

Chaire de Physique Quantique- Cours 2007-2008

Mesures quantiques non destructives

*Sept leçons du 21 Janvier au 10 Mars 2008
suivies d'un séminaire*

Pas de séance le 18 Février

Cours 2007-2008: Première Leçon

21 Janvier 2008

Le cours 2007-2008 porte sur certains aspects de la mesure en physique quantique. Par «mesure» on comprend au sens large toute expérience qui extrait de l'information d'un système quantique. Alors qu'en physique classique, le système étudié peut se trouver dans un état indépendant de tout observateur et être mesuré sans perturbation, en physique quantique une mesure est un processus plus complexe, dans lequel l'état de l'objet mesuré est en général modifié. Le résultat de la mesure et son effet sur le système sont décrits de façon statistique, la théorie ne pouvant que déterminer la loi de probabilité du processus (« Dieu joue aux dés »).

Les propriétés de la mesure quantique entraînent des limitations (certaines mesures sont incompatibles entre elles-cf relations d'incertitude de Heisenberg) et des impossibilités (par exemple théorème de «non-clonage» d'un état inconnu). Ces caractéristiques, souvent décrites négativement, peuvent être exploitées de façon positive pour réaliser des opérations impossibles en physique classique (cryptographie et calcul quantiques).

Ces applications ont été étudiées dans les cours des années antérieures. Cette année, nous nous proposons de revenir sur la théorie même de la mesure et d'en approfondir certains aspects en les illustrant par la description d'expériences récentes de mesure de la lumière.

Mesures de la lumière

Le champ électromagnétique est un système central en physique. L'essentiel de l'information qui nous provient du monde est véhiculé par lui.

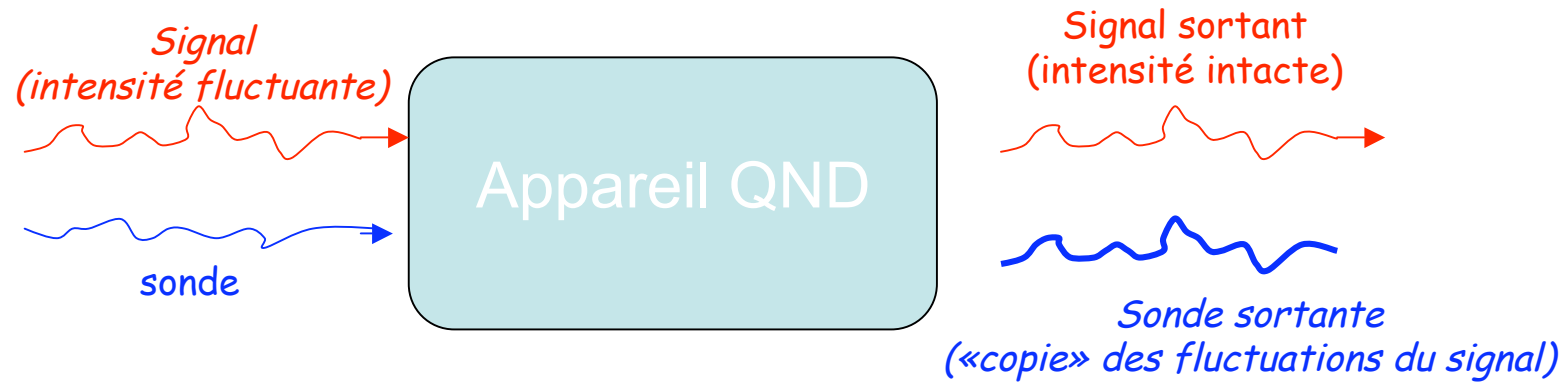
Comprendre la mesure de la lumière dans la théorie quantique a toujours préoccupé les physiciens, depuis Planck (1900), Einstein (1905) et les débuts de la mécanique quantique moderne (expériences de pensée de Bohr, Einstein et Schrödinger). La dualité de la lumière (onde et ensemble de photons à la fois) joue un rôle fondamental dans cette théorie.

L'optique quantique, née avec le laser en 1960, a reposé dans un contexte moderne les questions posées dans les années 1920. La théorie de la mesure de la lumière, le comptage de photons, établie par R.Glauber (1963), constitue le cadre d'analyse de toutes les expériences d'optique.

La mesure de la lumière implique son interaction avec un milieu matériel auquel l'information véhiculée par le champ est transférée. Ce transfert s'effectue en général par absorption d'énergie (effet photo-électrique étudié par Einstein en 1905), si bien que le champ est détruit par la mesure. Cette destruction est une limitation des expériences d'optique *non imposée par la physique quantique*. Les physiciens se sont demandés, depuis les années 1970, comment détecter les photons de façon non absorptive, les laissant présents après la mesure. Un tel procédé dit QND (pour Quantum Non-Demolition) ouvrirait la voie à de nombreuses applications.

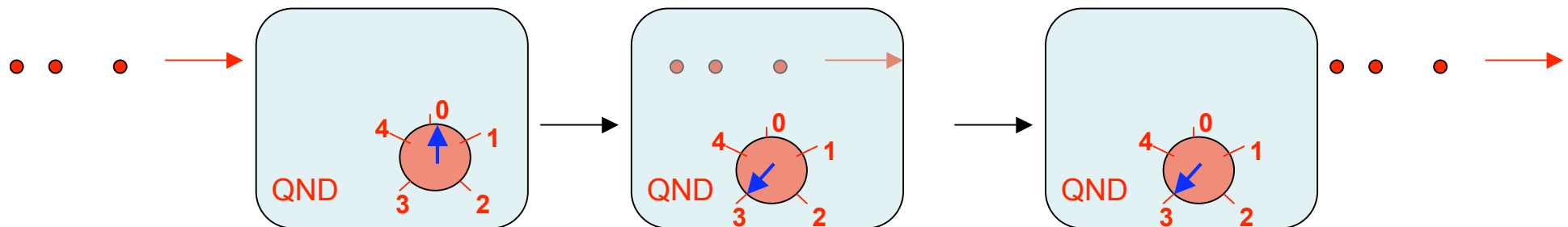
Mesures QND de la lumière

Faisceau de lumière macroscopique:



Comment réaliser cette opération? Quelle est la perturbation induite par la mesure sur le signal? Quels sont les critères de qualité de la mesure?

Faisceau microscopique (comptage de photons):



Photons comptés sans être détruits. Comment atteindre cette sensibilité de mesure QND? Critères de qualité du comptage? Applications possibles?

