{l,l'}$



Des Hamiltoniens « à la carte »

 $G_{l,l'}$ 

$$G_{l,l'} = \chi_{l,l'}^{cristal} \alpha_{l,l'}^{pompe}$$

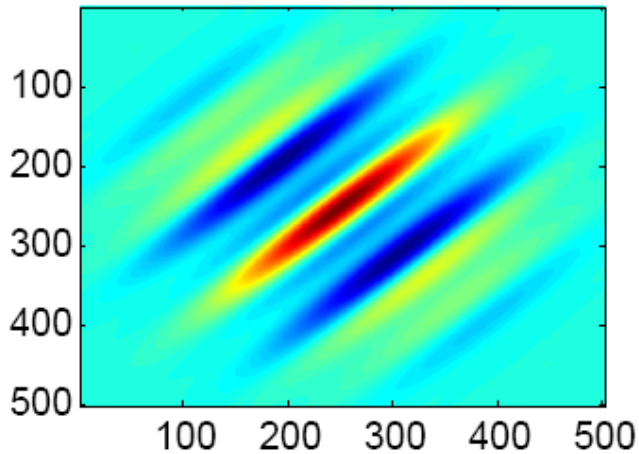
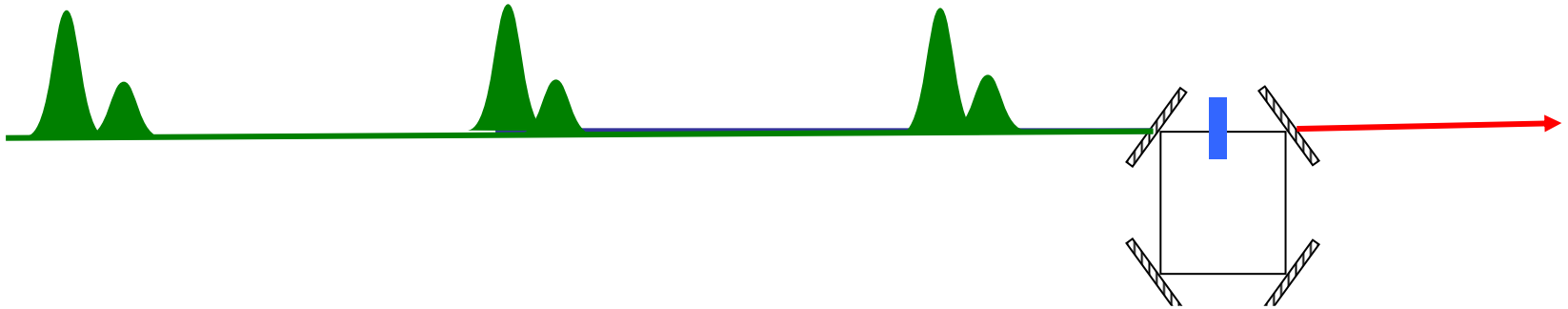


En changeant la forme de la pompe, il est possible d'ajuster à volonté le nombre et le spectre des supermodes

« **contrôle cohérent** »

des états quantiques des peignes de fréquence

Exemple



matrice G_{mq}

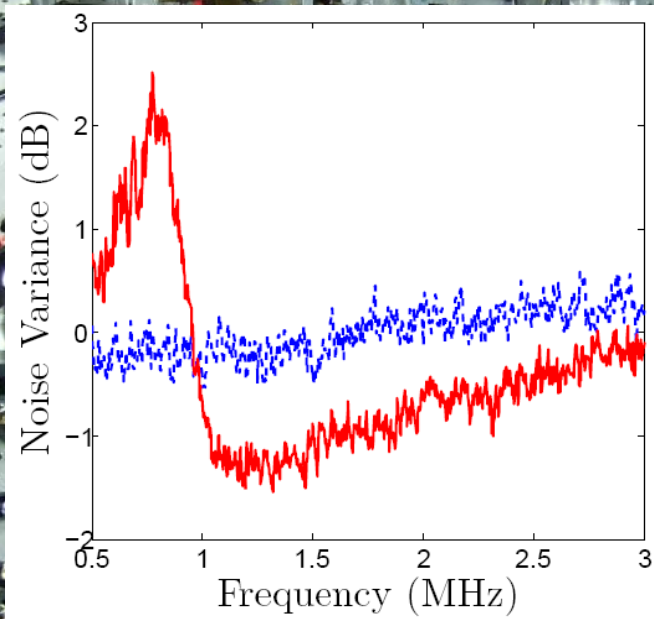
valeurs propres

$$H = \hbar g \left(\hat{b}_1^2 - \hat{b}_2^2 + \frac{1}{2} (\hat{b}_3^2 - \hat{b}_4^2) + h.c. \right)$$

Méthode possible pour produire des états intriqués de taille quelconque, en particulier des « états cluster »

Montage expérimental

Seuil d'oscillation du SPOPO très bas (16mW)



