

Cours 2007-2008: Deuxième Leçon

28 Janvier 2008

Nous décrivons dans cette leçon des mesures «généralisées» n'obéissant pas aux critères restrictifs de la mesure projective idéale de von Neumann. Ces mesures qui donnent une information plus ou moins partielle sur l'état d'un système quantique correspondent souvent à des situations plus proches des expériences réelles que les mesures projectives. Un cas particulier important de mesure généralisée est défini par un ensemble d'opérateurs hermitiques positifs formant un « POVM » (Positive Operator Valued Measure). Le lien entre mesures généralisées, POVM et mesure projective sera rappelé et un certain nombre d'exemples intéressants pour la suite sera présenté.

Comme nous l'avons vu dans la 1^{ère} leçon, un modèle simple de processus de mesure est réalisé par le couplage d'un système quantique S à un ensemble de N qubits de mesure indépendants (constituant un moment angulaire $J=N/2$). Nous montrerons que l'acquisition partielle d'information résultant du couplage de S avec un seul qubit est un POVM et nous décrirons comment l'accumulation de mesures POVM résultant du couplage avec un ensemble de qubits se transforme en mesure projective. Nous montrerons que l'acquisition d'information sur S résultant de la mesure POVM s'apparente à un processus d'inférence bayésienne en théorie des probabilités.

Nous concluons la leçon en considérant un exemple curieux de mesure, dans lequel il semble que l'information soit obtenue « sans que le système mesuré ait interagi avec l'appareil ». Le paradoxe provient, comme dans d'autres cas du même genre, de l'utilisation indue de concepts classiques pour décrire une situation quantique.

Mesure généralisée

Remplaçons les projecteurs P_i d'une mesure idéale par un ensemble d'opérateurs M_i (non nécessairement hermitiques) satisfaisant la relation:

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I \quad (2-1)$$

Une mesure généralisée associée à cet ensemble d'opérateurs, effectuée sur un état $|\Psi\rangle$, donne le résultat i avec la probabilité:

$$p_i = \langle \Psi | M_i^\dagger M_i | \Psi \rangle \quad (2-2)$$

et projette dans ce cas le système dans l'état après mesure:

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{mesure } i} |\Psi_i\rangle = \frac{M_i |\Psi\rangle}{\sqrt{p_i}} \quad (2-3)$$

Pour un système dans un mélange statistique (décrit par ρ), ces relations deviennent:

$$p_i = \text{Tr} \{ \rho M_i^\dagger M_i \} \quad ; \quad \rho \xrightarrow{\text{mesure } i} \rho_i = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{p_i} \quad (2-4)$$

Mesure généralisée sur un système A comme mesure projective sur un système auxiliaire M intriqué à A

Couplons le système A à un système auxiliaire M ayant une base d'états orthogonaux $|m_i\rangle$ que l'on associe aux différents opérateurs M_i de A . Appelons $|m_0\rangle$ un état de référence de M . Ce couplage est défini par la transformation (que l'on démontre aisément être unitaire):

$$|\Psi\rangle \otimes |m_0\rangle \longrightarrow \sum_i M_i |\Psi\rangle \otimes |m_i\rangle \quad (2-5)$$

Cette transformation intrique (A) et (M). La mesure projective de l'observable de M admettant les $|m_i\rangle$ comme états propres donne alors le résultat i avec la probabilité p_i (donnée par l'eq.2-2) et projette A dans l'état (non normalisé) $M_i|\Psi\rangle$. La mesure généralisée sur A peut donc toujours être vue comme résultat de l'intrication de A avec un système auxiliaire M , suivie d'une mesure projective de M .

Notons que M peut avoir une dimension quelconque: le nombre d'opérateurs M_i n'est pas (comme le nombre de projecteurs P_i d'une mesure projective), limité par la dimension de A . Une mesure généralisée immédiatement répétée ne redonne pas en général le même résultat. La somme des probabilités des résultats possibles est cependant toujours égale à 1.