Plan du Cours

I. Première leçon (21 Janvier): Mesure projective en physique quantique (rappels)

Définition d'une mesure projective (von Neumann). Énoncé des postulats de la mesure. Cas de variables discrètes: sauts quantiques et effet Zenon. Rappels sur les variables conjuguées et les relations d'incertitude. Modélisation d'une mesure idéale par un appareil constitué d'un moment angulaire en rotation. Importance de la décohérence dans le processus de mesure. Corrélations entre mesures et non-localité: rappel sur les inégalités de Bell et l'intrication. Mesurer un état sur un ensemble par tomographie quantique. Théorème de non-clonage quantique.

II. Deuxième leçon (28 Janvier): Mesures généralisées et POVM

Définition et exemples de mesures généralisées. Mesure généralisée vue comme mesure projective dans un système auxiliaire. Mesures destructives vues comme mesures généralisées. Cas particulier: les mesures dites POVM. Mesure projective progressive comme produit de POVMs. Relation à la loi de Bayes sur les probabilités conditionnelles. Un aspect paradoxal de la mesure quantique: mesures dites sans interaction («*interaction-free*»)

Plan du Cours (suite)

III. Troisième leçon (4 Février):

Généralités sur les Mesures quantiques non-destructives

Définition des mesures QND comme classe particulière de mesure projective indéfiniment répétable. Critères nécessaires et suffisants de ces mesures. Modèle simple de détection QND de la lumière par mesure de la pression de radiation. Action en retour sur la phase du champ de la mesure QND de son intensité. Analyse de la relation d'incertitude $\Delta N \Delta \Phi$ basée sur une définition précise de la phase quantique. Mesures QND en optique non-linéaire: mesures de l'intensité ou de quadratures du champ par effet Kerr croisé. Mesures QND à l'aide d'une lame séparatrice mélangeant le champ à une quadrature comprimée du vide. Génération de champs jumeaux.

IV. Quatrième leçon (11 Février):

Principes des expériences CQED avec atomes de Rydberg

Intérêt de la mesure QND microscopique de la lumière, discriminant les différents états de Fock. Un système idéal: l'électrodynamique quantique en cavité. Réalisation du modèle d'un oscillateur harmonique (mode du champ) couplé à un qubit (atome de Rydberg à deux niveaux). Rappels sur la physique des atomes de Rydberg circulaires. Couplage résonnant et oscillation de Rabi. Couplage dispersif: Lamb shift et light shifts.

Plan du cours (suite)

V. Cinquième leçon (25 Février): Comptage QND de zéro ou un photon

Description de quelques expériences simples de manipulation du champ en électrodynamique en cavité. Mesure de 0 ou 1 photon par méthode résonnante: un exemple de porte quantique. Application à l'intrication de trois atomes. Mise au point d'une cavité de très haute surtension permettant le comptage répété d'un photon par méthode dispersive. Observation des sauts quantiques du champ. Une démonstration de l'effet Zenon sur la lumière. Mesure de 0 ou 1 photon et mesure de parité du nombre de photons. Applications possibles à l'étude des chats de Schrödinger du champ et à la décohérence.

VI. Sixième leçon (3 Mars):

Comptage QND de N photons: projection progressive du champ

Comptage des photons d'un champ cohérent par couplage à une succession d'atomes: un exemple de mesure progressive par produit de POVMs. Analyse de l'acquisition de l'information par inférence Bayésienne. Le comptage de photons vu comme une expérience de tomographie sur les atomes. La mesure vue comme une méthode de préparation d'états de Fock. Mesure de la durée de vie de ces états.

Plan du cours (fin) et séminaires

VII. Septième leçon (10 Mars):

Perspectives ouvertes par les mesures QND en CQED

Description d'une mesure QND idéale à nombre d'atomes minimal: le convertisseur analogique/digital du champ. Analyse de l'évolution de la phase du champ dans une mesure QND idéale: génération d'états de Schrödinger du champ. Vers une étude de ces états et de leur décohérence. Vers une étude d'états intriqués du champ dans deux cavités: tests de non-localité et de la frontière classique-quantique.

Les séminaires

21 Janvier: Jean-François Roch, ENS-Cachan
Interférence à un photon, complémentarité et expérience à choix retardé de Wheeler

28 Janvier: Steven Girvin, Yale University
Circuit QED: Quantum Optics of Electrical Circuits

4 Février: Atac Imamoglu, ETH Zurich
Optical manipulation of quantum dot spins

11 Février: Philippe Grangier, Institut d'Optique
Chatons de Schrödinger et états non gaussiens de la lumière : de nouveaux outils pour les communications quantiques

25 Février: Vahid Sandoghdar, ETH, Zurich
Cavity-free efficient coupling of single photons and single emitters

3 Mars: Jun Ye, JILA et Université de Boulder
Precision quantum metrology with lattice-confined ultracold atoms

10 Mars: Igor Dotsenko, LKB- ENS
Tomography of photonic Schrödinger cats in a cavity

I

Mesure projective en physique
quantique (rappels)

Postulats de la mesure quantique idéale (cas pur)

L'état de (S) est représenté par un vecteur $|\Psi\rangle$ d'un espace de Hilbert H

L'observable mesurée est décrite par un opérateur hermitique O de H dont les valeurs propres o_i (discrètes ou continues) sont les seuls résultats possibles. Le projecteur sur le sous-espace de valeur propre o_i est noté P_i :

$$O = \sum_i o_i P_i \quad ; \quad P_i^\dagger = P_i = P_i^2 \quad ; \quad \sum_i P_i = I \quad (1-1)$$

Règle 1: Le résultat d'une mesure est aléatoire, obtenu avec la probabilité:

$$p_i = \langle \Psi | P_i | \Psi \rangle \quad (1-2)$$

Règle 2: Après la mesure, l'état de (S) est projeté sur le sous-espace propre de O correspondant au résultat obtenu:

$$|\Psi\rangle \xrightarrow[\text{résultat } i]{\text{mesure}} \frac{P_i |\Psi\rangle}{\sqrt{p_i}} \quad (1-3)$$

Une mesure immédiatement répétée redonne avec certitude le même résultat

Postulats de la mesure (mélange statistique)

L'état de S est représenté par un opérateur densité ρ

Règle 1: le résultat d'une mesure de O est aléatoire. La probabilité de trouver le résultat o_i est:

$$p_i = \text{Tr}(\rho P_i) \quad (1-4)$$

Règle 2: après la mesure l'état du système devient:

$$\rho \xrightarrow[\text{résultat } i]{\text{mesure}} \rho_i = \frac{P_i \rho P_i}{p_i} \quad (1-5)$$

Remarques:

(a) la description par opérateur densité englobe le cas pur en posant $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ (l'opérateur densité d'un cas pur est le projecteur sur cet état).