22% squeezing sur l'intensité totale

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

 **SUPERMODES SPATIAUX**

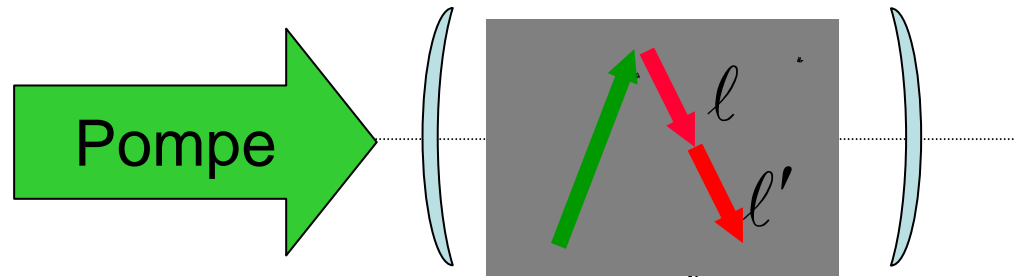
MODES ET MESURE

MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

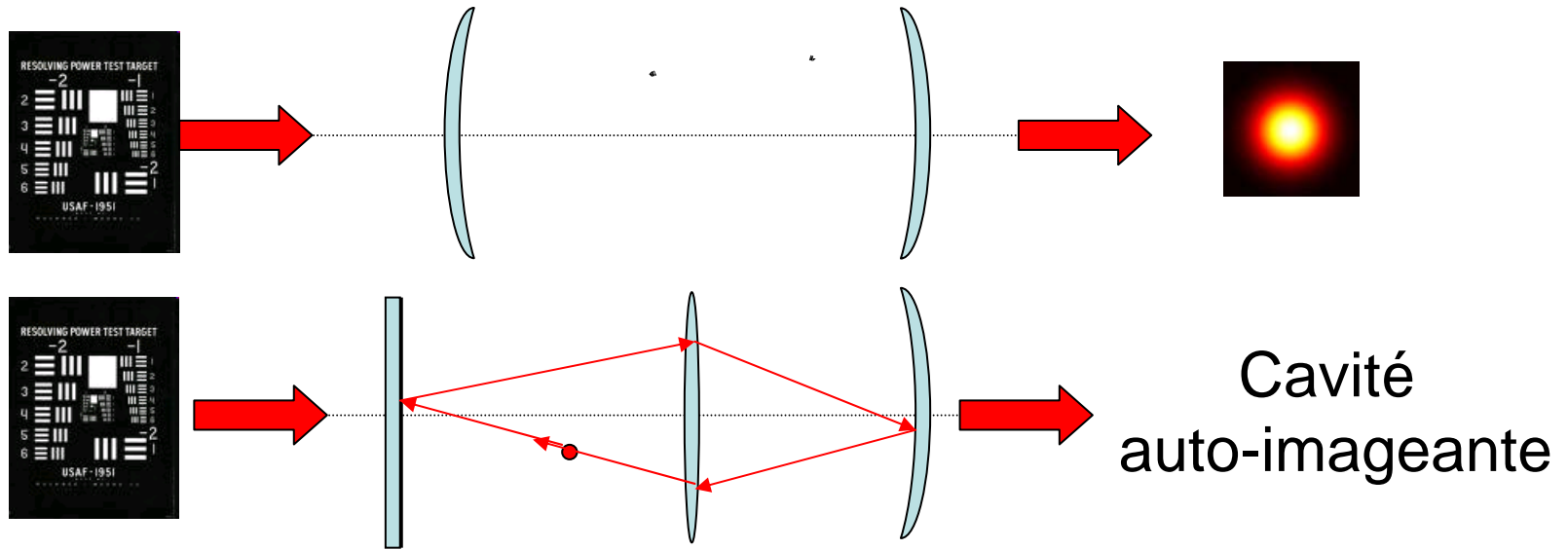
CONCLUSION

Génération paramétrique en cavité

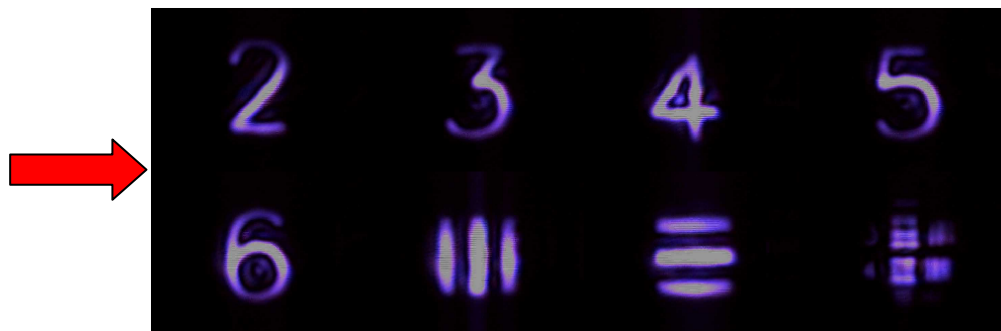


Cavité
en général
monomode
transverse

Génération paramétrique en cavité



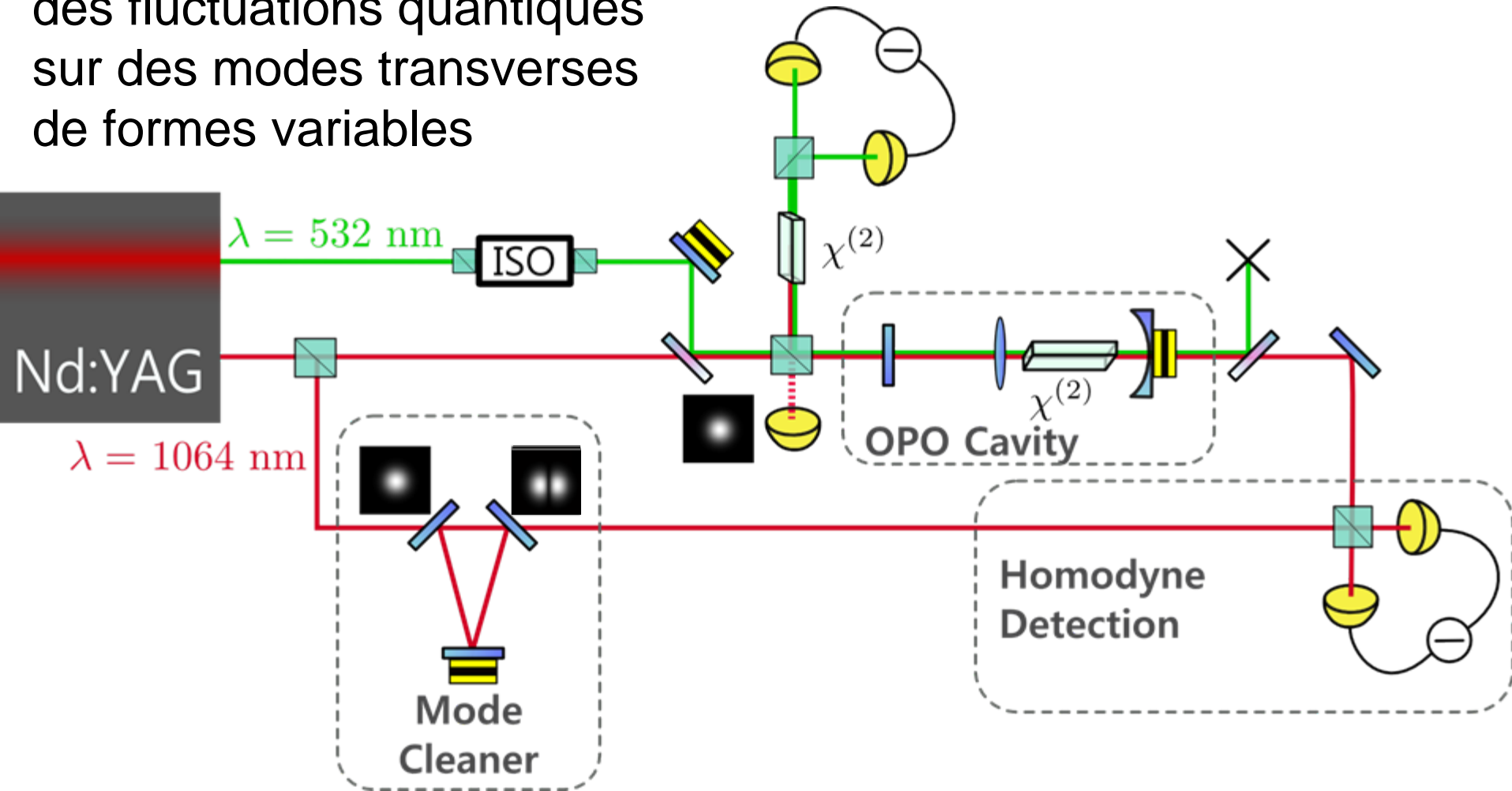
Cavité asservie à résonance



Nombre de modes transverses ~ 100

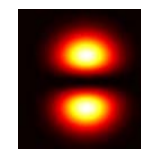
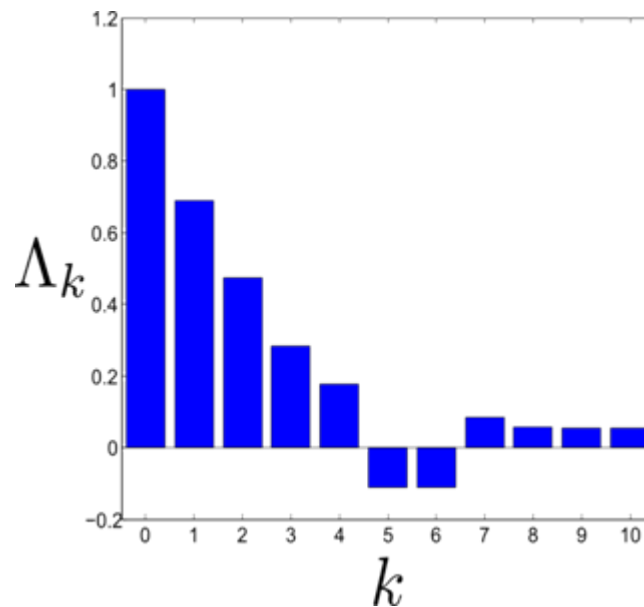
Génération paramétrique en cavité

Détection homodyne
des fluctuations quantiques
sur des modes transverses
de formes variables



Spectre de la matrice de couplage \mathbf{G}

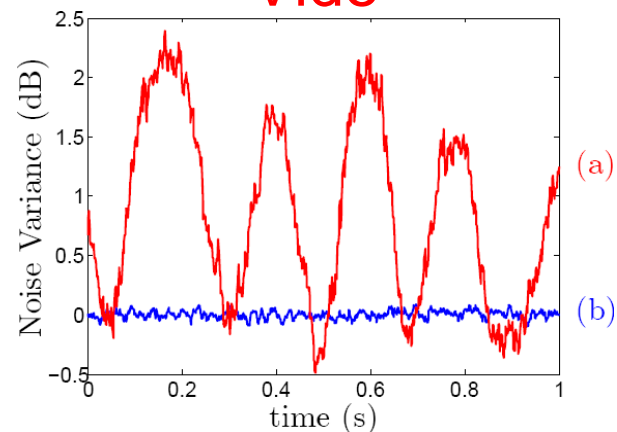
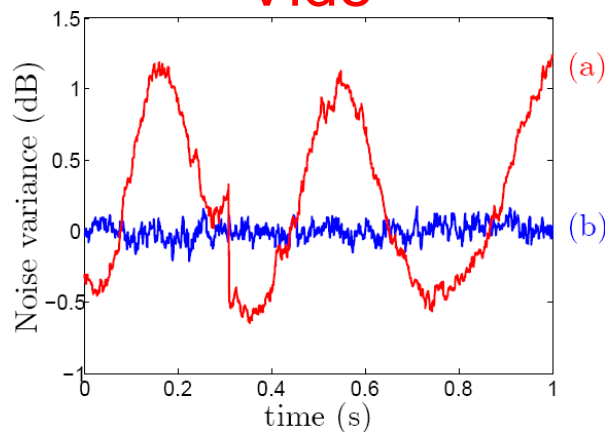
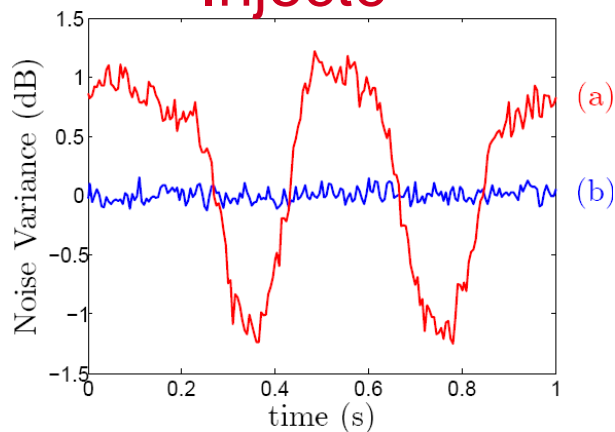
Supermodes:



