

Chaire de Physique Quantique-Cours 2014-2015
3^{ème} leçon - 24 Mars 2015

**Les gaz quantiques:
condensats de Bose-Einstein et
gaz de Fermions dégénérés**

A partir de 1995, l'étude des atomes froids s'est orientée vers celle des phases quantiques, condensats de Bose Einstein (CBE) et gaz de Fermi dégénérés (GFD). Les propriétés d'un CBE rappellent celles d'un laser dans lequel les photons sont remplacés par des atomes, avec la richesse d'effets physiques introduite par les interactions entre particules (alors qu'elles sont nulles entre photons). Un GFD se comporte comme une mer de Fermi électronique, les interactions entre fermions pouvant conduire à leur appariement sous forme de bosons composites. Ces bosons peuvent être des dimères moléculaires localisés formant des condensats, ou des paires de Cooper de grande extension spatiale, donnant aux GFD des propriétés analogues à la supraconductivité électronique. Les CBE et GFD possèdent des propriétés superfluides se manifestant par l'apparition de tourbillons (vortex) lorsqu'ils sont mis en rotation. Nous passons en revue ici quelques propriétés des CBE et GFD observées dans des expériences récentes.

Plan de la troisième leçon

III-A. Généralités sur la condensation de Bose Einstein et les gaz de Fermions dégénérés

III-B. Interactions entre atomes froids: longueur de diffusion et champ moyen.

III-C. Optique atomique cohérente et non-linéaire avec des condensats de Bose-Einstein.

III-D. Superfluidité des condensats et des gaz de fermions dégénérés.

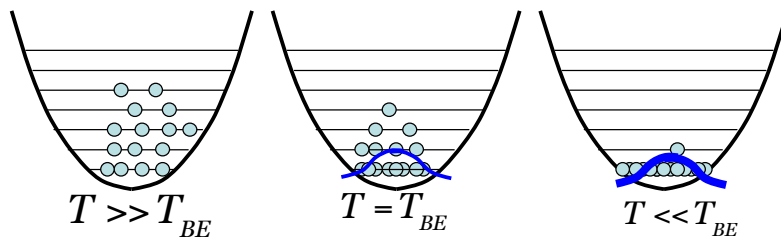
III-A. Généralités sur la condensation de Bose Einstein (CBE) et les gaz de Fermions dégénérés (GFD).

Deux types d'atomes:

Nombre pair de fermions (protons+neutrons + électrons)= Bosons
(exemples: ${}^7\text{Li}$, ${}^{85}\text{Rb}$, ${}^{87}\text{Rb}$, ${}^{23}\text{Na}$...)

Nombre impair de protons + neutrons + électrons = Fermions
(exemples: ${}^6\text{Li}$, ${}^{40}\text{K}$,...)

Bosons dans un piège harmonique

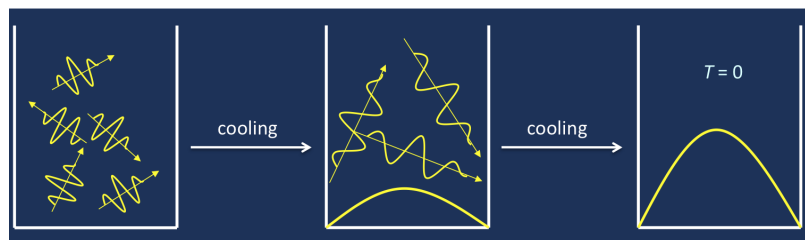


A très basse température, les bosons "grégaire" occupent l'état fondamental du piège, formant une "fonction d'onde macroscopique". La phase CBE est métastable par rapport à la formation de molécules dimères.

Température seuil de la condensation de Bose-Einstein de N atomes

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \sim d = \left(\frac{N}{V}\right)^{-1/3}$$

Longueur d'onde de de Broglie de l'ordre des distances interatomiques dans le piège de volume V



La température T_{BE} de seuil dépend de la forme du piège.

Gaz dans un piège harmonique isotrope (pulsation ω_0):

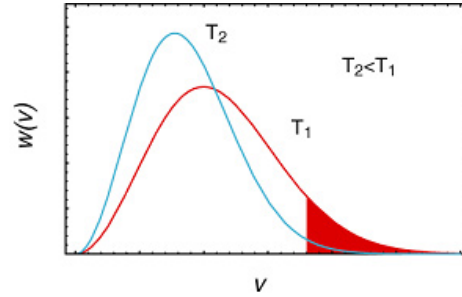
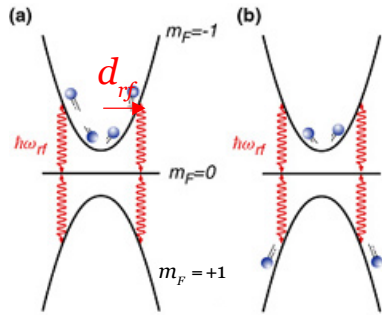
$$T_{BE} = 0,94 \hbar \omega_0 N^{1/3} / k_B$$

Ordres de grandeur pour $N=10^6$ atomes de Rb dans un piège magnétique:

$$\omega_0 = 10^3 \text{ s}^{-1}, T_{BE} = 6.10^{-7} \text{ K}, v \sim 1 \text{ cm} / \text{ s}, \lambda_{dB} \sim 1 \mu\text{m}$$

Température inférieure aux MOT: refroidissement complémentaire par évaporation

Refroidissement évaporatif forcé

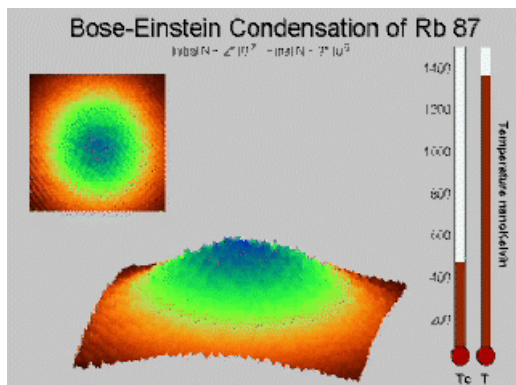
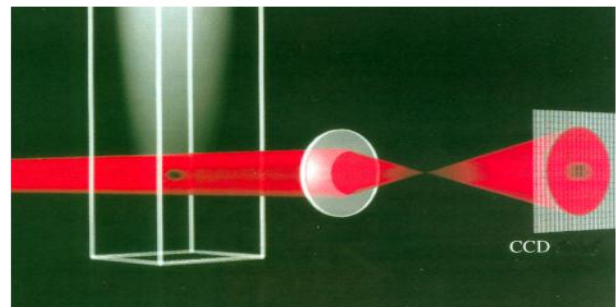


Cas d'un état de $F=1$: on applique une rf induisant pour des atomes à une distance donnée d_{rf} du centre du piège des transitions entre le niveaux magnétique $m_f=-1$ piégé et les niveaux $m_f=0$ (insensible au champ) et $m_f=+1$ (anti-piégeant). Les atomes dont l'énergie est suffisante pour atteindre d_{rf} sont éjectés. Mécanisme équivalent à l'évaporation de molécules "chaudes" d'un liquide.

L'élimination des atomes dans la queue de la distribution de Boltzmann est suivie de la rethermalisation par collisions à une température plus basse des atomes restants. On force l'évaporation en diminuant adiabatiquement la fréquence de la rf, ce qui abaisse progressivement d_{rf} et donc l'énergie moyenne des atomes piégés. Le processus est réglé pour que la température T décroisse plus vite que le seuil de condensation T_{BE} (fonction de N). Partant de $N_0 \sim 10^9$, on atteint la condensation avec $N \sim 10^6$.