(b) Si la mesure est «non-lue», l'état après mesure de (S) est décrit par:

$$\rho \xrightarrow[\text{non lue}]{\text{mesure}} \sum_i p_i \rho_i = \sum_i P_i \rho P_i \quad (1-6)$$

L'opérateur densité se réduit à sa partie diagonale (par blocs) dans la base propre de O : décohérence induite par la mesure

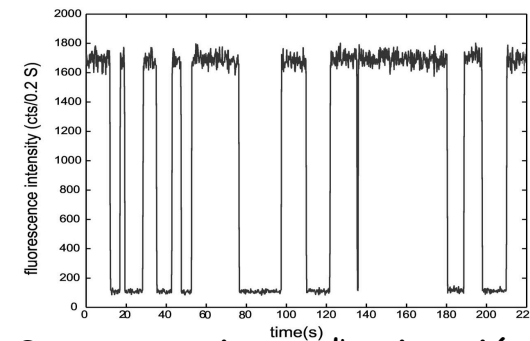
Mesures répétées et sauts quantiques

La mesure d'une observable à spectre discret donne comme résultat une valeur discrète. Si on répète la mesure, on trouve le même résultat, en absence d'évolution liée à une perturbation extérieure.

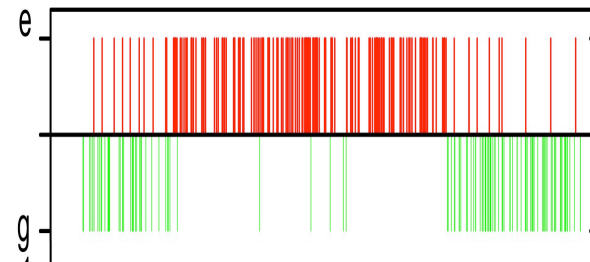
Si le système est couplé à un réservoir qui le fait relaxer, son évolution sous observation continue se manifeste par des sauts discrets, à des instants aléatoires entre valeurs propres différentes. Ce sont les sauts quantiques. Ils ont été observés sur des atomes et des ions piégés et récemment sur un champ électromagnétique (voir suite du cours).

La dynamique du système n'est pas affectée par le couplage à l'appareil de mesure, si le temps de corrélation du couplage au réservoir est très court.

Si le système évolue de façon réversible et unitaire en absence de mesure, le couplage à l'appareil de mesure projette le système sur son état initial et fige l'évolution: c'est l'effet Zenon quantique (voir cours 2005-2006 et page suivante)



Sauts quantiques d'un ion piégé



Sauts quantiques de la lumière

Effet Zenon quantique

Système (A) à 2 états évoluant, à partir de $|0\rangle$, sous l'effet d'un couplage résonnant entre les 2 états (oscillation de Rabi):

$$|\Psi(t)\rangle = \cos\frac{gt}{2}|0\rangle + \sin\frac{gt}{2}|1\rangle \quad (1-7)$$

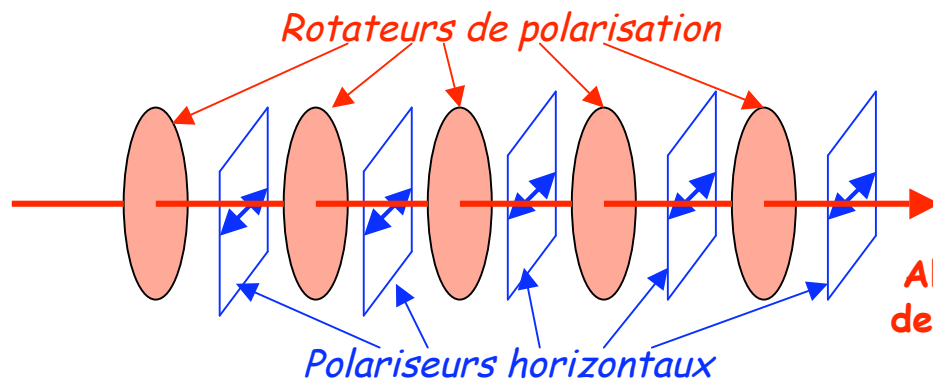
On mesure (A) de façon répétitive avec la périodicité τ dans la base (0,1). La mesure projette (A) avec la probabilité $p = \cos^2\frac{g\tau}{2}$ dans l'état $|0\rangle$. Après un temps t (t/τ mesures), la probabilité de trouver le système dans $|0\rangle$ est:

$$p_0(t) = (p)^{\frac{t}{\tau}} = \left[\cos^2\frac{g\tau}{2}\right]^{\frac{t}{\tau}} \approx 1 - \frac{g^2\tau}{4}t + O(\tau^2) \quad (1-8)$$

Si $\tau \rightarrow 0$, $p_0(t) \rightarrow 1$: la projection répétée fige l'évolution du système.

Simulation de l'évolution unitaire par rotation de polarisation d'un photon:

$$|H\rangle \rightarrow \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle \quad (1-9)$$



Les polariseurs re-projettent l'état sur $|H\rangle$. La probabilité de trouver le système dans $|H\rangle$ après N polariseurs est: $p_H(N) = \cos^{2N}(\theta) \approx 1 - N\theta^2 + O(\theta^3)$

Pour $\theta = \pi/2N$, on obtient:
$$p_H(N) = 1 - \frac{\pi^2}{4N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (1-10)$$

Alors qu'en absence de mesure la polarisation passe de H à V, en présence de mesures elle reste H avec une probabilité qui tend vers 1 quand $N \rightarrow \infty$

Mesures destructives



$$|1\rangle \xrightarrow{\text{clic}} |0\rangle$$

Les mesures projectives obéissant aux postulats de von Neumann ne sont pas le mode le plus fréquent d'acquisition d'information sur un système quantique. Souvent, de l'information est obtenue par une mesure qui détruit le système mesuré (c'est le cas général du comptage de photons, ou encore de l'ionisation sélective des atomes de Rydberg). Nous verrons dans la seconde leçon que de telles mesures peuvent être décrites comme des « **mesures généralisées** » qu'il est possible d'associer à des mesures projectives dans un espace de Hilbert élargi. Une différence essentielle entre mesures destructives et mesures projectives est que les premières, contrairement aux secondes, ne sont évidemment pas répétables.