Injecté

Vide

Vide



1.2 dB

0.6 dB

0.3 dB

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

 **MODES ET MESURE**

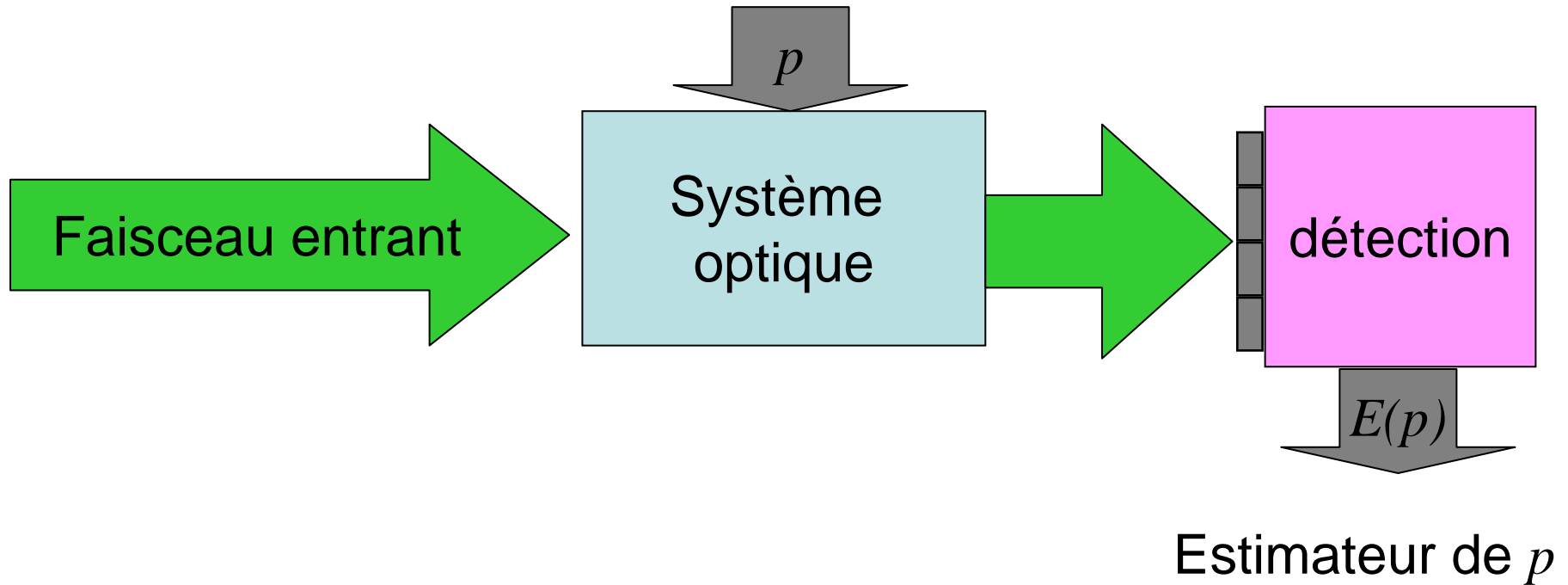
MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

CONCLUSION

Qu'est-ce qu'une mesure en optique ?

paramètre p à mesurer



Un exemple: super-résolution

Image de protéines fluorescentes par
Microscopie conventionnelle

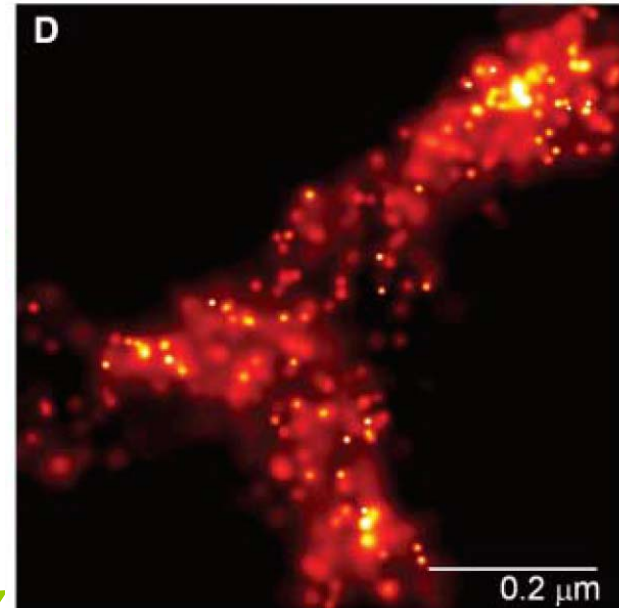
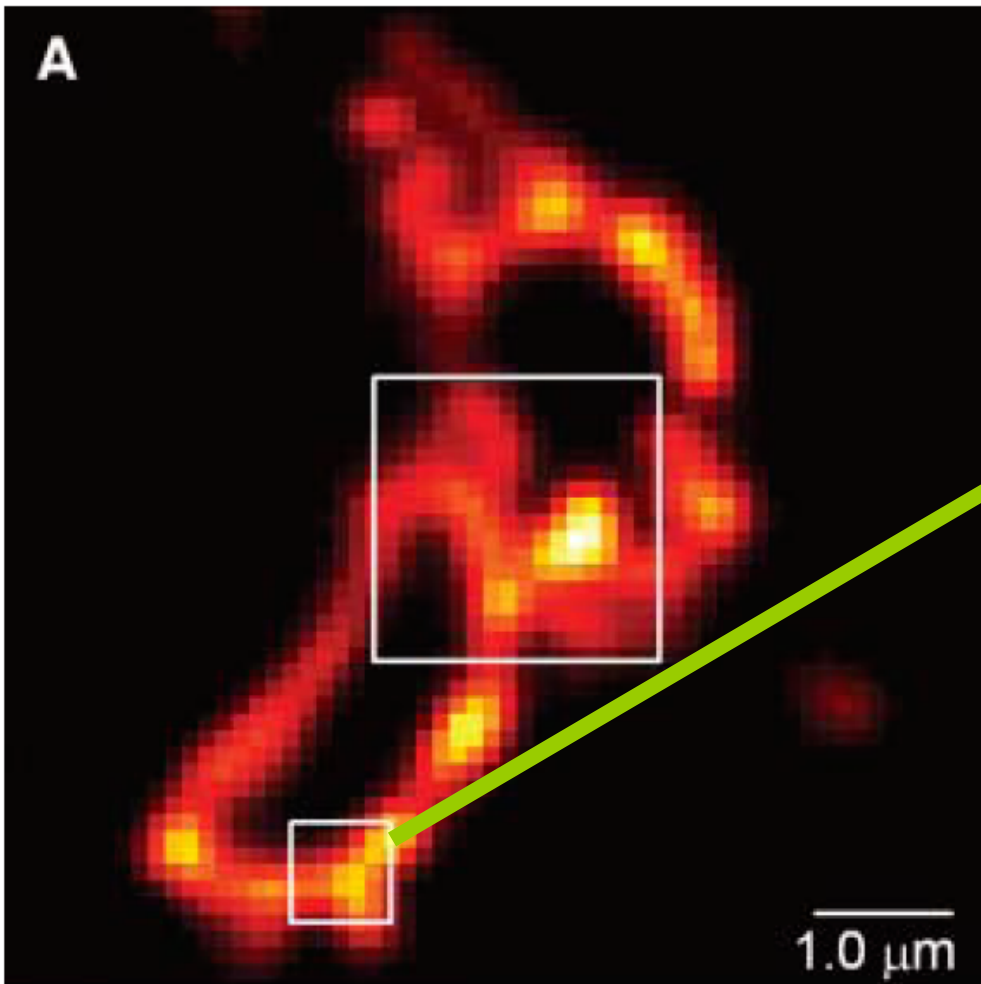
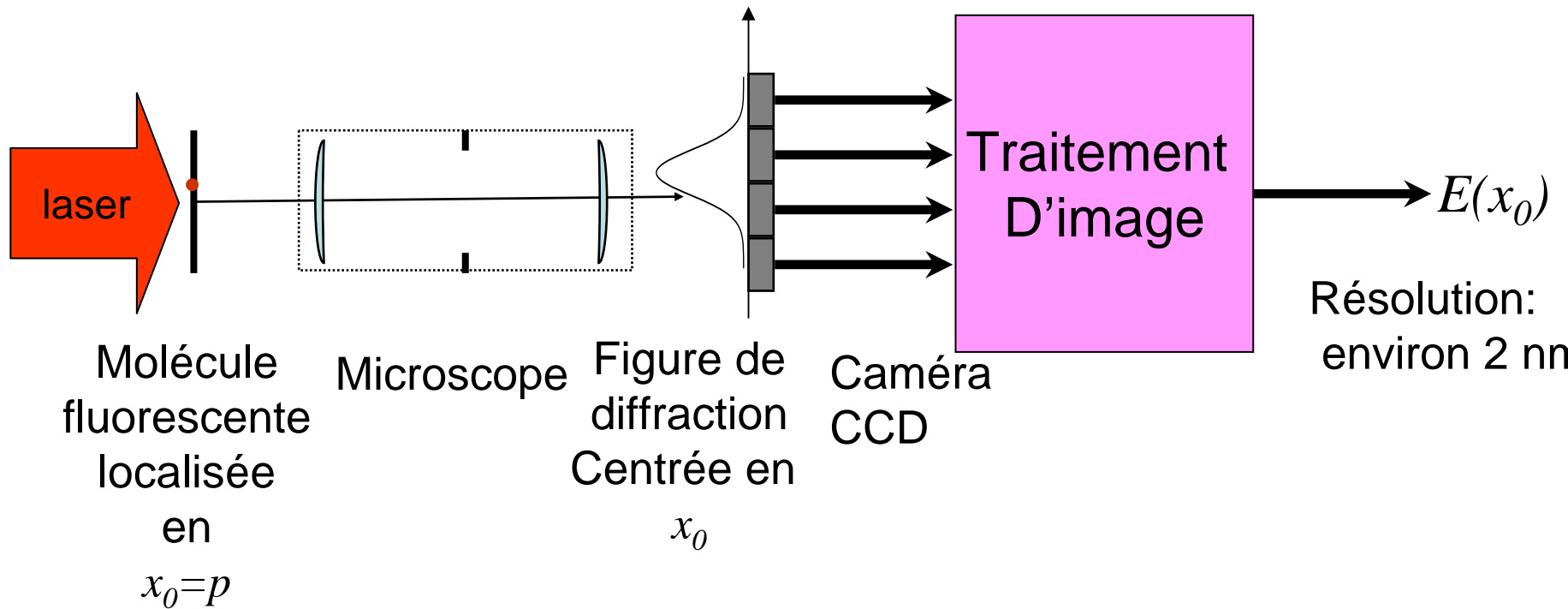