Observation du premier condensat (CBE) (Cornel et Weiman-1995)

On coupe le piège et on laisse les atomes tomber librement avant de les éclairer par un laser résonnant dont l'ombre sur un écran CCD donne l'image du gaz après expansion. On obtient ainsi la distribution des vitesses dans l'échantillon au moment où le piège a été coupé.



Film du refroidissement évaporatif

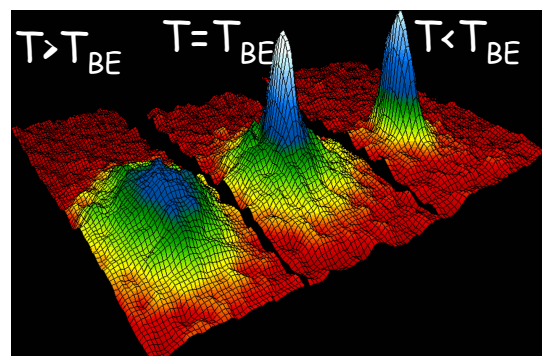
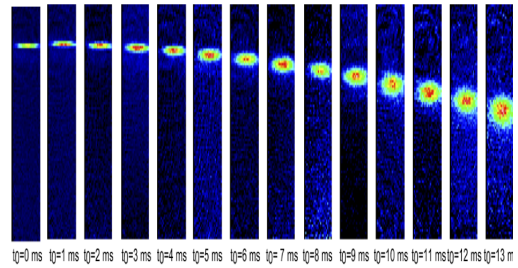


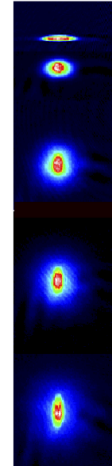
Image du premier condensat

Fonction d'onde macroscopique du CBE: anisotropie de l'image du gaz en expansion

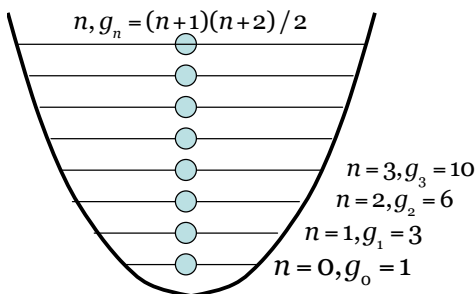
Gaz froid thermique dans piège anisotrope avec $\Delta z < \Delta x$: pour $T > T_{BE}$, la vitesse initiale des atomes au moment où le piège est éteint est isotrope et l'expansion du gaz conduit à une image circulaire après un temps de chute assez grand



Condensat de Bose Einstein dans piège anisotrope: Pour $T < T_{BE}$, $\Delta z < \Delta x$ entraîne (relation d'incertitude de Heisenberg) $\Delta v_z > \Delta v_x$: le gaz se dilate plus vite dans la direction de plus grande compression initiale: l'anisotropie s'inverse au cours de la chute. Cette inversion d'ellipticité est la signature de la condensation, prouvant que les atomes du condensat appartiennent à une fonction d'onde macroscopique.



Gaz dégénéré de fermions dans même état interne



Etat fondamental: un fermion par état "orbital" jusqu'à l'énergie de Fermi E_F . Les occupations montrées sur la figure correspondent à un oscillateur 1D. Les dégénérescences correspondent au cas 3D.

Dans un piège harmonique isotrope 3D, les n quanta sont répartis entre 3 oscillateurs indépendants (vibrations de même fréquence suivant x, y et z). Nombre d'états jusqu'à $E_n = (n+1/2)\hbar\omega_0$:

$$S_n = \sum_{n=0}^n g_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^n (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \sim n^3/6 \quad (\text{si } n \gg 1)$$

$N \gg 1$ fermions remplissent les états orbitaux jusqu'à l'énergie de Fermi E_F :

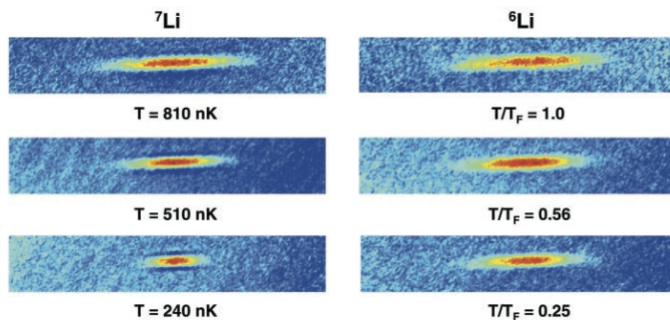
$$E_F = k_B T_F \approx \hbar \omega_0 (6N)^{1/3}$$

Le gaz entre dans le régime dégénéré pour $T = T_F$, de l'ordre de T_{BE} (à un facteur de l'ordre de 2 près).

La dimension linéaire du volume occupé par N fermions dégénérés est $(N)^{1/6}$ fois plus grande que celle d'un gaz parfait de N bosons condensés ("pression de Fermi" due au principe d'exclusion de Pauli).

Dégénérescence quantique d'un mélange Fermions/Bosons et pression de Fermi

Le refroidissement évaporatif ne marche pas sur les gaz de fermions polarisés dans un piège magnétique car le principe d'exclusion annule la section efficace de collision entre fermions identiques (voir plus loin). Dans un tel piège, on peut refroidir les fermions par mélange avec des Bosons (par ex mixture de ^7Li et ^6Li). Les bosons refroidis par évaporation refroidissent à leur tour les fermions. Alors que le gaz de bosons se condense dans un tout petit volume, le gaz de Fermions reste plus étalé, en raison de la *pression de Fermi* (les atomes ne peuvent occuper un volume de dimension inférieure à $a_0(N)^{1/6}$).

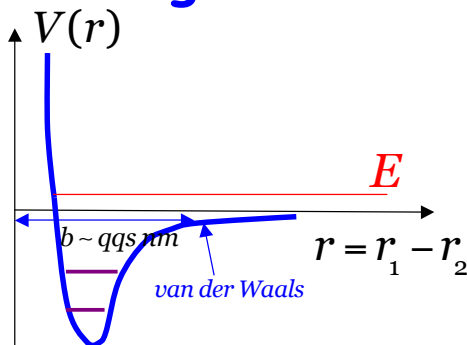


Observations distinctes des deux nuages grâce à la séparation isotopique des raies optiques. N est de l'ordre de 10^5 .

Truscott et al, *Science*, 291, 2570 (2001).

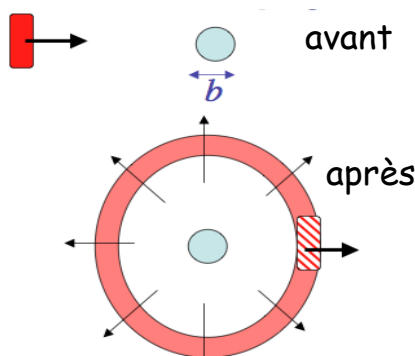
Noter qu'on peut refroidir directement un gaz de Fermi à 2 composantes confinés dans un piège optique dipolaire (voir plus loin).

III-B. Interactions entre atomes froids: longueur de diffusion et champ moyen.