Mesures quantiques et relations d'incertitude

Deux observables A et B qui ne commutent pas n'ont pas de base d'états commune: un état propre de A se décompose en général sur des états associés à des valeurs propres de B différentes. Mesurer A avec précision projette donc le système sur un état présentant une incertitude sur le résultat d'une mesure ultérieure de B .

Qualitativement, plus l'incertitude sur la valeur de A est petite, plus celle sur la valeur de B est grande.

Incertitudes (variances) de A et B dans un état quantique:

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} ; \quad \Delta B = \sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2} \quad (1-11)$$

On montre de façon quantitative (inégalité de Cauchy-Schwartz):

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (1-12)$$

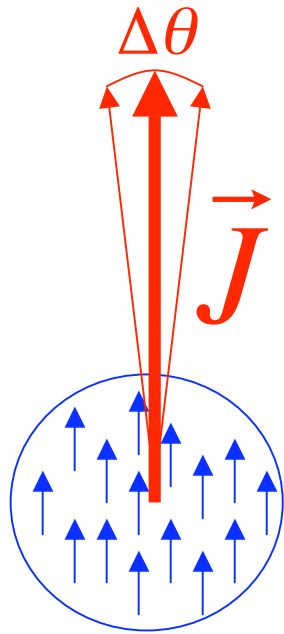
Exemples:

$$[X, P] = i\hbar \quad \rightarrow \quad \Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \quad ; \quad [J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad \rightarrow \quad \Delta \left(\frac{J_x}{\hbar} \right) \cdot \Delta \left(\frac{J_y}{\hbar} \right) \geq \frac{1}{2} \frac{\langle J_z \rangle}{\hbar} \quad (1-13)$$

Incertainitude position-vitesse

Incertainitude transversale d'un moment angulaire orienté le long de Oz

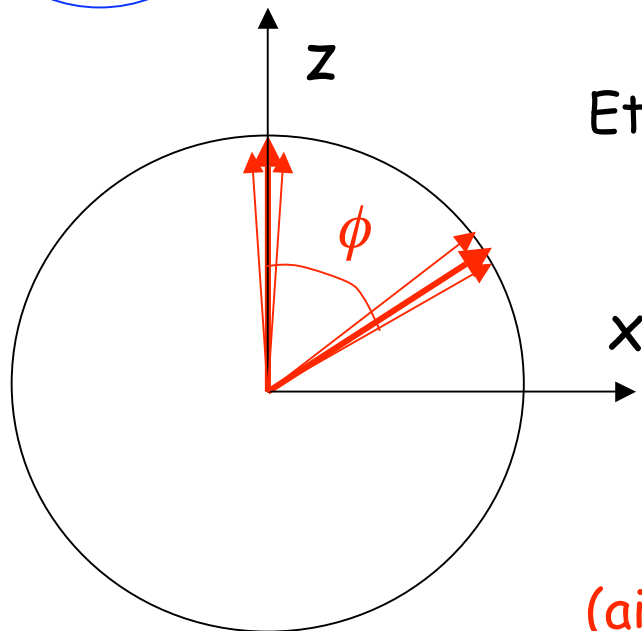
Limite classique: le cas du moment angulaire



Ensemble de N spins dans le même état pur forme un moment angulaire $J=N/2$

Incertitude transversale: $\frac{\Delta J_T}{\hbar} = \frac{\sqrt{N}}{2} \rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta J_T}{J} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ (1-14)

L'incertitude quantique décroît en $1/\sqrt{N}$ et devient négligeable pour N très grand

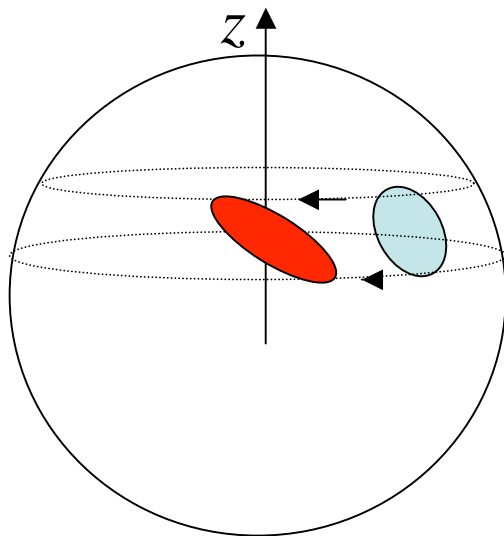
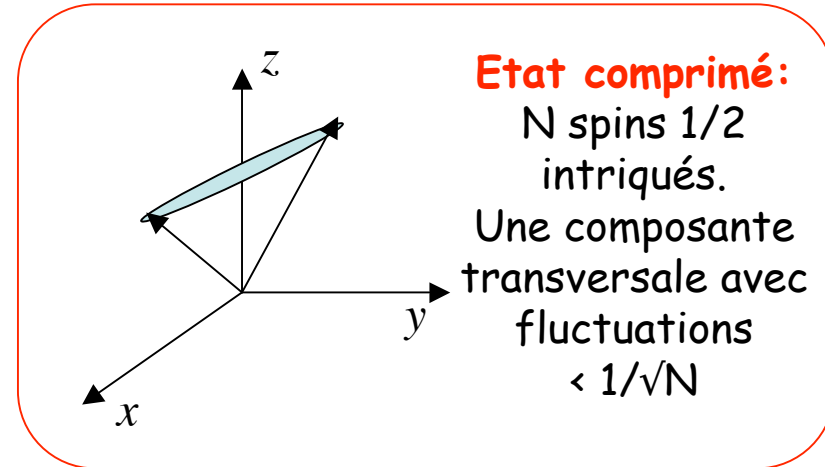
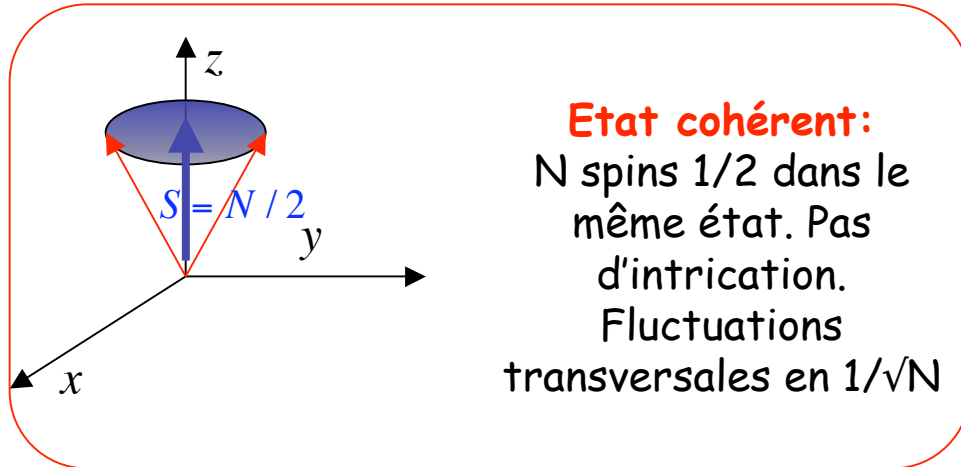