Image « super-résolue »

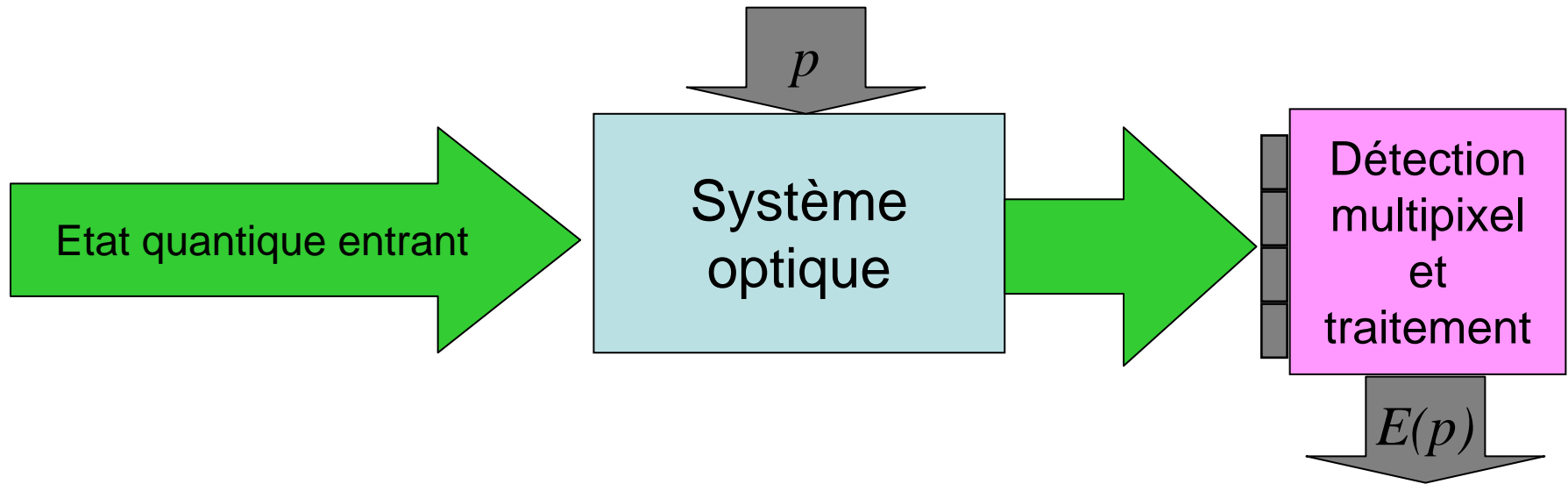
Imaging Intracellular Fluorescent
Proteins at Nanometer Resolution
E. Betzig et al Science **313** 1642 (2006)

Stratégie de mesure



L'information sur p est distribuée sur de nombreux pixels

Meilleure estimation possible de p ?



La **borne de Cramer Rao** donne la variance minimale sur p

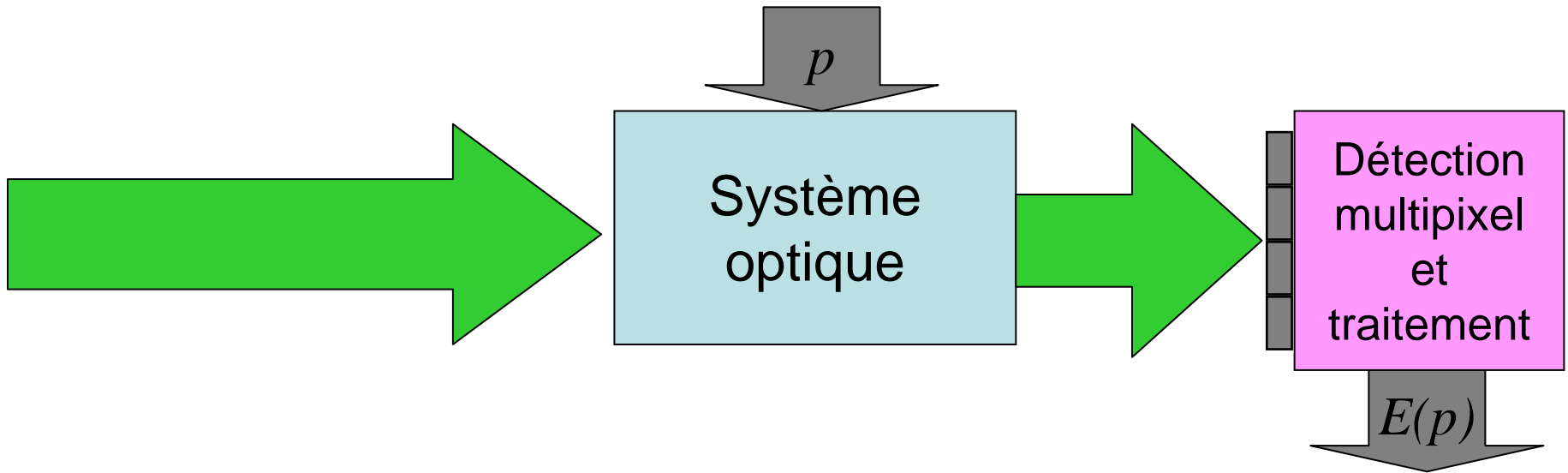
-pour un bruit donné sur le photodétecteur

-indépendamment de la stratégie de mesure

Si ce bruit est le shot noise, on a la

«**Borne de Cramer Rao quantique standard** »

Le « mode de mesure »