Potentiel d'interaction entre deux atomes de portée $b \ll a_{0h}$ (a_{0h} : "taille" du piège).

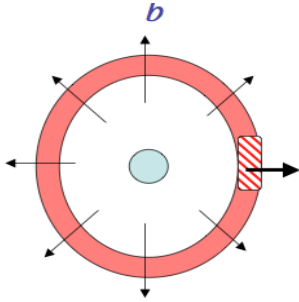
Le potentiel d'interaction a en général des **états moléculaires liés**. Les atomes ultra-froids en collision d'énergie $E > 0$ ne tombent dans ces états que sous l'effet de collisions à trois corps au bout d'un temps long (métastabilité du condensat). Les collisions binaires sont élastiques.



Evolution de 2 atomes dont la fonction d'onde du centre de masse avant la collision est une onde plane de vecteur d'onde k , à la limite $kb \ll 1$:

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f_k \frac{e^{ikr}}{r}$$

Longueur de diffusion



Lorsque la longueur d'onde de de Broglie est grande devant b , l'onde diffusée est sphérique, de moment angulaire nul (onde S) quel que soit la forme exacte du potentiel. Pour k petit devant $1/b$, l'amplitude f_k s'écrit:

$$f_k = \frac{-a_s}{1 + ika_s} ; \quad a_s = \text{longueur de diffusion}$$

Pour $ka_s \ll 1$, la diffusion est entièrement caractérisée par a_s . Pour les calculs, il est commode de remplacer le vrai potentiel par un potentiel de contact effectif ayant la même longueur de diffusion que le potentiel réel:

$$V_{\text{eff}}(r) = g\delta(r) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M} \delta(r)$$

$a_s > 0 \rightarrow$ interaction répulsive

$a_s < 0 \rightarrow$ interaction attractive

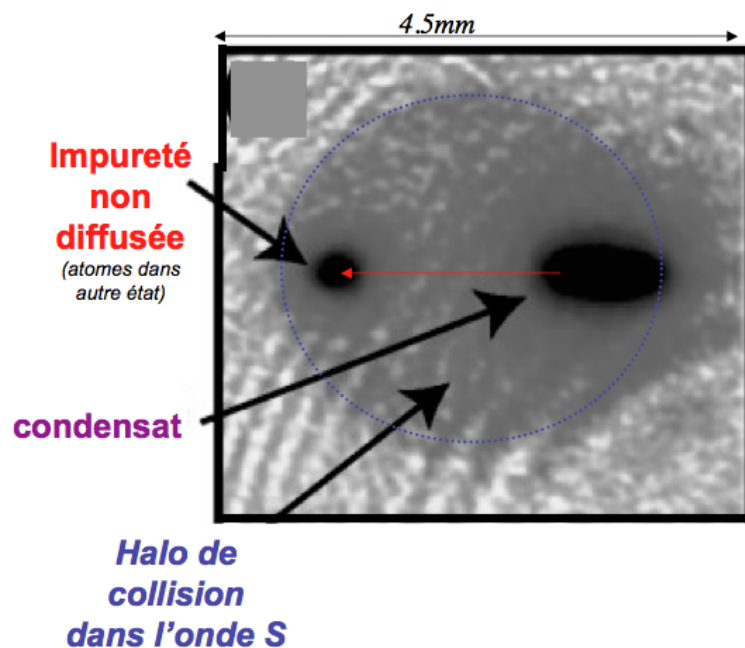
$a_s = 0 \rightarrow$ gaz parfait (sans interaction)

a_s dépend du déphasage de l'onde de diffusion, lui même dépendant de la forme exacte du puits potentiel $V(r)$ et de l'énergie de son dernier état lié.

Pour des fermions polarisés, la diffusion dans l'onde S est impossible (antisymétrie par échange de la fonction des 2 fermions): on a alors $a_s=0$.

Observation directe de l'onde S de diffusion

On envoie à travers le condensat un ensemble d'atomes d'une espèce différente (impureté) et on fait l'image du système en coupant le piège et en le laissant s'étaler après la collision.



Chikkatur et al, PRL, 85, 483 (2000)

Condensat de Bose-Einstein (CBE) dilué: équation de Gross-Pitaevskii

a_s (>0 ou <0) varie d'un système à l'autre, de quelques nm à quelques dizaines de nm, et peut même devenir infiniment grand dans un champ magnétique approprié (résonance de Feshbach-voir plus loin). Limitons nous d'abord à la situation où a_s est petit devant la distance interatomique d :

$$|a_s| \ll d \rightarrow |a_s| n^{1/3} \ll 1 \rightarrow |a_s| \ll a_L N^{-1/3} \quad (V \sim a_L^3 \text{ volume du CBE})$$

(condition réalisée dans CBE typiques: $|a_s| \sim 10-100$ nm, $a_L \sim$ qqs μm , $N \sim 10^6$).

Les collisions sont binaires et l'énergie du système se calcule en ajoutant les contributions des $N(N-1)/2$ paires d'atomes du CBE. On décrit le système par une fonction d'onde macroscopique moyenne Ψ qui s'obtient par un argument variationnel en minimisant l'énergie du CBE par résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii (G-P):

$$\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V_{\text{piège}}(\vec{r}) + (N-1)g|\Psi(\vec{r})|^2 \right) \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

Énergie cinétique Énergie potentielle Energie d'interaction

Les interactions sont décrites par un modèle de champ moyen (mean-field). GP a la forme d'une équation de Schrödinger indépendante du temps. Elle décrit les interactions par un terme non-linéaire proportionnel à a_s .

Limite du régime de champ moyen

L'extension spatiale du CBE dépend de la force des interactions et de a_s . Evaluons les 3 termes de l'énergie du condensat en fonction de sa taille. Nous considérons un piège harmonique isotrope dont l'état fondamental a une extension a_{oh} et une énergie $3\hbar\omega_{oh}/2$ ($\omega_{oh} = \hbar/Ma_{oh}^2$). La dimension linéaire de la fonction d'onde du CBE (supposée isotrope et gaussienne) est notée χa_{oh} .

$$E_{\text{cinétique}} = \frac{3N\hbar\omega_{oh}}{4\chi^2} \quad ; \quad E_{\text{potentielle}} = \frac{3N\hbar\omega_{oh}}{4} \chi^2 \quad ; \quad E_{\text{interaction}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N^2\hbar\omega_{oh}a_s}{a_{oh}} \frac{1}{\chi^3}$$

Le paramètre $\chi = Na_s/a_{oh}$ mesure l'importance relative des interactions. Si $\chi \ll 1$, on a un gaz parfait (interactions négligeables); pour $\chi > 1$, les interactions jouent un rôle important et peuvent être traitées par GP jusqu'à $\chi = N^{2/3}$. Au delà de cette valeur, le gaz ne peut plus être décrit par des collisions binaires et GP n'est plus valable (voir plus loin). Pour $a_s < 0$, le CBE n'est stable que jusqu'à un nombre critique d'atomes (effondrement du condensat au delà).