Mesures destructives vues comme mesures généralisées

Ionisation sélective d'atomes de Rydberg

On applique à l'atome un champ électrique spatialement ou temporellement variable qui atteint en des points ou à des temps différents les seuils d'ionisation d'états $|i\rangle$ d'énergie de liaison différents. L'électron résultant est accéléré vers une électrode émettant des électrons secondaires, déclenchant une avalanche qui signale l'ionisation de l'atome et le niveau où il était avant l'application du champ. Cette mesure correspond aux opérateurs:

$$M_i = |ion\rangle\langle i| \quad (2-10)$$

où l'état $|ion\rangle$ représente l'ion résultant du processus d'ionisation. Les M_i satisfont la relation de normalisation:

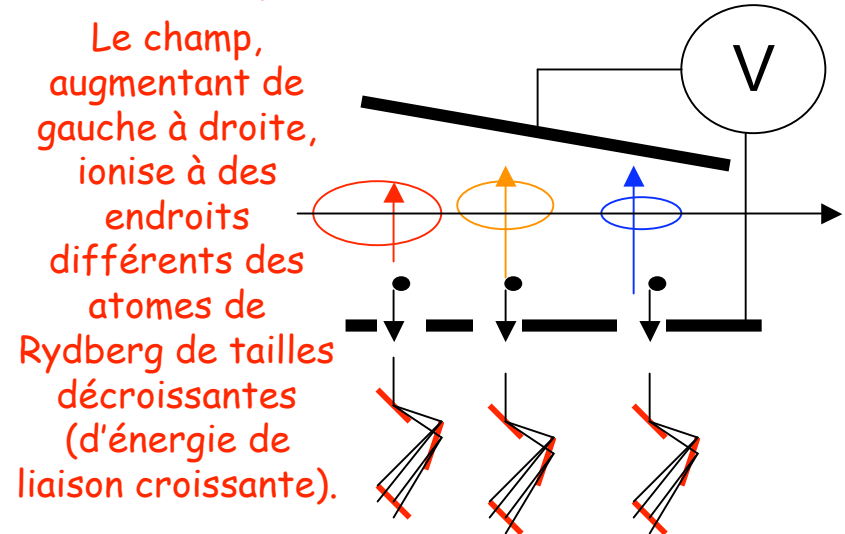
$$\sum_i M_i^\dagger M_i = \sum_i |i\rangle\langle ion|ion\rangle\langle i| = \sum_i |i\rangle\langle i| = I \quad (2-11)$$

La probabilité de trouver l'atome dans l'état $|i\rangle$ est:

$$p_i = \langle \Psi | M_i^\dagger M_i | \Psi \rangle = |\langle \Psi | i \rangle|^2 \quad (2-12)$$

et l'état est transformé par la mesure suivant:

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{résultat } i} \frac{|ion\rangle\langle i|\Psi\rangle}{\sqrt{p_i}} = |ion\rangle \quad (2-13)$$

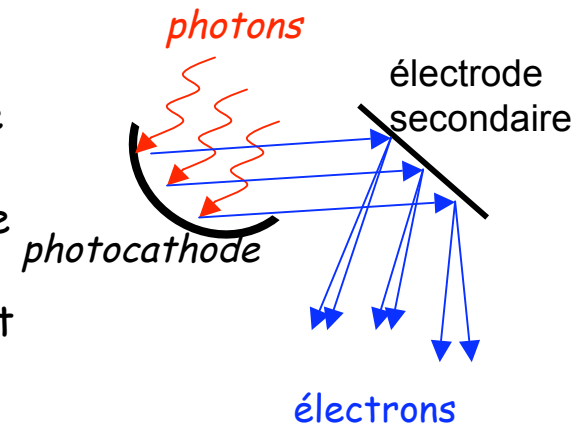


L'information sur l'état de l'atome est perdue après la mesure, qui ne peut être répétée.