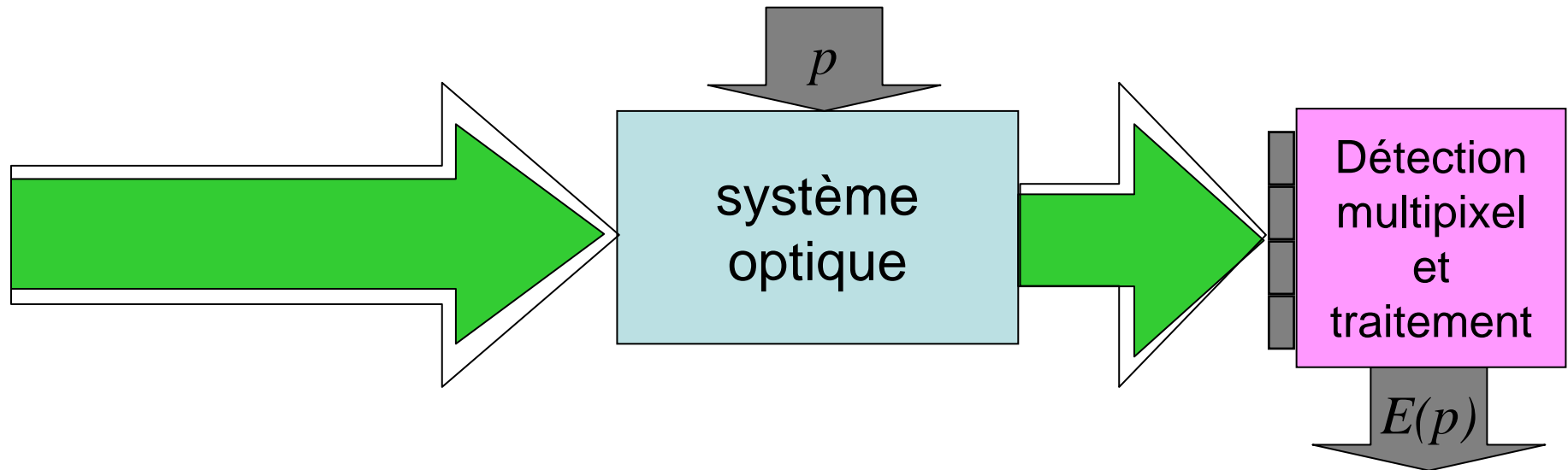
Le bruit quantique qui affecte l'estimateur $E(p)$ vient d'un seul mode, le « **mode de mesure** » $u_1(x, y)$

N. Treps, V. Delaubert, A. Maître, J.M. Courty, C. Fabre Phys. Rev A **71** 013820 (2005)

On construit une base de modes commençant par $u_1(x, y)$

Les fluctuations sur $E(p)$ viennent uniquement du mode $u_1(x, y)$

Au-delà de la borne de Cramer Rao quantique standard



Solution:

Superposer au faisceau entrant
un vide squeezé dans le mode $u_1(x,y)$

Etat à deux modes: - le mode d'« illumination »
- le mode de réduction de bruit

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

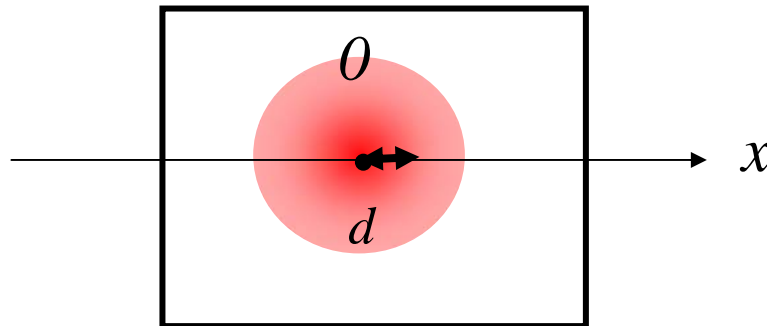
MODES ET MESURE

 **MESURES DANS LES IMAGES**

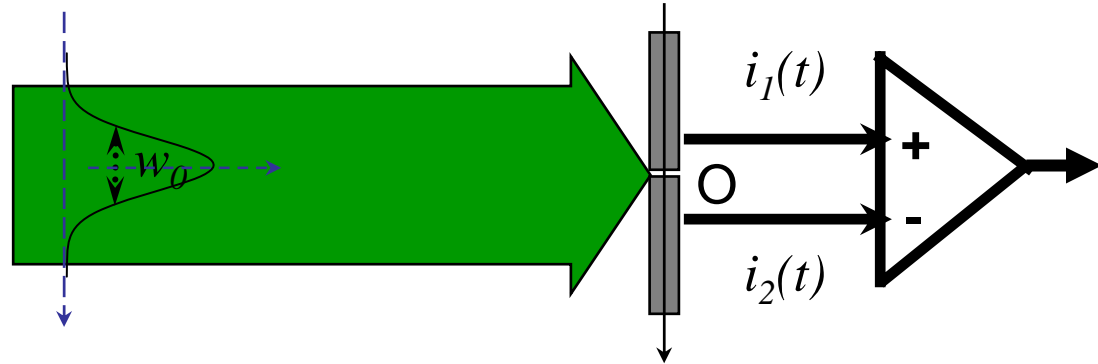
MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

CONCLUSION

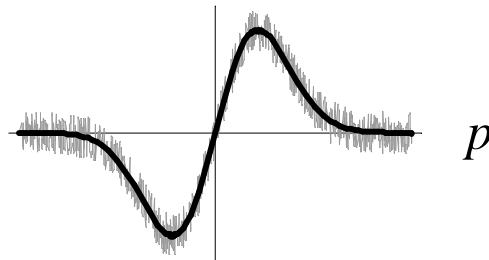
Un exemple simple : nano-positionnement spatial dans le plan transverse



technique habituelle : détecteur à deux zones



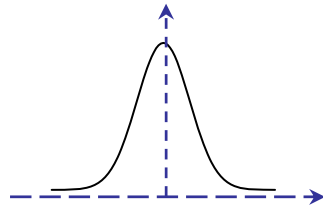
$$i_1(t) - i_2(t) = E(p)$$



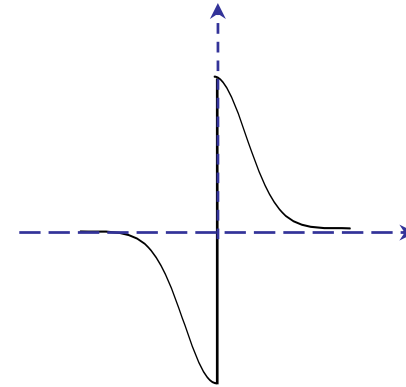
limite quantique standard dans ce cas

$$\Delta p = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \frac{w_0}{\sqrt{N}}$$

Au-delà de la limite quantique standard



Faisceau d'illumination:
Gaussien TEM_{00}



Mode de mesure

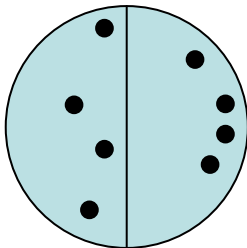
C. Fabre, J.-B. Fouet, A. Maître, Optics Letters 25, 76 (2000)

pour aller au delà du shot noise:

Faisceau TEM_{00}



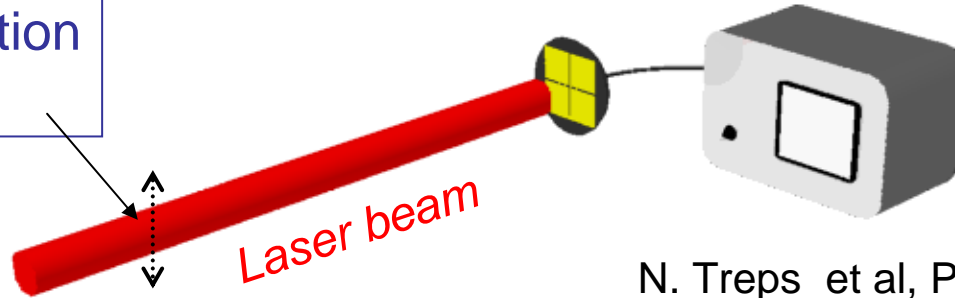
vide squeezé
dans le mode de mesure



Photons mis en rang par deux

Réalisation expérimentale

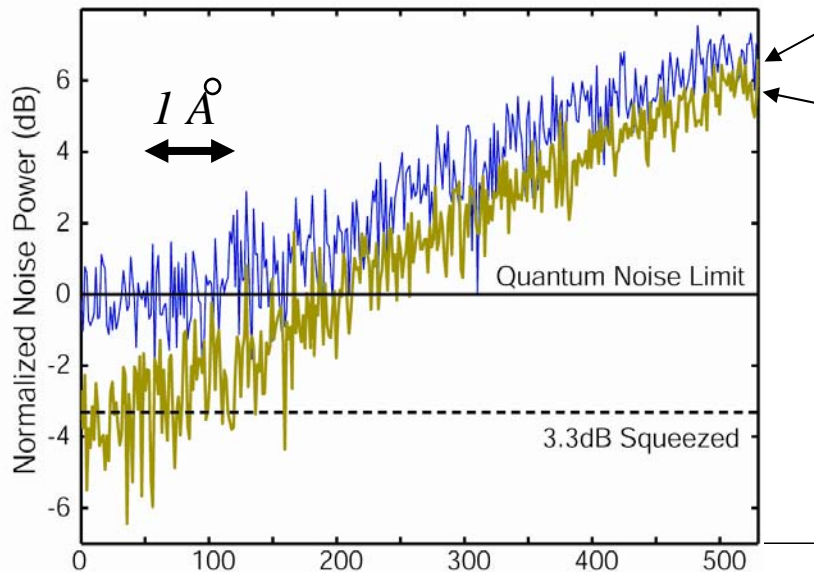
Très faible oscillation
à 5 MHz



**Collaboration
avec ANU
Australie**

N. Treps et al, PRL **88**, 203601 (2002)
, Science, **301**, 940 (2003)

Différence des intensités (en dB)



TEM₀₀ seulement

TEM₀₀

+ mode de mesure squeezé

Amplitude de l'oscillation

Où est la borne de Cramer Rao quantique standard ?