		Gaz parfait	Régime du champ moyen	Régime à N corps (GP non valable)
				a_s
Condensat instable au delà d'un nombre critique $N_c \sim a_{oh}/ a_s $	0	a_{oh}/N ($\chi = 1$)	$a_{oh}/N^{1/3}$ ($\chi = N^{2/3}$)	a_{oh} ($\chi = N$)

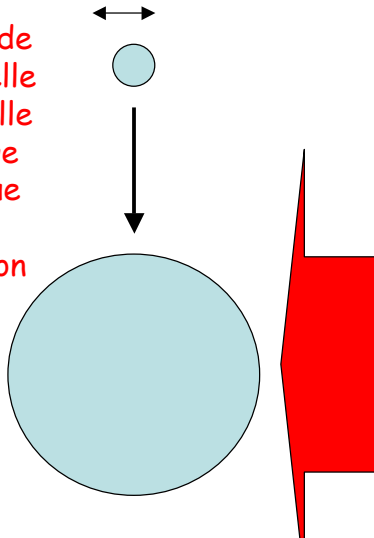
BCE en régime de champ moyen avec fortes interactions: la limite de Thomas-Fermi

Dans le régime de champ moyen avec interactions répulsives ($1 \ll \chi \ll N^{2/3}$), le terme d'interaction domine le terme d'énergie cinétique qui peut être négligé (limite de Thomas-Fermi). La taille du CBE s'obtient en minimisant la somme de l'énergie potentielle (contraction) et de l'énergie d'interaction (expansion). Un calcul simple donne:

$$a_{CBE} \sim N^{1/5}$$

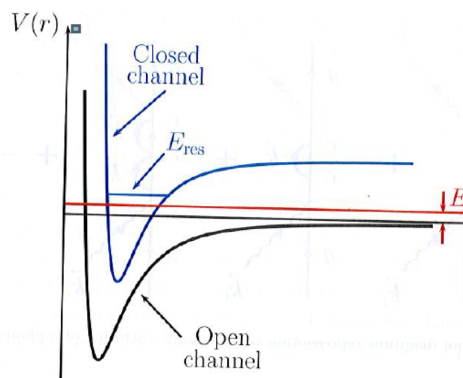
$$a_{CBE}^{équilibre} \approx \chi^{1/5} a_{oh} \propto N^{1/5}$$

Mesure de a_s par celle de la taille du nuage atomique après expansion



La taille du CBE varie en $N^{1/5}$. Si on éteint le piège et laisse le CBE en vol libre, on part à $t=0$ d'un état où l'énergie cinétique est négligeable et toute l'énergie potentielle contenue dans le terme d'interaction. L'expansion transforme cette énergie d'interaction en énergie cinétique, mesurable par la méthode du temps de vol. On remonte ainsi à la valeur de l'énergie d'interaction à $t=0$ et connaissant N , à g et a_s .

Accorder a_s par résonance de Feshbach

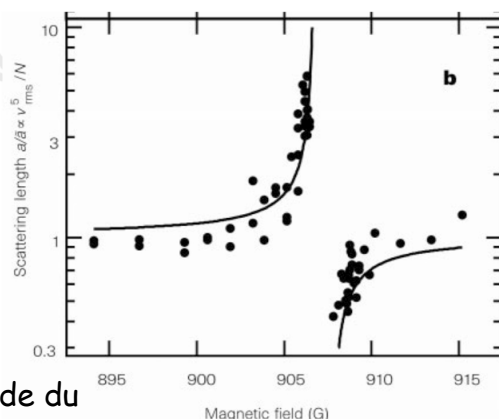


La longueur de diffusion peut être accordée en couplant le canal de diffusion élastique "ouvert" à un second canal "fermé", correspondant à un état d'entrée atomique excité (voir figure). Ce canal fermé possède un état lié dont l'énergie E_{res} , est proche de celle E du canal ouvert. Le Hamiltonien des atomes couple les deux canaux, faisant passer virtuellement le système de l'état de diffusion élastique au canal fermé.

Si les états atomiques ont des moments magnétiques différents, on peut, en balayant le champ magnétique B appliqué, réaliser la condition $E_{res} = E$. La section efficace de collision et a_s subissent alors une résonance.

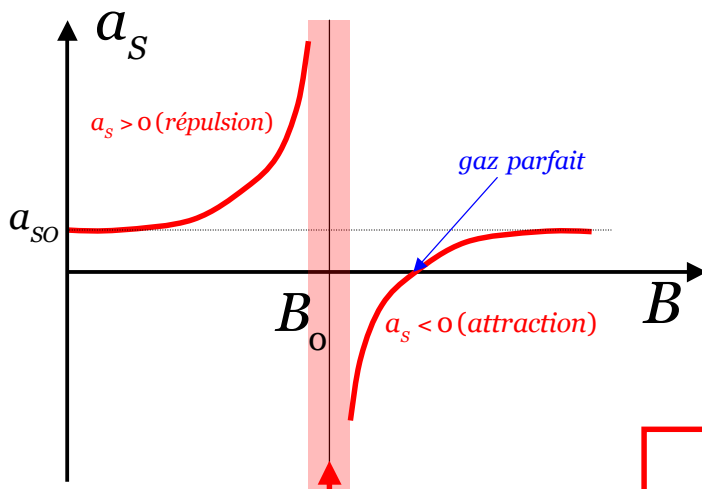
$$a_s(B) = a_{so} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right)$$

On peut mesurer cette résonance par la méthode du temps de vol (images du CBE après expansion prises pour différentes valeurs de B autour de B_0).



S.Inouye et al, Nature, 392, 151 (1998)

Les résonances de Feshbach: un moyen d'étude des gaz quantiques dans le régime d'interactions fortes (problème à N corps)



Autour de $B = B_0$, $|a_s|$ diverge et devient plus grand que $d = a_{oh} N^{-1/3}$

GP et modèle du champ moyen non valable (problème à N corps)

Régime à N corps

Physique très riche, en particulier pour les gaz de fermions dégénérés (voir plus loin)

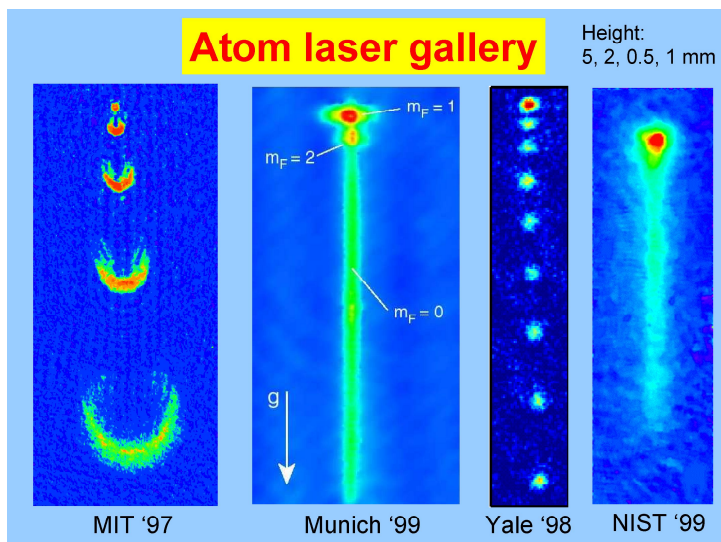
pour $B = B_0$, $a_s = \pm\infty$:

$$f_k = \frac{-a_s}{1+ika_s} \rightarrow \frac{i}{k} ; \Psi_k^+(r) = e^{ikr} + i \frac{e^{ikr}}{kr}$$

Le comportement du système est "universel" (indépendant de a_s donc de la nature des atomes)