Mesures destructives vues comme mesures généralisées (suite)

Comptage de photons

Un compteur de photons absorbe les quanta de lumière en ionisant les atomes d'une photo-cathode, les électrons résultant étant détectés après une amplification par avalanche analogue à celle décrite à la page précédente. Certains photo-détecteurs fournissent un courant proportionnel au nombre de photons absorbés et sont ainsi capable de résoudre des nombres de photons différents. Cette mesure destructive peut être décrite par les opérateurs du champ:



$$M_n = |0\rangle\langle n| \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2-14)$$

où $|0\rangle$ est l'état du vide dans le mode du champ mesuré et $|n\rangle$ l'état à n photons. On a la relation de fermeture:

$$\sum_n M_n^\dagger M_n = \sum_n |n\rangle\langle n| = I \quad (2-15)$$

La probabilité de trouver n photons dans l'état $|\Psi\rangle$ du mode du champ est:

$$p_n = |\langle n|\Psi\rangle|^2 \quad (2-16)$$

l'état après mesure étant le vide: les photons sont détruits en étant comptés.

Ici encore l'expérience n'est pas répétable.

Mesure généralisée et Positive operator valued measure (POVM)

De façon générale les $E_i = M_i^\dagger M_i$ sont des opérateurs hermitiques positifs (à valeurs propres positives ou nulles) qui satisfont la normalisation:

$$\sum_i E_i = I \quad (2-18)$$

L'ensemble des E_i constitue un POVM (positive operator valued measure). La probabilité de trouver le résultat correspondant à l'élément E_i du POVM est:

$$p_i = \text{Tr} \{ \rho E_i \} \quad (2-19)$$

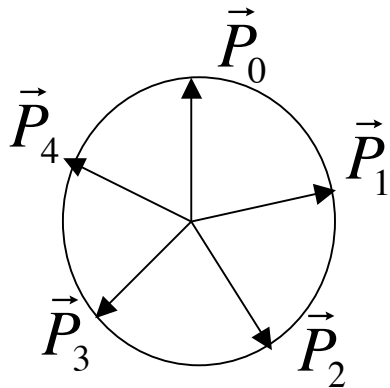
L'état obtenu après mesure n'est en général pas simplement exprimé en fonction des E_i . Un cas particulier simple correspond à des E_i construits à partir d'opérateurs M_i hermitiques, on a alors $M_i = M_i^\dagger = \sqrt{E_i}$ et la projection associée à la mesure généralisée s'écrit en fonction des éléments du POVM:

$$\rho \xrightarrow{\text{mesure } i} \frac{\sqrt{E_i} \rho \sqrt{E_i}}{P_i} \quad (2-20)$$

Une mesure projective est un cas particulier de POVM avec $E_i = P_i$

Exemple de mesure POVM d'un qubit

Une mesure projective est définie par les projecteurs P_0 et P_1 sur deux états de spin orthogonaux (associés à des vecteurs de Bloch opposés). Une mesure POVM pourra être définie par $N > 2$ opérateurs E_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) dont la somme est égale à l'opérateur unité 2×2 . On peut choisir des opérateurs proportionnels aux N projecteurs sur des états dont les directions sont uniformément réparties sur un grand cercle de la sphère de Bloch:

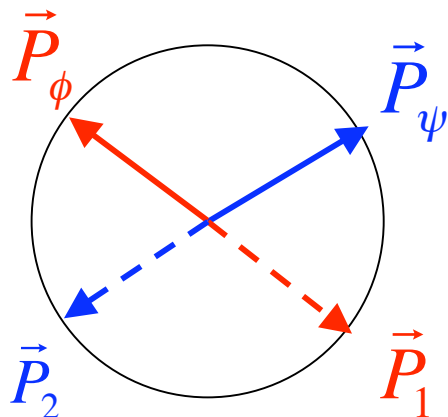


$$E_i = \frac{1}{N} (I + \vec{P}_i \cdot \vec{\sigma}) \quad (2-21)$$

La mesure généralisée peut alors donner N résultats différents, en projetant le spin sur l'une des N directions équi-réparties sur le grand cercle. Voir cours 2003-2004 pour une description explicite de la procédure de mesure dans le cas $N=3$, dont nous discutons une application page suivante.