V. Delaubert, N. Treps, C. Fabre, H. Bachor, P. Réfrégier,

“Quantum limits in image processing” Europhys. Letters **81** 44001 (2008)

$$(\Delta p)_{S-CRb} = \frac{w_0}{2\sqrt{N}}$$

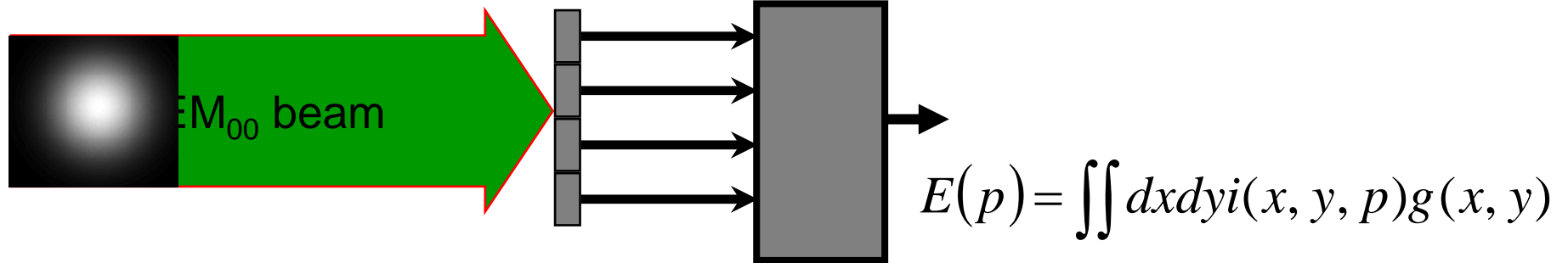
N : total nombre total de photons mesurés

w_0 : waist du faisceau

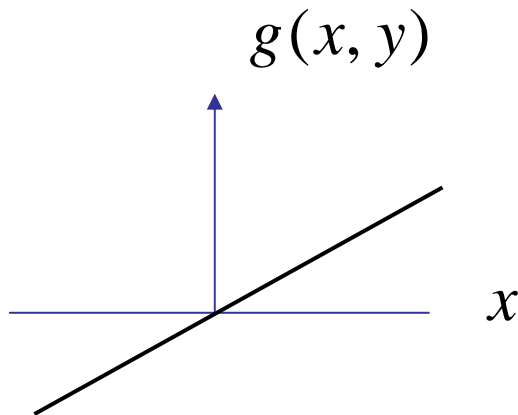
$$(\Delta p)_{\text{split}} = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \frac{w_0}{\sqrt{N}} = 1.22(\Delta p)_{S-CRb}$$

La méthode habituelle n'est pas la méthode optimale !

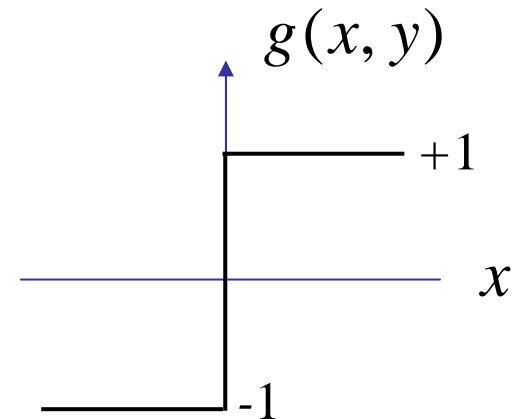
technique optimale 1



$$g(x, y) = x$$

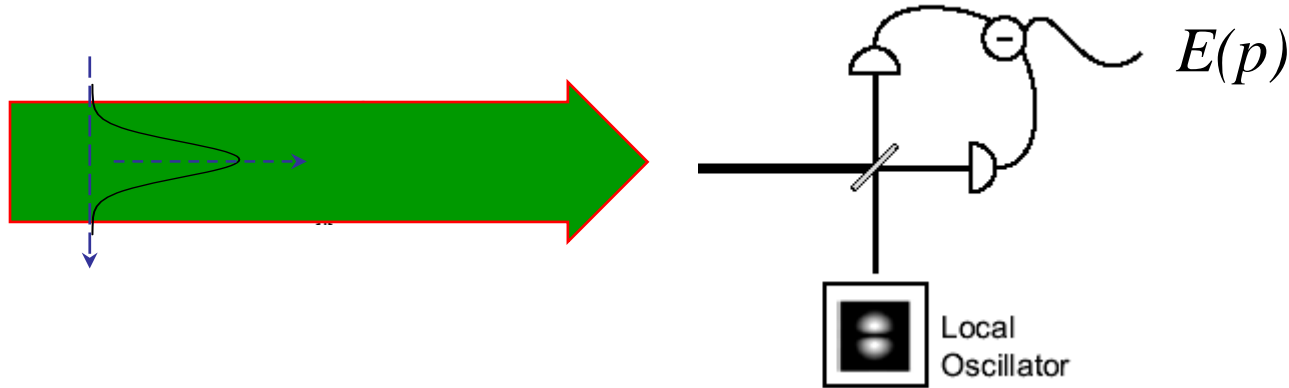


Au lieu de



Méthode « efficace » (borne de Cramer Rao atteinte)

technique optimale 2



Oscillateur local optimal pour un faisceau TEM₀₀

$$u_{LO}(x, y) = \text{TEM}_{10}$$

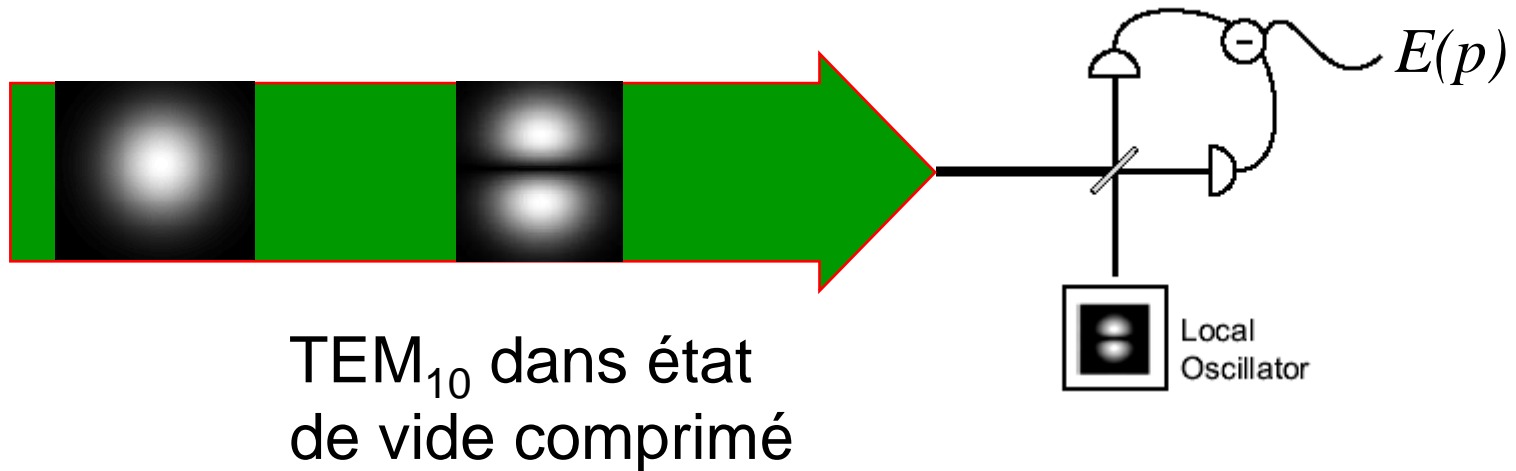
V. Delaubert et al Phys. Rev A **74** 053823 (2006)

Méthode « efficace » aussi

Dans les deux cas, on sait qu'aucune méthode ne peut faire mieux sur un mesure au shot noise