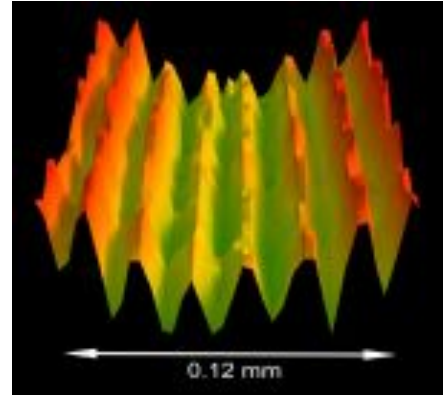
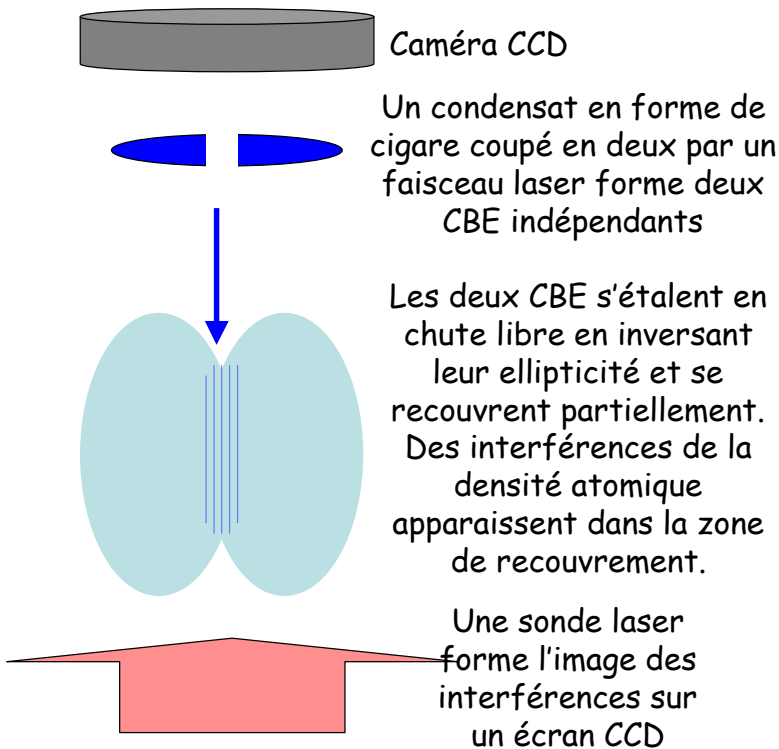
III-C. Optique atomique cohérente et non-linéaire avec des CBE.

Analogies entre un CBE et le champ optique d'un laser. Les atomes, appartenant tous à une onde de matière géante, sont analogues aux photons d'un mode laser (avec des interactions en plus). Un grand nombre d'expériences d'optique cohérente ou non-linéaire ont pu être généralisées aux champs de matière des CBE.



Premières images de lasers à atomes en impulsion ou continus obtenus en relâchant une onde de matière du puits où le CBE a été formé. Les atomes sont guidés par la gravité et tombent sous la forme d'un faisceau cohérent naturellement colimaté.

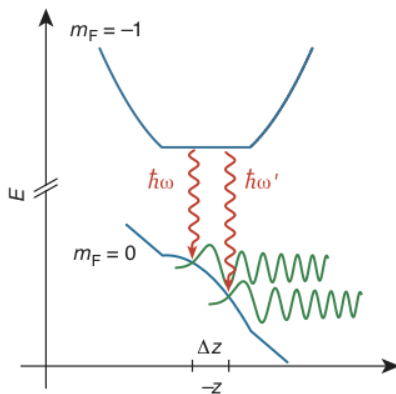
Interférences de deux CBE indépendants



La phase des interférences est aléatoire (elle change d'une prise d'image à la suivante). **Exemple de mesure quantique:** les premiers atomes détectés fixent la phase. Analogie avec l'interférence de deux lasers indépendants.

Andrews et al, Science, 275, 637 (1997)

Cohérence d'un laser à atomes



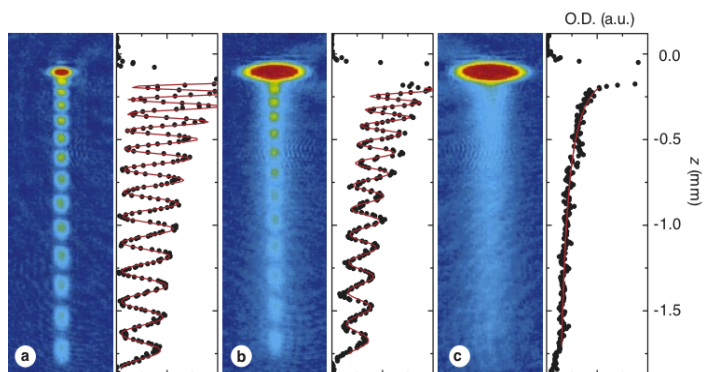
Des atomes de vitesse $v_z \sim 0$ extraits du CBE par deux impulsions rf de fréquences différentes tombent de deux "fentes" séparées verticalement de Δz (sélection spatiale grâce à l'effet Zeeman dans le champ inhomogène du piège). Les deux ondes de matière ont des longueurs d'onde décroissantes lorsque z diminue à cause de l'augmentation de vitesse due à la pesanteur.

$$\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z) = \frac{M}{\hbar} \left[\int_0^z dz' (\sqrt{2g_0(z' + \Delta z)} - \sqrt{2g_E z'}) \right] \approx \frac{M \Delta z \sqrt{2g_0 z}}{\hbar}$$

La longueur d'onde du battement augmente en \sqrt{z}

I. Bloch et al, Nature, 403, 166 (2000)

Images du battement des ondes issues des "fentes". Le contraste des franges mesure la cohérence. (a) $T < T_{BE}$, (b) $T = T_{BE}$, (c) $T > T_{BE}$. La transition entre source de matière cohérente et thermique est analogue à ce qu'on observe en optique entre champ d'un laser et champ d'une lampe classique.



Optique atomique non-linéaire

Rappel d'optique non linéaire: le mélange d'ondes est produit par la non-linéarité du milieu atomique dans lequel se propagent les lasers. Prenons en exemple le *mélange dégénéré à 4 ondes*. 3 ondes de même fréquence (E_1 et E_2 intenses de vecteurs d'ondes opposés \vec{k} et $-\vec{k}$ et E_3 (sonde) de vecteur d'onde \vec{k}_s) se propagent dans un milieu d'atomes à deux niveaux. En notation complexe, les champs s'écrivent:

$$E_i = \mathcal{E}_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \mathcal{E}_i^* e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

La polarisation du milieu s'exprime sous la forme:

$$P = \epsilon_0 (\chi_1 E_T + \chi_3 |E_T|^2 E_T + \dots) ; E_T = E_1 + E_2 + E_3$$

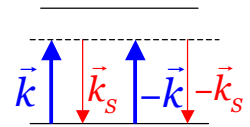
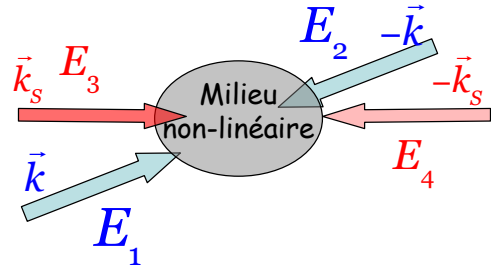
$\chi_3 =$ susceptibilité non linéaire

Il y a dans le développement de P un terme source:

$$\chi_3 \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3^* \exp(i(\vec{k} + (-\vec{k}) - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}) \propto \exp(-i\vec{k}_s \cdot \vec{r})$$

qui génère une onde E_4 de même fréquence que les 3 autres, de vecteur d'onde $-\vec{k}_s$. Le processus atomique élémentaire correspond à l'absorption d'un photon de E_1 et un de E_2 et de l'émission stimulée d'un photon de E_3 et de E_4 . Le bilan total conserve l'énergie et l'impulsion du champ.