Intêret d'une mesure POVM: reconnaissance partielle de deux états non-orthogonaux

Si Alice donne à Bob un qubit dans un de deux états non-orthogonaux $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$, dont les vecteurs de Bloch \vec{P}_ϕ et \vec{P}_ψ forment un angle $\theta = 120^\circ$, celui-ci ne peut décider à coup sûr duquel des deux il s'agit (corollaire du théorème de non-clonage). Par une mesure projective le long de \vec{P}_ϕ , il peut reconnaître à coup sûr l'état $|\psi\rangle$ s'il trouve le vecteur de Bloch aligné le long de la direction $\vec{P}_1 = -\vec{P}_\phi$ (la probabilité de l'état $|\phi\rangle$ devenant alors nulle), mais ne peut conclure s'il trouve le qubit dans l'état $|\phi\rangle$. La conclusion est inversée (qubit a coup sûr dans l'état $|\phi\rangle$), s'il choisit de mesurer le long de \vec{P}_ψ , dans le cas où il trouve le qubit avec le vecteur de Bloch aligné dans la direction $\vec{P}_2 = -\vec{P}_\psi$. Toute autre direction de mesure projective ne lui permet de conclure avec certitude dans aucun cas.



Cette stratégie donne avec certitude la bonne réponse dans **37,5%** des cas (probabilité 1/2 que Bob choisisse de mesurer le long de l'état qu'Alice *n'a pas choisi*, multipliée par la probabilité $\cos^2[(\pi-\theta)/2] = 3/4$ de trouver dans ce cas le spin dans l'état orthogonal à celui non-choisi par Alice).

Nous allons voir que Bob peut mieux faire en remplaçant la mesure projective par une mesure POVM à trois éléments.

Reconnaissance partielle de deux états non-orthogonaux par mesure POVM (suite)

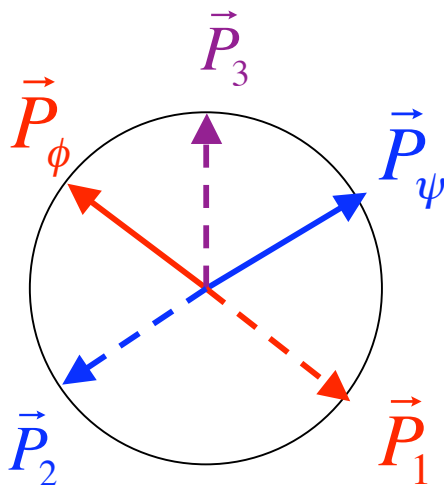
Bob constitue un POVM avec les trois opérateurs:

$$E_i = \frac{1}{3}(I + \vec{P}_i \cdot \vec{\sigma}) \quad ; \quad (i=1,2,3) \quad (2-22)$$

avec:

$$\vec{P}_3 = -(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) \quad (2-23)$$

Les extrémités des vecteurs \vec{P}_1, \vec{P}_2 et \vec{P}_3 forment un triangle équilatéral. Les éléments E_i sont proportionnels aux trois projecteurs sur les états associés aux vecteurs de Bloch \vec{P}_i (facteur de normalisation $2/3$).



Bob effectue la mesure POVM sur l'état donné par Alice. S'il trouve le résultat **1**, $|\phi\rangle$ est exclu et Alice lui a certainement donné $|\psi\rangle$. S'il trouve **2**, c'est $|\psi\rangle$ qui est exclu et il sait qu'Alice lui a donné $|\phi\rangle$. S'il trouve **3**, Bob ne peut conclure. La méthode donne avec certitude la bonne réponse dans **50%** des cas: quel que soit le choix d'Alice, il y a une chance sur deux pour que Bob trouve le résultat **3** qui le laisse indécis. Cette stratégie, qui introduit explicitement à côté des choix $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ la possibilité « **Bob ne sait pas** » est ainsi plus performante, pour cette opération de reconnaissance, que la mesure projective.