Au-delà de la borne de Cramer Rao standard

Mode de mesure : le mode TEM₁₀



Les parties inférieure et supérieure du faisceau sont **intriquées**

Réalisation expérimentale

M. Lassen et al. Phys. Rev Letters **98**, 083602 (2007)

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

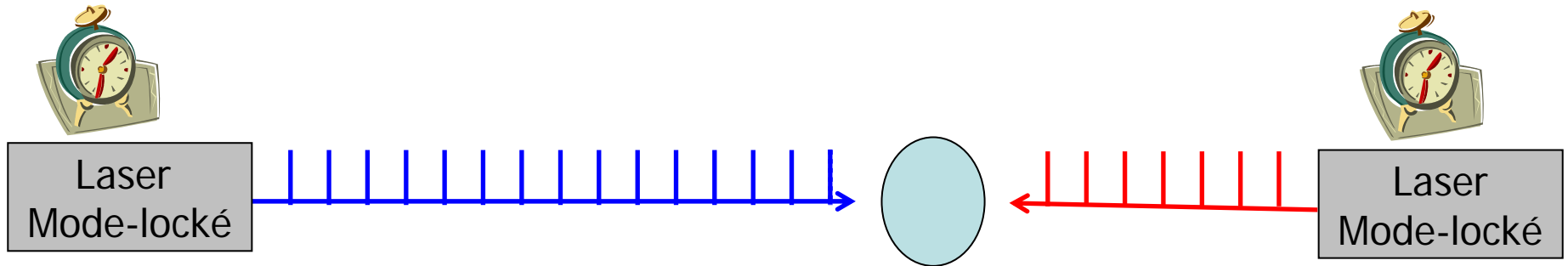
MODES ET MESURE

MESURES DANS LES IMAGES

 **MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE**

CONCLUSION

Synchronisation d'horloges distantes



Réalisation pratique du protocole
de synchronisation d'horloges d'Einstein

Borne de Cramer Rao quantique standard ?

B. Lamine, C. Fabre, N. Treps, Phys. Rev. Letters **101** 123601 (2008)

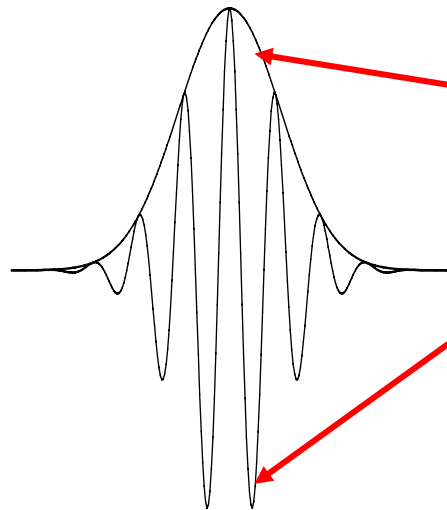
Dans le cas d'une impulsion Gaussienne cohérente:

$$(\Delta t)_{S-CRb} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}}$$

N : nombre total de photons

ω_0 : fréquence moyenne

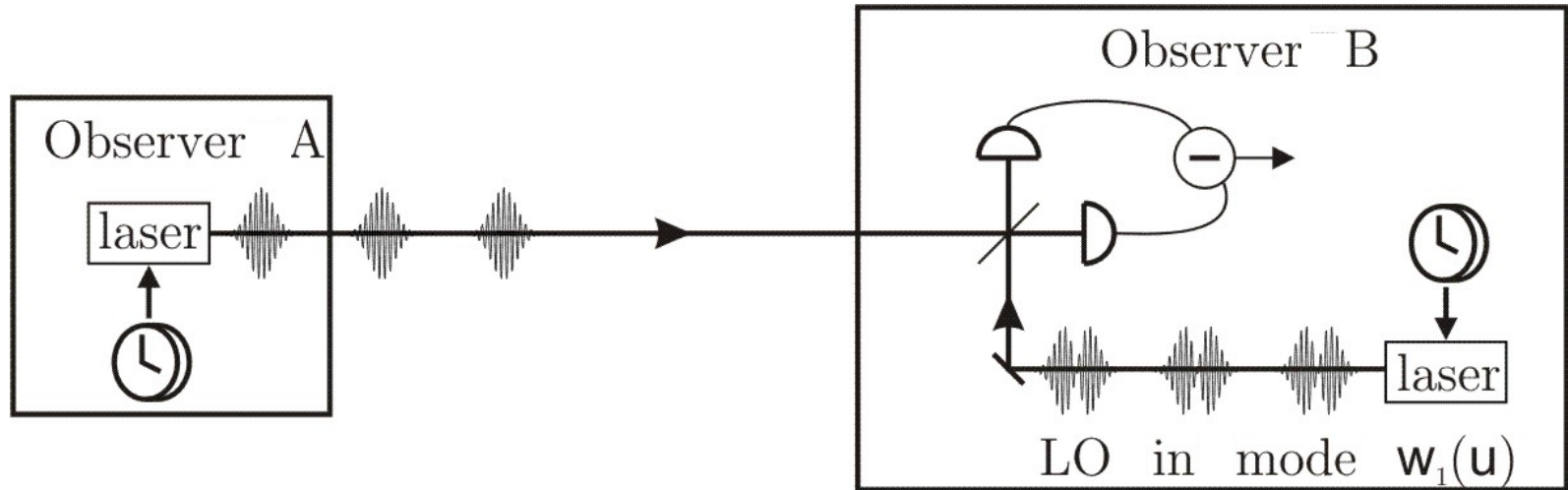
$\Delta\omega$: étalement en fréquence



Déplacement du maximum

Déplacement de la porteuse

mesure optimale



Un Oscillateur Local de forme temporelle optimisée

permet d'atteindre la borne de Cramer Rao quantique standard

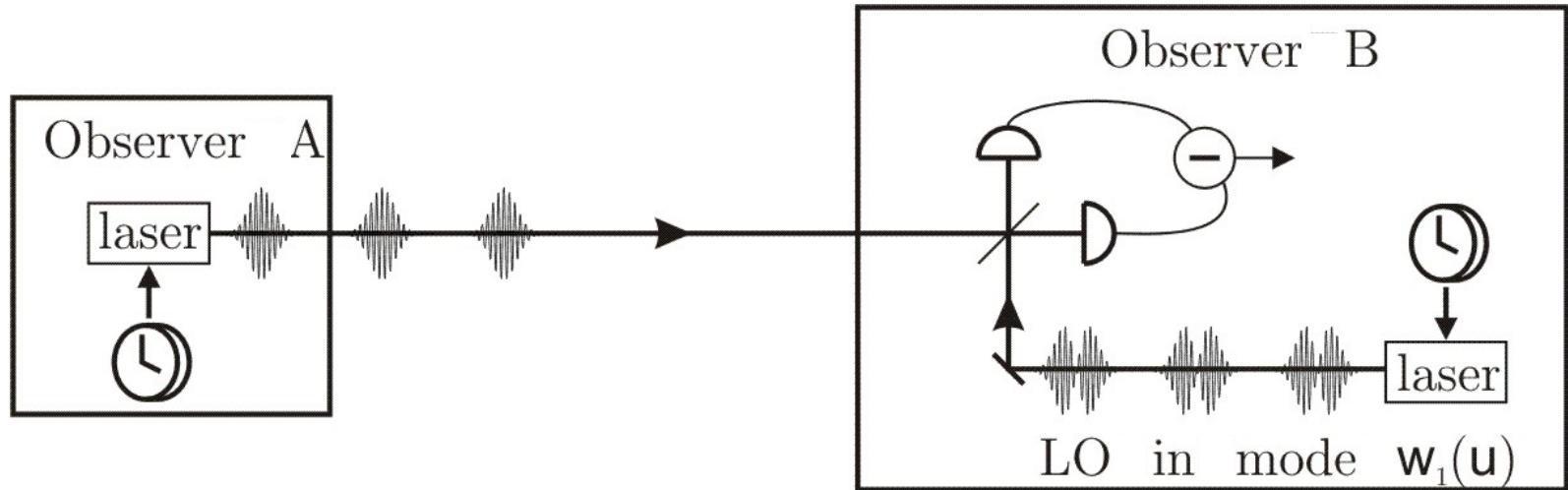
Aucune autre mesure ne peut faire mieux

Sensibilité ultime ?