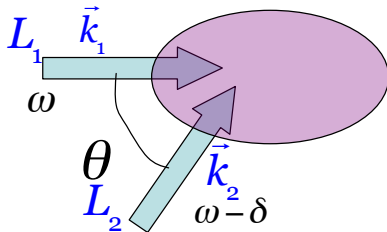
En optique atomique, les interactions entre atomes (terme non-linéaire de l'équation GP) introduisent une non-linéarité analogue au terme χ_3 de l'optique non-linéaire.



Mélange de quatre ondes de matière

Pour réaliser des ondes de matière d'impulsion $\neq 0$, on transfère de l'impulsion à un CBE en l'excitant avec deux faisceaux lasers formant un réseau optique de diffraction de Bragg en mouvement. Deux opérations de cette nature permettent de scinder le CBE initial en trois modes d'impulsions différentes, qui se recouvrent spatialement. Le couplage interatomique, jouant le rôle d'une susceptibilité χ_3 , couple ces ondes, créant dans l'équation de GP un terme source pour une quatrième onde, dont l'impulsion est une combinaison de celles des 3 modes initiaux.

Génération d'une onde de matière d'impulsion P_2



Deux lasers L_1 et L_2 d'impulsions k_1 et k_2 (formant un angle θ) et de fréquences voisines ω et $\omega - \delta$ (non résonants avec les atomes) forment une onde stationnaire en mouvement qui entraîne les atomes du condensat, initialement immobiles ($P_1=0$). Le processus Raman cohérent correspond à l'absorption d'un photon de L_1 suivie de l'émission stimulée d'un photon de L_2 . En ajustant la durée et l'intensité des impulsions, on prépare l'onde de matière:

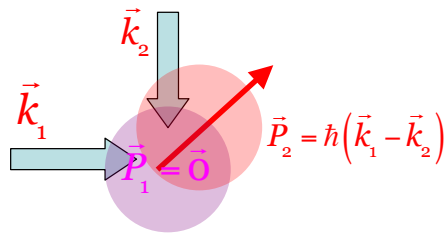
$$\Psi_{P_1=0} \rightarrow \alpha \Psi_{\vec{P}_1} + \beta \Psi_{\vec{P}_2 = \hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)}$$

à condition que δ satisfasse la condition de conservation de l'énergie du processus:

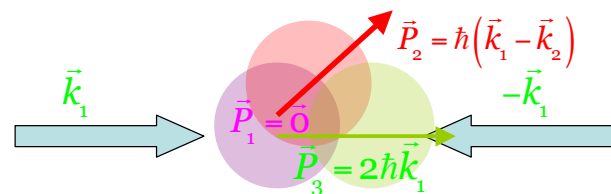
$$\frac{\hbar^2 |\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2}{2M} = \frac{2\hbar^2 k_1^2 \sin^2(\theta/2)}{M} = \hbar\delta \quad (\text{Typiquement } \delta/2\pi \sim 50-100\text{kHz})$$

Mélange de quatre ondes de matière (suite)

Première impulsion Bragg

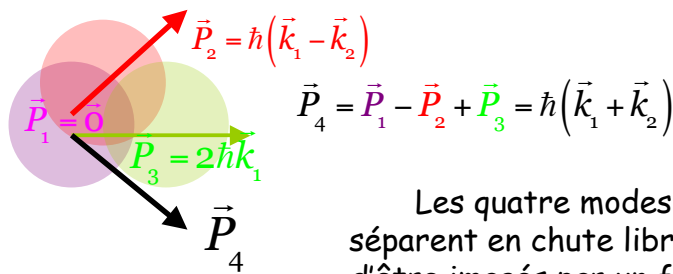


Deuxième impulsion Bragg:



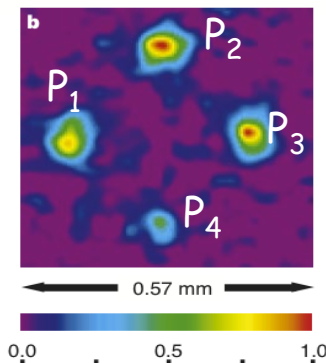
Cette impulsion n'agit que sur le mode P_1 (δ ne satisfait pas la condition de résonance pour P_2)

Après la seconde impulsion et avant que les modes se séparent spatialement, les interactions atomiques génèrent une composante d'impulsion $P_4 = P_1 - P_2 + P_3$.



Les quatre modes se séparent en chute libre avant d'être imagés par un faisceau laser sonde

L.Deng et al, Nature, 398, 218 (1999)



III-D. Superfluidité des CBE et des GFD

Les gaz ultra-froids de bosons et de fermions possèdent des propriétés quantiques collectives qui n'avaient été observées jusque là que dans des systèmes beaucoup plus denses, en physique des liquides ou des solides (superfluidité de l'Hélium, supraconductivité des métaux). Etudier ces effets dans des gaz quantiques présente l'avantage de situations dans lesquelles on peut faire varier des paramètres (en particulier les interactions entre particules) qui ont une valeur fixe en physique de la matière condensée. On peut ainsi passer continûment d'une situation où les interactions entre particules sont faibles et la théorie du champ moyen valable à une "physique à N corps" en interactions fortes dont la théorie reste encore largement ouverte. On peut même atteindre un régime universel où le comportement des systèmes ne dépend plus de l'espèce de particules considérée et ainsi utiliser la physique des gaz ultra-froids comme un banc d'essai pour comprendre des phénomènes se produisant dans d'autres systèmes, avec des ordres de grandeur très différents (étoiles à neutrons par exemple).

Dans cette section, nous décrivons de façon qualitative certaines propriétés liées à la superfluidité des CBE et des GFD, en particulier leur comportement en rotation et la formation de vortex.

Champ de vitesse et moment angulaire du CBE

La fonction d'onde "macroscopique" d'un CBE (qui évolue dans le temps si le potentiel de piégeage varie) peut s'écrire en introduisant sa densité $n(\vec{r}, t)$ et sa phase $S(\vec{r}, t)$. Le gradient de la phase est proportionnel au champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$, $\vec{j}(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$ étant la densité de courant qui obéit à une équation de conservation du nombre de particules (ou de la norme de la fonction d'onde macroscopique). Pour une particule, ces équations expriment les relations entre densité et flux de probabilité. Pour un CBE, on peut leur donner une signification hydrodynamique "classique":

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} \exp iS(\vec{r}, t) ; \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{M} \vec{\nabla} S ; \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t) ; \quad \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