Autre exemple de POVM: couplage d'un qubit avec un moment angulaire

Considérons le POVM d'un moment angulaire (J) constitué des 2 opérateurs:

$$E_j = \cos^2\left(\frac{\varphi J_z / \hbar - j\pi}{2}\right) \quad ; \quad j = 0, 1 \quad (2-24)$$

Les E_j sont des opérateurs hermitiques positifs, de somme unité et de spectre:

$$\lambda(m, j) = \cos^2\left(\frac{m\varphi - j\pi}{2}\right) \quad ; \quad -J \leq m \leq J \quad (2-25)$$

Pour réaliser ce POVM, couplons J à un qubit A par le hamiltonien:

$$H_{\text{int}} = \frac{g}{2} J_z \cdot \sigma_x^{(A)} \quad (2-26)$$

et faisons interagir A et J pendant un temps $t = \varphi/g$ à partir de l'état $|0\rangle_A \otimes \sum_m c_m |m\rangle$:

$$\sum_m c_m U(t = \varphi/g) |0\rangle_A \otimes |m\rangle = \sum_m c_m \exp(-im\varphi \sigma_x^{(A)} / 2) |0\rangle_A \otimes |m\rangle = \sum_m c_m |m\rangle \otimes \left[\cos\left(\frac{m\varphi}{2}\right) |0\rangle_A - i \sin\left(\frac{m\varphi}{2}\right) |1\rangle_A \right] \quad (2-27)$$

La mesure de $\sigma_z^{(A)}$ donne le résultat $j=0$ ou 1 et réalise le POVM cherché:

$$p_j = \sum_m |c_m|^2 \cos^2[(m\varphi - j\pi)/2] = {}_j \langle \Psi | E_j | \Psi \rangle_j \quad (2-28)$$

$$|\Psi\rangle_j^{(\text{après})} = \frac{1}{\sqrt{p_j}} \sum_m c_m \cos[(m\varphi - j\pi)/2] |m\rangle = \sqrt{\frac{E_j}{p_j}} |\Psi\rangle_j \quad (2-29)$$

Interprétation de la règle de projection de la mesure POVM: loi de Bayes sur les probabilités conditionnelles

La mesure de A , après couplage avec J , donne de l'information sur J . Si $J > 1/2$, cette information ne peut être que partielle et ne peut fournir une mesure complète de J . Elle change cependant la connaissance que l'on a du système et donc son état, qui exprime cette connaissance. Les probabilités associées à la valeur m du moment angulaire deviennent après la mesure:

$$|c_m|^2 \xrightarrow[\text{résultat } j]{\text{mesure}} \frac{|c_m|^2 E_j(m)}{\sum_m |c_m|^2 E_j(m)} = \frac{|c_m|^2 \cos^2[(m\varphi - j\pi)/2]}{\sum_m |c_m|^2 \cos^2[(m\varphi - j\pi)/2]} \quad (2-30)$$

Supposons J entier et ajustons le temps de couplage entre A et J pour réaliser la condition $\varphi = \pi$. On a alors:

$$\begin{aligned} E_0(m) &= 1 ; E_1(m) = 0 \text{ si } m \text{ pair} \\ E_0(m) &= 0 ; E_1(m) = 1 \text{ si } m \text{ impair} \end{aligned} \quad (2-31)$$

Trouver $j=0$ ($j=1$) projette J sur le sous-espace des valeurs de m paires (impaires) respectivement. Le POVM est une mesure projective de la parité de m . Ce résultat peut se retrouver par un argument de pure logique classique (voir page suivante).

Mesure POVM et loi de Bayes (suite)

Plaçons nous, comme page précédente, dans le cas $\varphi=\pi$. Le POVM est obtenu par une rotation du qubit A suivie d'une mesure de A . L'angle de cette rotation est conditionné par la valeur propre m de J_z . Trouver $j=0$ signifie que A ne peut être avant la mesure dans l'état pur $|1\rangle$. Or il se trouverait dans cet état si m était égal à $2k+1$. La rotation de A , d'un angle $(2k+1)\pi$, aurait en effet porté A de l'état initial $|0\rangle$ vers $|1\rangle$. Le résultat $j=0$ est donc incompatible avec m impair. Pour les valeurs paires de m , la mesure POVM n'apporte aucune information. Lorsque l'on trouve $j=0$, J doit donc être projeté sur les états de m pair, sans changement des probabilités relatives entre les différents résultats pairs possibles. De même, le résultat $j=1$ projette l'état de (J) sur les états m impairs, en annulant les probabilités de trouver les valeurs paires de m . C'est ce qu'exprime dans ce cas particulier la formule (2-30). Ce raisonnement logique, mais qualitatif est formalisé de façon quantitative par le théorème de Bayes (1763) sur les probabilités conditionnelles.