Etats cohérents du moment angulaire obtenus par rotation à partir d'un état $J_z=N/2$

$$|J_\phi\rangle = e^{-i\phi J_y/\hbar} |J_z = N/2\rangle \quad (1-15)$$

Modèle simple d'un appareil de mesure (aiguille quasi-classique tournant sur un cadran)

Etats cohérents et états comprimés du moment angulaire (cours 2006-2007)



La compression se fait par couplage entre les spins, par exemple:

$$\chi J_z^2 = -\sum_{i,j} \chi S_{iz} S_{jz} \quad (1-16)$$

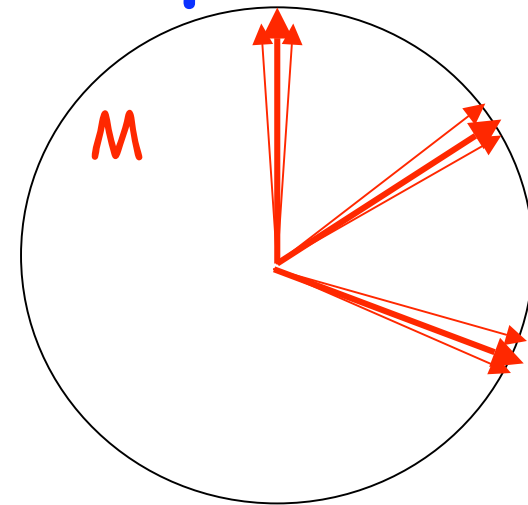
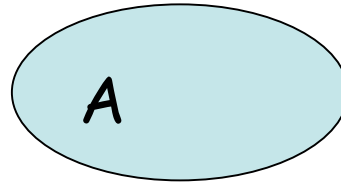
ce qui entraîne l'évolution:

$$J_+(t) = \exp(i\chi J_z^2 t / \hbar) J_+(0) \exp(-i\chi J_z^2 t / \hbar) = J_+(0) e^{2i\chi t (J_z + \frac{1}{2}) / \hbar} \quad (1-17)$$

Le moment angulaire tourne avec une vitesse dépendant linéairement de J_z , d'où une déformation du cercle d'incertitude qui prend une forme allongée

Modélisation d'une mesure quantique idéale

Système quantique A
dont l'observable O_A est
mesurée par l'appareil
classique M



$$|\Psi_A\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \quad ; \quad O_A |a_i\rangle = \varepsilon_i |a_i\rangle \quad (1-18)$$

Hamiltonien d'interaction A-M: $H_{\text{int}} = gO_A \cdot J_y$ (1-19)
(g est une fréquence si O_A sans dimension)

Le couplage A-M induit une rotation de l'aiguille de mesure d'un angle proportionnel à la valeur propre:

$$U(t)|\Psi_A\rangle \otimes |J_{\varphi=0}\rangle = \exp(-i \frac{gO_A J_y}{\hbar} t) |\Psi_A\rangle \otimes |J_{\varphi=0}\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes |J_{\phi_i}\rangle \quad \phi_i = g\varepsilon_i t \quad (1-20)$$

Si l'état de A est une superposition, la première étape de la mesure induit une intrication entre A et M (problème du chat de Schrödinger).

Modélisation d'une mesure quantique (suite)

Condition nécessaire pour que la mesure soit résolue:

$$\delta\phi_{\min} = g\delta\varepsilon_{\min}t > 1 / \sqrt{N} \quad (1-21)$$

Il faut que l'appareil de mesure soit macroscopique (N grand) et que g soit assez grand pour que la mesure discrimine les états en un temps t plus court que les temps d'évolution caractéristiques de A et M . Noter que la précision de la mesure augmente avec t (forme de relation d'incertitude).

Remarque: Si on utilise comme « aiguille de mesure » un moment angulaire comprimé, la sensibilité de la mesure peut être augmentée ($\Delta J_z < 1/\sqrt{N}$).

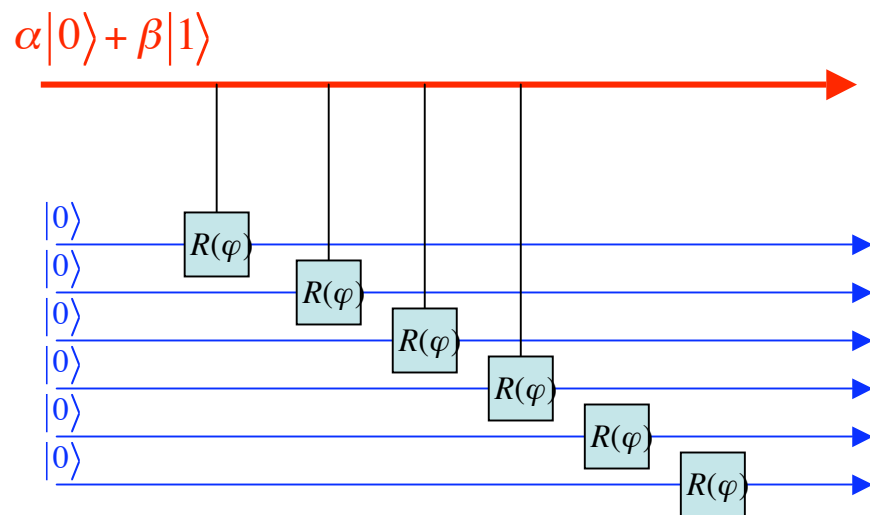
Dans ce premier stade unitaire et réversible, l'information contenue dans A est partagée avec M , conduisant à une intrication entre les deux systèmes. On mesure ensuite M , ce qui conduit à obtenir une valeur ϕ_i . L'état intriqué se projette alors sur l'état correspondant $|a_i\rangle \otimes |J_{\phi_i}\rangle$

La probabilité d'obtenir ce résultat est $p_i = |\alpha_i|^2$

On a reporté sur M l'étape «mystérieuse» (projection). L'observation de ce système classique peut se faire avec une perturbation négligeable, mais a-t-on pour autant éliminé l'aspect troublant de la mesure?