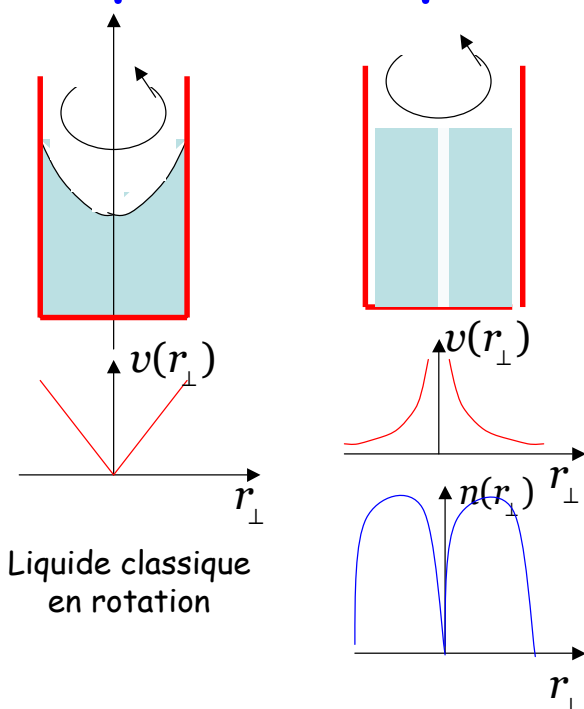
L'unicité de définition de ψ implique que la circulation de \vec{v} le long d'une courbe fermée doit être égale à un multiple de h/M :

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2l\pi \frac{\hbar}{M} = l \frac{h}{M} \quad (|l| \text{ entier} \geq 0)$$

Pour un CBE en rotation autour de Oz , la fonction ψ symétrique autour de Oz a une vitesse ortho-radiale et le moment cinétique NL_z du gaz est quantifié, avec une valeur par atome égale à $l\hbar$:

$$v_{\perp} = l \frac{\hbar}{Mr_{\perp}} ; \quad NL_z = \iiint (r_{\perp} dr_{\perp} dz d\varphi) n(r_{\perp}, z) M v_{\perp} r_{\perp} = Nl\hbar$$

Liquide classique versus CBE en rotation



Le CBE en rotation a un champ de vitesse en $1/r$ qui diverge sur l'axe. Cette singularité exige que $n(r_{\perp})$ s'annule en $r_{\perp} = 0$. Il se forme un tourbillon (vortex) dans lequel il n'y a pas d'atome (trou dans le CBE). Le rayon du trou dépend des interactions (longueur de de "cicatrisation"). Le profil de vitesse et de distribution de la matière sont très différents de ceux observés dans un liquide classique en rotation.

Les états avec moment angulaire par atome $l > 1$ ne sont pas formés par un vortex unique tourbillonnant plus vite. Il est énergétiquement plus favorable pour le CBE de briser la symétrie autour de Oz en formant un réseau de l vortex simples (voir plus loin).

Piège harmonique cylindrique en rotation

Considérons un CBE dans un piège harmonique de symétrie de révolution autour de Oz (cigare) et plaçons nous dans le référentiel R qui tourne à la fréquence Ω autour de Oz. Négligeons d'abord les interactions ($a_s=0$). Le Hamiltonien dans R d'un atome s'écrit:

$$H_R = H_0 - \Omega L_z = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\omega^2(x^2 + y^2)}{2} - \Omega L_z = \frac{(\vec{P} - M\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2M} + \frac{M(\omega^2 - \Omega^2)(x^2 + y^2)}{2}$$

On peut montrer en exercice l'identité des expressions de H_R et vérifier que les équations de Hamilton donnent bien la force d'inertie dans R:

$$\vec{F}_R = \underbrace{-M\omega^2 \vec{r}_\perp}_{\text{Force de rappel du piège}} + \underbrace{M\Omega^2 \vec{r}_\perp}_{\text{Force centrifuge}} - \underbrace{2M\vec{\Omega} \times \vec{v}}_{\text{Force de Coriolis}} \quad (\vec{r}_\perp = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$$

H_R a la même forme que le Hamiltonien d'une particule de charge q dans un potentiel électrostatique harmonique en présence d'un champ magnétique \vec{B} le long de Oz (le terme $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ rappelle le terme de jauge en $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r} / 2$).

$$H_{\text{magn}} = \frac{[\vec{P} - q(\vec{B} \times \vec{r} / 2)]^2}{2M} + V(x, y) \quad ; \quad (\text{remplace } \Omega \text{ par } qB / 2M)$$

La physique des CBE en rotation rappelle celle des supraconducteurs de type II dans un champ magnétique. Les paires de Cooper chargées se comportent comme des bosons. La similitude des Hamiltoniens explique la formation de vortex analogues dans les deux situations.

Vortex élémentaire dans CBE en rotation

L'état fondamental d'un piège harmonique 2D dans le référentiel "fixe" xOy est, en absence d'interaction, une Gaussienne d'énergie $\hbar\omega$. Le 1^{er} état excité est dégénéré (quantum de vibration le long de Ox ou Oy). Par superposition, on forme 2 états d'énergie $2\hbar\omega$, de moment cinétique $L_z = \pm \hbar$, états de vortex $l = \pm 1$, correspondant à un courant circulaire avec "trou" en $r_\perp = 0$:

$$\Psi_{l=\pm 1}(x, y) \sim (x \pm iy) \exp(-r_\perp^2 / a_{oh}^2) \quad ; \quad E_{l=\pm 1} - E_{l=0} = \hbar\omega$$

Dans R, la différence des énergies des états à 1 et 0 vortex s'écrit:

$$E_{l=1}^R - E_{l=0}^R = \hbar(\omega - \Omega)$$

Dans un gaz parfait, le vortex devient énergétiquement favorable pour $\Omega > \omega$, une situation où le piège n'est plus stable. En présence d'interactions répulsives, les énergies sont davantage déplacées pour l'état $l = 0$, moins étendu que l'état $l = 1$. On a donc

$$\bar{E}_l = E_l + \delta\varepsilon_l \quad \text{avec} \quad (\delta\varepsilon_{l=0} - \delta\varepsilon_{l=1}) > 0$$

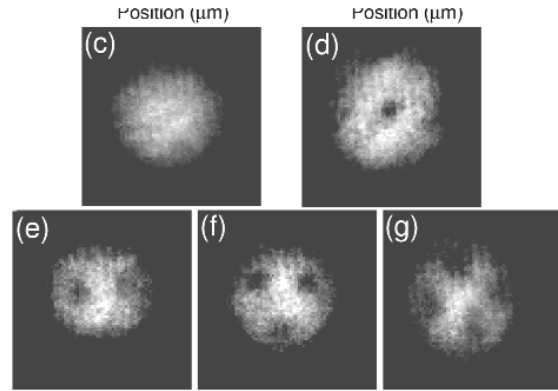
et la formation d'un vortex devient énergétiquement favorable pour:

$$\bar{E}_{l=1}^R - \bar{E}_{l=0}^R = \hbar(\omega - \Omega) + (\delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_0) / \hbar < 0 \quad \text{soit} \quad \Omega > \omega - (\delta\varepsilon_0 - \delta\varepsilon_1) / \hbar$$

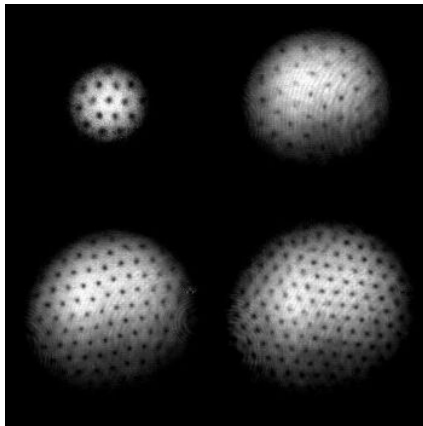
Il y a donc une plage de valeurs de Ω où 1 vortex peut exister dans un piège harmonique stable ($\Omega < \omega$). Cet argument ne dit pas comment les vortex se forment (l'état à 0 vortex peut être métastable même si celui à 1 vortex est énergétiquement favorable), ni combien coexistent pour Ω donné.