Remarque: l'argument de logique classique utilisé ici ne tient pas compte des cohérences entre états m et s'appliquerait tout aussi bien à un état initial dans un mélange statistique. Dans le cas traité ici (état initial pur), les cohérences entre états de m pair ou impair ne sont pas affectées par la mesure POVM (voir eq. 2.29).

Mesure POVM et Loi de Bayes (suite)

Considérons le système J+A dans un état donné. On appelle $p(m)$ la probabilité de trouver le résultat m dans une mesure projective de J_z , $p(j)$ la probabilité de trouver le résultat j dans une mesure projective de $\sigma_z^{(A)}$, et $p(j,m)$ la *probabilité jointe* de trouver le résultat j en mesurant A *et* d'avoir le résultat m en mesurant J. On définit de même par $p(j|m)$ et $p(m|j)$ les *probabilités conditionnelles* réciproques d'obtenir le résultat j sur la mesure de A *à condition* que J soit dans l'état m et d'obtenir le résultat m sur la mesure de J *à condition* que A soit trouvé dans l'état j . Par définition de ces probabilités, on peut exprimer la probabilité jointe de deux façons équivalentes:

$$p(j,m) = p(j|m)p(m) = p(m|j)p(j) \quad (2-32)$$

ce qui permet de relier les probabilités conditionnelles inverses par le théorème de Bayes:

$$p(m|j) = p(m) \frac{p(j|m)}{p(j)} = p(m) \frac{p(j|m)}{\sum_m p(j|m)p(m)} \quad (2-33)$$

On retrouve par cet argument de logique classique la formule (2-30) en remarquant que $p(j|m) = \cos^2 \left[\frac{(m\varphi - j\pi)}{2} \right]$.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London (1763).

LII. *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, M. A. and F. R. S.*

Dear Sir,

Read Dec. 23, 1763. I now send you an essay which I have found among the papers of our deceased friend Mr. Bayes, and which, in my opinion, has great merit, and well deserves to be preserved. Experimental philosophy, you will find, is nearly interested in the subject of it; and on this account there seems to be particular reason for thinking that a communication of it to the Royal Society cannot be improper.

He had, you know, the honour of being a member of that illustrious Society, and was much esteemed by many as a very able mathematician. In an introduction which he has writ to this Essay, he says, that his design at first in thinking on the subject of it was, to find out a method by which we might judge concerning the probability that an event has to happen, in given circumstances, upon supposition that we know nothing concerning it but that, under the same circumstances, it has happened a certain number of times, and failed a certain other number of times. He adds, that he soon perceived that it would not be very difficult to do this, provided some rule could be found, according to which we ought to estimate the chance that the probability for the happening of an event perfectly unknown, should lie between any two named degrees of probability, antecedently to any experiments made about it; and that it appeared

Caractère non-intuitif de l'inférence Bayésienne en probabilités classiques: jeu des 3 portes

1	2	3
---	---	---

Alice doit deviner derrière laquelle des trois portes se trouve un prix. Après qu'elle a choisi une porte (par ex la n°1), Bob (qui mène le jeu) ouvre une des deux portes restantes qui ne cache pas le prix. Alice a-t-elle intérêt à modifier son choix initial?

Probabilités a priori que les portes cachent le trésor: $P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$ (2-34)

Probabilités que Bob ouvre les portes 2 ou 3 après qu'Alice a choisi la porte 1, conditionnée à la position du trésor:

$$\begin{aligned} P(B2|1) &= P(B3|1) = 1/2 & (2-35a) \\ P(B2|2) &= 0; P(B3|2) = 1 & (2-35b) \\ P(B2|3) &= 1; P(B3|3) = 0 & (2-35c) \end{aligned}$$

Supposons que Bob ouvre 3. Probabilités que le trésor soit caché par 1 ou 2?