Mesure d'un qubit et porte quantique

La mesure d'un qubit (A) par un moment angulaire ($J=N/2$), décrit comme un ensemble symétrique de qubits correspond à l'opération de N portes logiques en parallèle:



L'information sur l'état du qubit A est inscrite dans l'ensemble des N qubits de J, tous dans le même état. L'angle φ peut être choisi arbitrairement. Si on prend $\varphi = \pi$ (portes CNOT), les états finals des qubits J sont orthogonaux et la mesure d'un seul de ces qubits est suffisante pour projeter l'état de (A) dans 0 ou 1.

$$\begin{aligned}
 [\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] \otimes |0,0,0\dots 0\rangle &\xrightarrow{\text{portes}} \alpha|0\rangle \otimes |0,0,0\dots 0\rangle + \beta|1\rangle \otimes [R(\varphi)|0\rangle]^{\otimes N} \\
 &= \alpha|0\rangle \otimes |J_0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |J_\varphi\rangle \quad (1-22)
 \end{aligned}$$

Ambiguïté de la première étape de la mesure

Cas simple de la mesure d'une observable à deux valeurs (0 et 1), A étant avant la mesure dans une superposition symétrique des deux états propres.

Après la première étape, l'état de A+M est maximalelement intriqué:

$$U|\Psi_A\rangle \otimes |J_0\rangle = [|a_0\rangle \otimes |J_0\rangle + |a_1\rangle \otimes |J_1\rangle] / \sqrt{2} \quad (1-23)$$

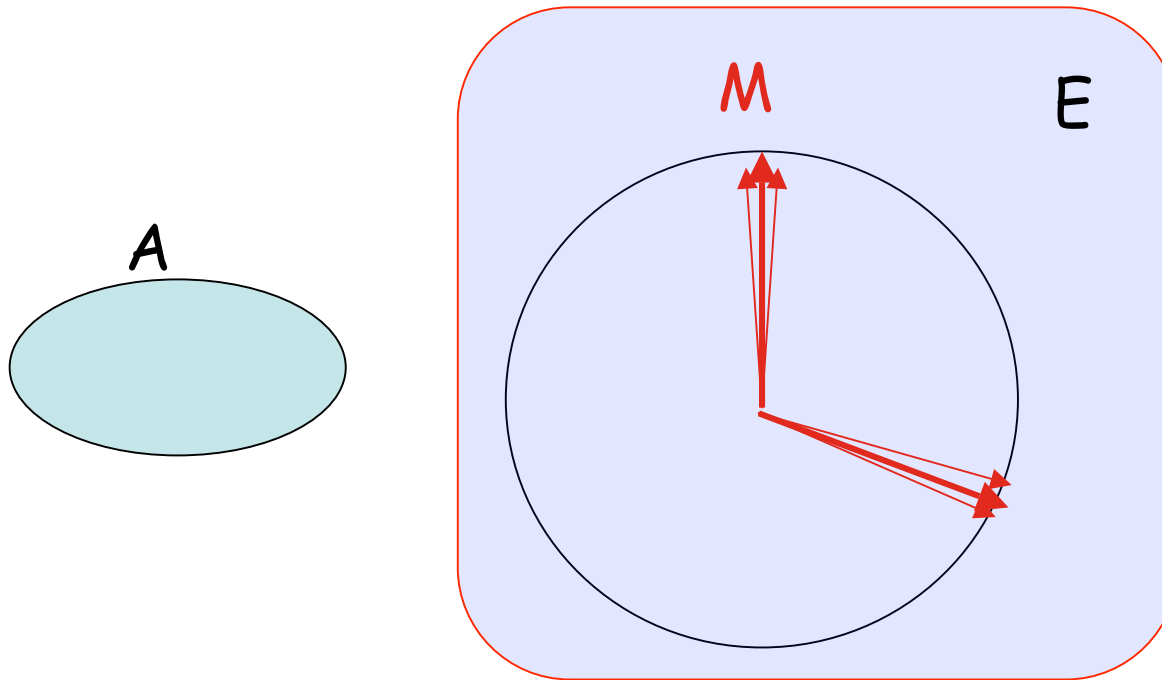
Cet état s'écrit de façon équivalente:

$$U|\Psi_A\rangle \otimes |J_0\rangle = [(|a_0\rangle + |a_1\rangle) \otimes (|J_0\rangle + |J_1\rangle) + (|a_0\rangle - |a_1\rangle) \otimes (|J_0\rangle - |J_1\rangle)] / 2\sqrt{2} \quad (1-24)$$

En détectant M dans la base des états $|J_0\rangle \pm |J_1\rangle$ (états «chat de Schrödinger»), on mesurerait une observable O'_A admettant les états propres $|a_0\rangle \pm |a_1\rangle$ qui ne commute pas avec O_A !

Cette ambiguïté est levée en réalisant que les états de type chat sont extrêmement fragiles et instantanément détruits par la décohérence. Il faut pour l'analyser introduire un troisième système dans le modèle, l'environnement de M.

Décohérence de l'appareil de mesure



Environnement E
constitué d'un grand
nombre n de
« particules »,
modélisées par des
qubits (systèmes à
deux niveaux).

Les états $|J_i\rangle$ de M («pointer states») se corrént de façon classique (sans intrication) aux particules de l'environnement (processus très rapide):

$$\begin{aligned} |J_0\rangle \otimes |E_0\rangle &\rightarrow |J_0\rangle \otimes |E_0\rangle = |J_0\rangle \otimes [|0\rangle_1 |0\rangle_2 \cdots |0\rangle_n] \\ |J_1\rangle \otimes |E_0\rangle &\rightarrow |J_1\rangle \otimes |E_1\rangle = |J_1\rangle \otimes [|1\rangle_1 |1\rangle_2 \cdots |1\rangle_n] \end{aligned} \quad (1-25)$$

L'information sur la position de l'aiguille classique est disséminée, sans intrication, sur un grand nombre de particules (par exemple les photons dont la détection permet de la « voir »).