Images de vortex dans des CBE en rotation

Vortex formés en appliquant une force tournante au CBE à l'aide de faisceaux laser non-résonnants ("cuiller" à atomes). Image obtenues après extinction du piège et expansion du nuage d'atomes



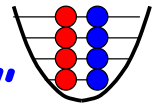
Groupe Jean Dalibard (ENS-Paris- 2000)



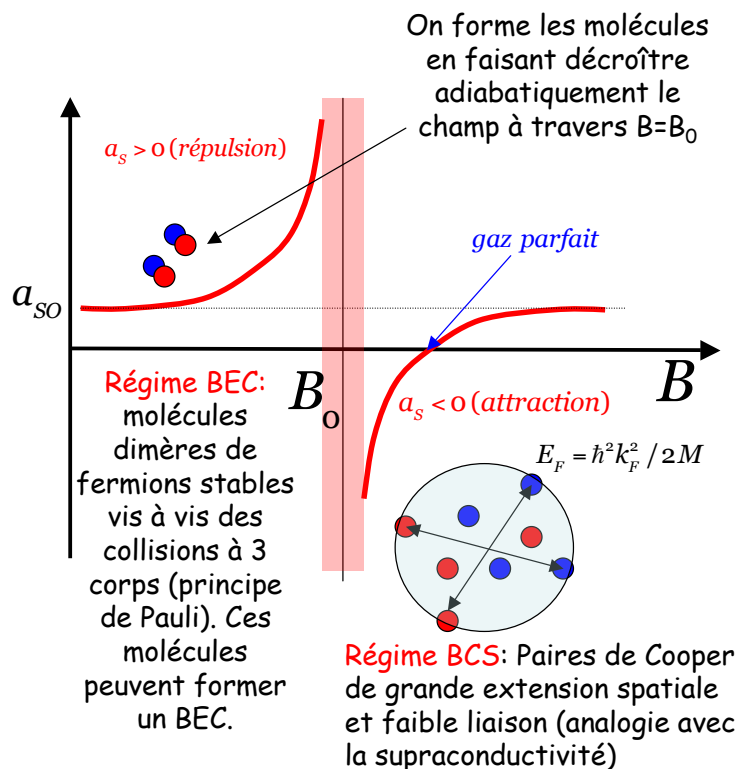
Réseaux de vortex dans un CBE rappelant les réseaux de vortex magnétiques d'Abrikosov dans les supraconducteurs de type II

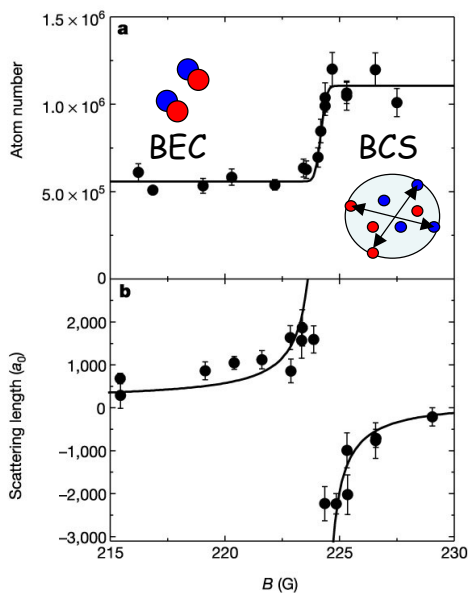
Groupe Ketterle (MIT)

Appariement de fermions dans un GFD à 2 composantes: "BCS-BCE cross-over"



Les GFD permettent d'étudier des régimes impossibles à observer auparavant. Les résonances de Feshbach donnent accès à la transition du cas $a_s < 0$ (interactions attractives) au cas $a_s > 0$ (interactions effectives répulsives), avec passage intermédiaire dans le régime $k_F |a_s| > 1$, où les interactions à N corps dominent. Expériences à Boulder, MIT, Innsbruck et Paris. Suivant le signe de a_s , et donc celui de $(B-B_0)$, deux modes différents d'appariement des fermions:





Formation de molécules dans un GFD de ^{40}K : le champ est balayé de droite à gauche à travers la résonance de Feshbach (figure du bas). A la fin du balayage du champ, on compte par absorption optique les fermions restant non appariés. L'apparition de molécules liées diminue le nombre d'atomes libre et se manifeste par la diminution brutale pour $B=B_0$ du signal atomique. L'effet est réversible. En balayant le champ en sens inverse, on décompose les molécules BEC et retrouve le signal atomique (C.Regal et al, Nature, 424, 47 (2003)). Expériences analogues avec ^6Li à l'ENS (Cubizoles et al, PRL. 91, 240401 (2003)), et observation de la condensation des dimères de fermions (Bourdél et al, PRL, 93, 050401 (2004)).

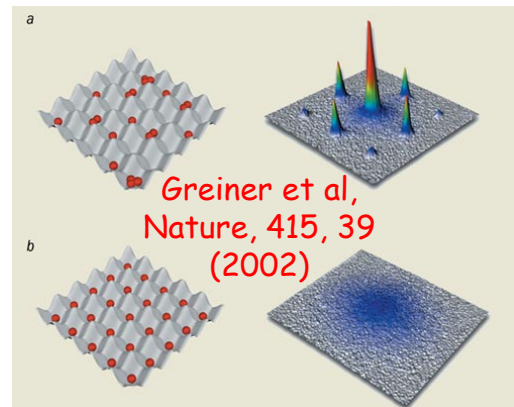
Réseaux de vortex dans un GFD superfluide de ^6Li : Dans un gaz en rotation on observe, comme pour des CBE la formation de réseaux de vortex, preuve de la superfluidité du GFD due à l'appariement des fermions pour former des bosons composites (molécules liées, paires de Cooper ou excitations à N corps dans la région intermédiaire). (M.W.Zwierlein et al, Nature, 453, 1047 (2005)).

Conclusion de la troisième leçon

La physique des gaz ultra-froids est extrêmement riche et ouvre de multiples ponts avec la physique de la matière condensée. Parmi les domaines non décrits dans cette revue, signalons les expériences réalisées sur des CBE ou GFD dans des réseaux optiques à 1D, 2D ou 3D. On reproduit ainsi des situations qui rappellent celles d'électrons ou d'atomes dans des potentiels périodiques, avec observation de la transition de Mott (voir ci-dessous) et bien d'autres phénomènes. Possibilités de simulations quantiques avec ces systèmes (voir leçon 4 et cours de Jean Dalibard).

Un CBE piégé dans un réseau périodique est superfluide lorsque l'effet tunnel entre puits domine les interactions entre atomes: le nombre d'atomes par puits fluctue et les ondes de matière issues des différents puits interfèrent après relâchement des atomes (image de diffraction)

Le même CBE devient « isolant » lorsque la profondeur des puits empêche l'effet tunnel. Les atomes occupent un atome par puits, sans fluctuations. Lorsque le réseau est éteint les atomes s'échappent sans interférer, donnant une tache diffuse au lieu de pics de diffraction.



Pour plus de détails sur les thèmes abordés dans cette leçon, voir C.Cohen-Tannoudji et D.Guéry-Odelin, Advances in Atomic Physics, World Scientific (2011).