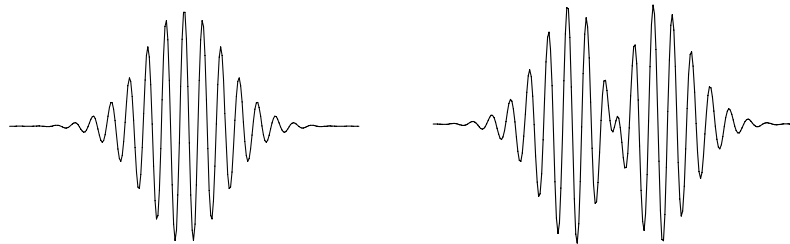
10mW, 10 fs, 10ms temps intégration

Limite : 10^{-23} s (domaine de la yoctoseconde)

Au-delà de la limite quantique standard



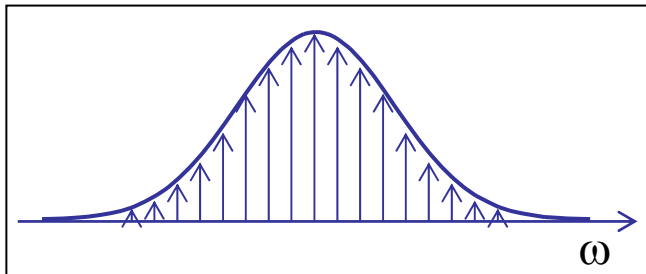
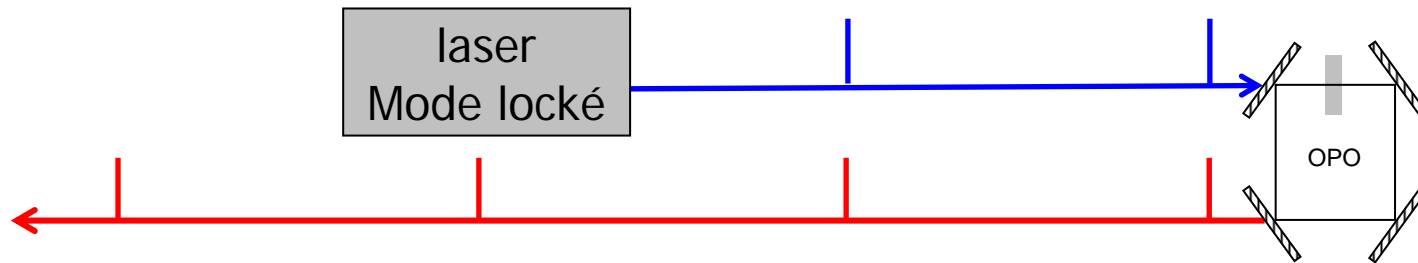
A superpose à son faisceau
un vide comprimé dans le mode de mesure



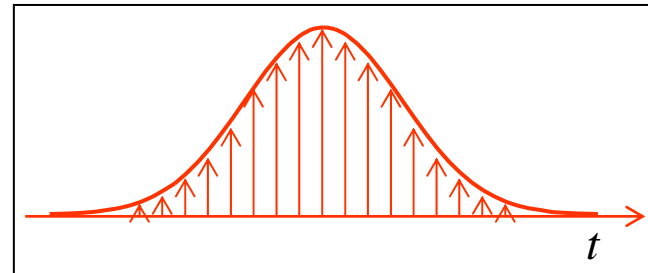
La sensibilité atteinte est bien meilleure que celle atteinte
en envoyant à A et B des faisceaux intriqués

Production des états non-classiques nécessaires

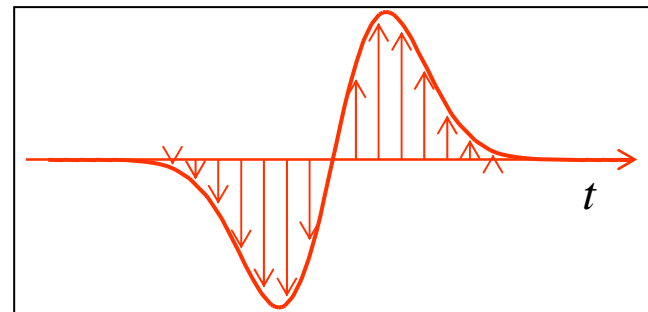
Utiliser un SPOPO au dessus du seuil



Pompe adaptée



mode 1
intense



mode 2
squeezé

INTRODUCTION

QU'EST-CE QU'UN MODE ?

LA LUMIERE SANS LES MODES ?

MODES PROPRES OU « SUPERMODES »

SUPERMODES TEMPORELS

SUPERMODES SPATIAUX

MODES ET MESURE

MESURES DANS LES IMAGES

MESURES AVEC DES PEIGNES DE FREQUENCE

 CONCLUSION

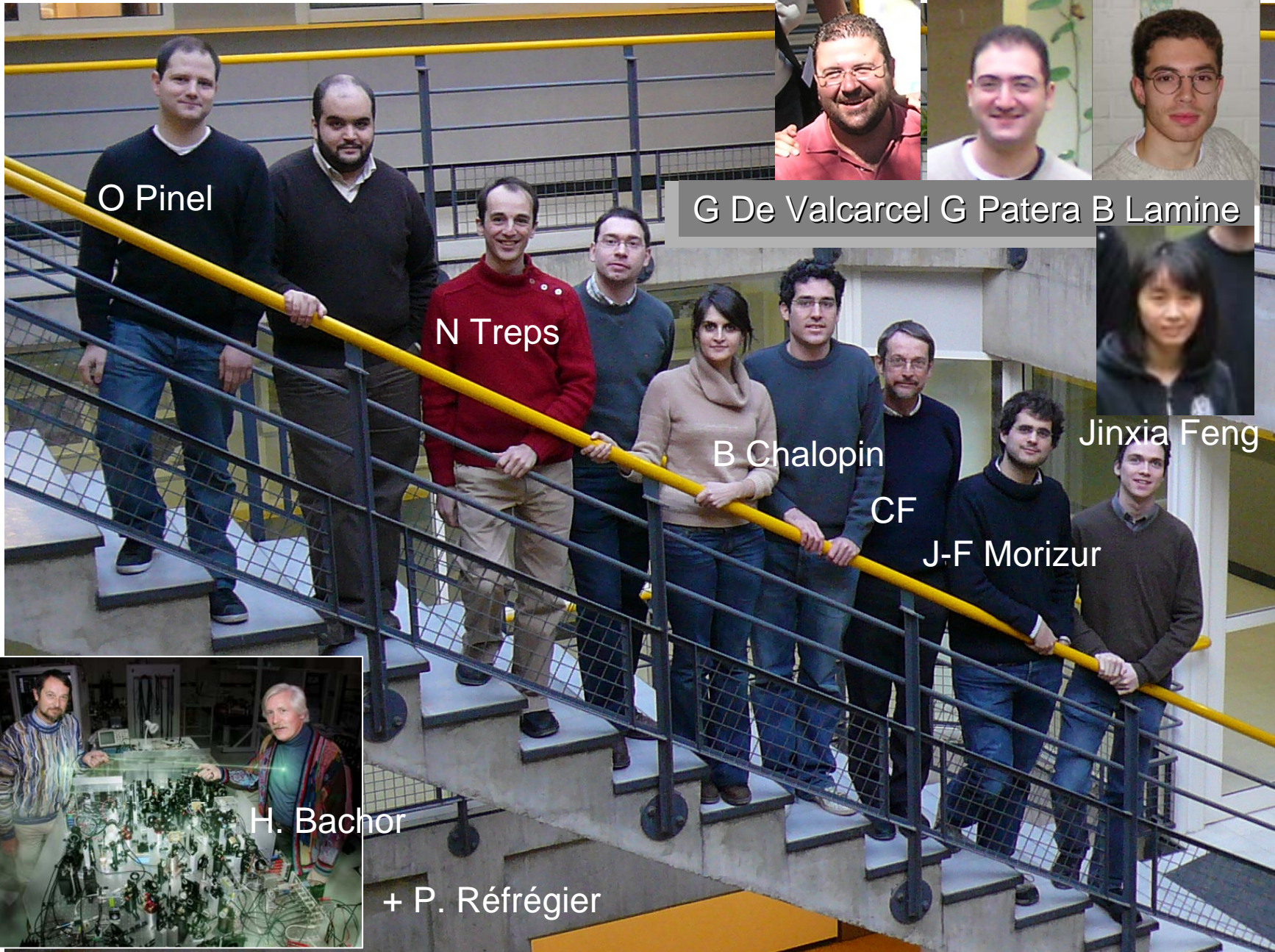
Définition de propriétés intrinsèques
des états quantiques multimodes

Extraire les modes propres d'un problème
est toujours utile

On peut faire de l'engineering
d'états quantiques multimodes

Aussi compliquée que soit sa forme, l'état quantique
d'un mode peut être mesuré destructivement
Par mesure homodyne avec l'oscillateur local adapté

Comment isoler physiquement un supermode donné ?



O Pinel

N Trepas

G De Valcarcel G Patera B Lamine

B Chalopin

CF

J-F Morizur

Jinxia Feng

H. Bachor

+ P. Réfrégier