Disparition des états «chats de Schrödinger» de M

Si on n'observe pas l'environnement, l'état de A+M est décrit par l'opérateur densité obtenu en traçant sur les états des qubits de E:

$$|a_0\rangle \otimes |J_0\rangle \otimes |0_1, 0_2 \dots 0_n\rangle + |a_1\rangle \otimes |J_1\rangle \otimes |1_1, 1_2 \dots 1_n\rangle$$

$$\rightarrow |a_0\rangle \langle a_0| \otimes |J_0\rangle \langle J_0| + |a_1\rangle \langle a_1| \otimes |J_1\rangle \langle J_1| \quad (1-26)$$

La cohérence entre $|J_0\rangle$ et $|J_1\rangle$ est perdue!

On retrouve le résultat donné par le postulat de la mesure: avant de lire le résultat, l'opérateur densité de A se réduit à la partie diagonale dans la base des états propres de O_A de l'opérateur densité initial du système

Il suffit de « perdre » une seule particule de l'environnement pour avoir à effectuer cette opération de trace. Si le temps de « perte » moyen est T, on aura perdu la première particule après un temps T/n, qui devient infiniment court quand n est macroscopique....

Ce modèle donne une interprétation des postulats. Il ne résoud pas le « problème » du caractère aléatoire du résultat observé sur une mesure (« Dieu joue aux dés »)

Corrélations quantiques

$O^{(1)}$ et $O^{(2)}$ sont deux observables définies par les projecteurs $P_i^{(1)}$ et $P_j^{(2)}$. La probabilité conditionnelle de trouver le résultat j sur $O^{(2)}$ sachant que l'on a trouvé i sur $O^{(1)}$ est:

$$P_{(j|i)} = \frac{\text{Tr}[\rho P_i^{(1)} P_j^{(2)} P_i^{(1)}]}{\text{Tr}[\rho P_i^{(1)}]} \quad (1-27)$$

Si chaque observable forme un ensemble complet (espaces propres i et j non-dégénérés), $p_{(j|i)}$ est indépendant de l'état du système:

$$P_{(j|i)} = |\langle j|i \rangle|^2 \quad (1-28)$$

Dans ce cas, la corrélation est indépendante de l'ordre des mesures:

$$P_{(j|i)} = P_{(i|j)} = |\langle j|i \rangle|^2 \quad (1-29)$$

Si $O^{(1)}$ et $O^{(2)}$ correspondent à deux parties indépendantes d'un système bipartite, ils commutent ainsi que les projecteurs sur leurs espaces propres. La probabilité jointe de trouver les résultats i et j , indépendante de l'ordre des mesures, est:

$$p(i, j) = P_{(j|i)} P_i^{(1)} = P_{(i|j)} P_j^{(2)} = \text{Tr}[\rho P_i^{(1)} P_j^{(2)}] \quad (1-30)$$

Si (S) est dans un état intriqué, ces corrélations ne sont pas interprétables en termes de variables cachées (inégalités de Bell - voir cours antérieurs)

Mesures corrélées non-locales (cas pur)

Etat intriqué bipartite (forme de Schmidt):

$$|\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |\varphi_k\rangle_1 \otimes |\psi_k\rangle_2 \neq |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \quad ; \quad \langle \varphi_k | \varphi_{k'} \rangle = \langle \psi_k | \psi_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \quad ; \quad \sum_k \lambda_k = 1 \quad (1-31)$$

Corrélations des probabilités de mesures: $p(i, j) = \langle \Psi | P_i^{(1)} P_j^{(2)} | \Psi \rangle \neq p_i^{(1)} \cdot p_j^{(2)}$ (1-32)

Corrélations des valeurs moyennes:

$$\langle O^{(1)} O^{(2)} \rangle = \langle \Psi | O^{(1)} O^{(2)} | \Psi \rangle = \sum_{i,j} p(i, j) o_i^{(1)} o_j^{(2)} \neq \sum_i p_i^{(1)} o_i^{(1)} \times \sum_j p_j^{(2)} o_j^{(2)} = \langle O^{(1)} \rangle \langle O^{(2)} \rangle \quad (1-33)$$

Tentative d'explication des corrélations par variables cachées (résultat des mesures préderminé) pour observables bivaluées : $o_i^{(1)}, o_j^{(2)} = \varepsilon = \pm 1$

Deux observables bivaluées quelconques mesurées sur (1): A et A' $\rightarrow \varepsilon_a$ et $\varepsilon_{a'}$

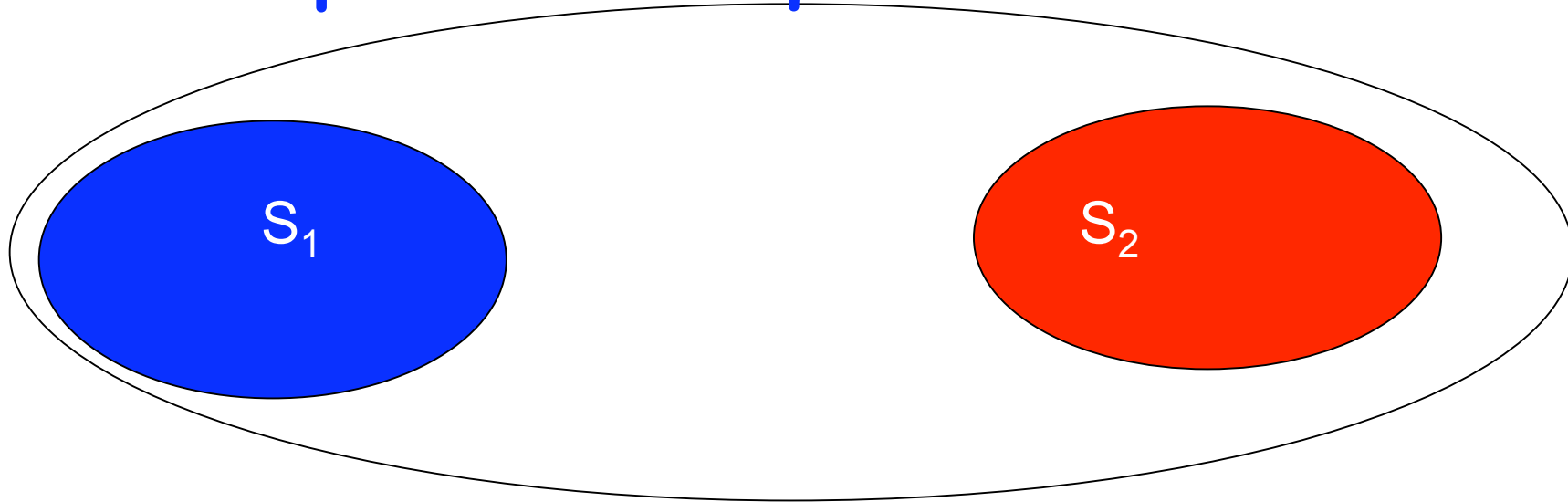
Deux observables bivaluées quelconques mesurées sur (2): B et B' $\rightarrow \varepsilon_b$ et $\varepsilon_{b'}$

$$S_{Bell} = |\langle AB \rangle - \langle A' B \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A' B' \rangle| = |\langle (\varepsilon_a - \varepsilon_{a'}) \varepsilon_b \rangle + \langle (\varepsilon_a + \varepsilon_{a'}) \varepsilon_{b'} \rangle| \leq 2 \quad (1-34)$$

Le calcul quantique donne, pour certains choix de A, B, A', B' : $S_{Bell} > 2$ et les expériences confirment cette violation de l'inégalité de Bell.

Pas de « variables cachées » (pas de valeurs prédéfinies pour les mesures)

Mesure quantique sur un système bipartite intriqué: non-localité



Les mesures effectuées sur S_1 et S_2 donnent des résultats aléatoires et corrélés à distance de façon instantanée (l'ordre des mesures est en fait indifférent). Ces corrélations ne peuvent s'interpréter classiquement en donnant aux quantités mesurées une existence prédéfinie. La valeur obtenue par un détecteur « se réalise » au moment de la mesure, imposant instantanément la valeur corrélée observée par l'autre détecteur.

Ces corrélations se constatent en comparant les résultats de mesure, ce qui ne peut se faire instantanément: la non-localité quantique ne peut être utilisée pour des communications supra-luminales.

Mesurer une observable ou «mesurer» un état?

En physique classique, rien n'empêche, en principe de déterminer avec une précision arbitraire l'état complet d'un système. En physique quantique, la mesure d'une observable est possible, avec une précision arbitraire, mais cette mesure perturbe nécessairement le système (en affectant la valeur des observables non-commutant avec celle mesurée).

La conséquence en est l'impossibilité de déterminer avec précision l'état d'un système inconnu: la fonction d'onde d'un système unique ne peut être « mesurée » complètement. L'exemple le plus simple est celui d'un spin, préparé dans une direction arbitraire. Si le spin est unique, aucune procédure ne permet de déterminer sa direction. En choisissant une composante et en effectuant sa mesure, on peut seulement être sûr que le spin ne pointait pas dans la direction opposée à celle qui correspond au résultat obtenu!

Pour déterminer un état (cas pur) ou un opérateur densité (mélange), il faut effectuer des mesures statistiques **sur un grand nombre** de systèmes. On déduit des résultats des mesures l'état cherché (tomographie quantique) avec une précision croissant avec le nombre de mesures.

Exemple de tomographie quantique: le cas du spin

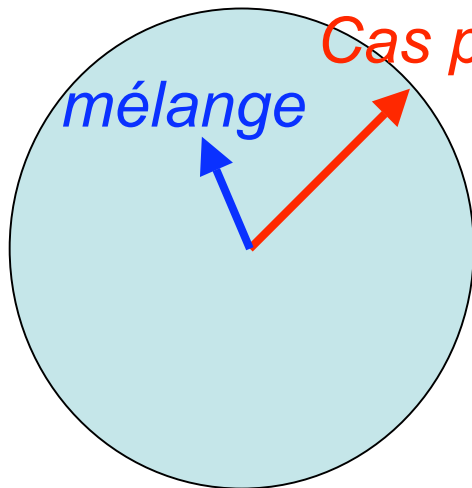
$$\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \quad ; \quad \vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z \quad (1-35)$$

L'opérateur densité d'un spin se décompose sur la matrice unité et les trois matrices de Pauli. Les coefficients sont les composantes de la polarisation P du spin:

$$P_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i) = \langle \sigma_i \rangle \quad (1-36)$$

$|\vec{P}| = 1$ *cas pur* Extrémité de P sur sphère de Bloch

$|\vec{P}| < 1$ *mélange* Extrémité de P dans sphère de Bloch



On détermine P à l'aide d'un échantillon de n spins identiques. On divise l'échantillon en trois sous-ensembles contenant chacun $n/3$ spins et on effectue sur ces ensembles des mesures statistiques indépendantes de $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$ et $\langle \sigma_z \rangle$. On en déduit ρ immédiatement.

Impossibilité du clonage quantique

Une façon de déterminer l'état inconnu d'un système quantique unique serait de le cloner en grand nombre, puis d'effectuer la tomographie quantique sur l'ensemble ainsi constitué. L'impossibilité du clonage quantique est ainsi un corollaire de l'impossibilité de déterminer à partir d'un seul exemplaire un état quantique inconnu.

Le clonage demanderait un système auxiliaire dans un état de référence $|0\rangle$ et correspondrait à la transformation unitaire qui, appliquée à deux états orthogonaux $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ donnerait:

$$|\phi\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad (1-37)$$

L'unitarité impose la conservation du produit scalaire, soit la condition:

$$\langle\phi|\psi\rangle\langle 0|0\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^2 \quad \text{soit encore:} \quad \langle\phi|\psi\rangle = 0 \text{ ou } 1$$

Une machine réversible ne peut répliquer que des états identiques ou orthogonaux. Par exemple, si on connaît l'axe le long duquel un spin pointe mais non sa direction (deux états orthogonaux possibles), on peut le mesurer et le cloner en préparant un autre dans le même état. La procédure ne marche pas si le spin est aligné le long d'un axe inconnu.

Le clonage est interdit, mais on peut copier un état quantique inconnu, à condition de détruire l'original (téléportation quantique- cours antérieurs)

Conclusion de la première leçon

Nous avons rappelé la définition et les propriétés d'une mesure projective en physique quantique et décrit différents modèles d'appareils de mesure idéale. L'importance de la décohérence dans le processus de mesure a été soulignée. Les incertitudes sur les mesures de variables conjuguées ont été rappelées, et la limite que ces incertitudes imposent sur la précision des mesures a été discutée. Certains aspects « paradoxaux » de la mesure ont été soulignés (effet Zenon). Enfin, les propriétés des corrélations entre mesures effectuées sur des parties spatialement séparées d'un système nous ont conduit à rappeler l'aspect non-local de la physique quantique.