Bayes
$$P(n | B3) = P(n) \frac{P(B3 | n)}{\sum_n P(B3 | n)P(n)} \rightarrow \frac{P(2 | B3)}{P(1 | B3)} = \frac{P(B3 | 2)}{P(B3 | 1)} = 2$$
 (2-36)

Alice double ses chances de gagner en changeant son choix initial

S'il y a N portes et que Bob ouvre une porte après le choix initial d'Alice, on montre de même que celle-ci, en modifiant son choix initial, augmente sa probabilité de gagner par le facteur (N-1)/(N-2).

Autre exemple du caractère non intuitif de la loi de Bayes en probabilités classiques: intérêt d'un test médical de dépistage

Deux possibilités : sain (s) ou malade (m): $p(s) + p(m) = 1$

Test positif (+) ou négatif (-): $p(+)+p(-) = 1$

Probabilité conditionnelle: $p(+|s)$ faux positif

$p(-|m)$ faux négatif

Supposons le test d'excellente qualité, tel que $p(+|m)=1$ et $p(+|s) = \varepsilon \ll 1$. La faible probabilité de faux positif semble indiquer qu'une personne testée positive est quasi sûre d'être malade. Est-ce si sûr?

Quelle est la probabilité qu'un positif soit sain?

$$p(s|+) = p(s) \frac{p(+|s)}{p(+)} = p(s) \frac{p(+|s)}{p(+|s)p(s) + p(+|m)p(m)} \quad (2-37) \quad \text{Bayes}$$

Si la prévalence de la maladie est faible ($p(s) \sim 1$ et $p(m) \ll 1$), on a:

$$p(s|+) \approx \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(m)} \quad (2-38)$$

si $\varepsilon \geq p(m) \rightarrow p(s|+) > 0.5$ Une personne testée positive est probablement saine!

Pour qu'un test soit valable il faut que la probabilité de faux positif soit beaucoup plus faible que la prévalence de la maladie.

D'une mesure POVM à une mesure projective

Au lieu d'un qubit unique A , couplons maintenant J à n qubits identiques a_i .
On choisit^(*) le Hamiltonien de couplage entre J et les a_i :

$$H_{J-\{a_i\}} = \frac{g}{2} \sum_i (J_z + J) \cdot \sigma_x^i \quad (2-39)$$

On prépare le système $J-\{a_i\}$ dans l'état initial:

$$|\Psi\rangle_J \otimes |0,0\dots 0\rangle = \sum_m c_m |m\rangle \otimes |0,0\dots 0\rangle \quad (2-40)$$

Sous l'effet du couplage pendant le temps $t=\varphi/g$, cet état devient:

$$|\Psi\rangle_J \otimes |0,0\dots 0\rangle \rightarrow \sum_m c_m |m\rangle \otimes \prod_i \left[\cos \frac{(m+J)\varphi}{2} |0\rangle_i - i \sin \frac{(m+J)\varphi}{2} |1\rangle_i \right] \quad (2-41)$$

L'ensemble des $\{a_i\}$ est intriqué avec J . A chaque valeur de m , il correspond un état cohérent des $\{a_i\}$, associé à un super vecteur de Bloch aligné le long de la direction $(m+J)\varphi$. Lorsque $n \rightarrow \infty$, le système $\{a_i\}$ devient une « flèche » classique et mesurer la direction du vecteur associé revient à une mesure de J_z (voir Leçon 1). Pour mesurer φ , on peut faire la tomographie de l'ensemble des n qubits (page suivante).

(*)En remplaçant J_z par J_z+J dans l'expression du couplage, on translate la rotation des qubits de l'intervalle $[-J\varphi,+J\varphi]$ à $[0, 2J\varphi]$ ce qui, sans être un changement essentiel, simplifie l'analyse de la mesure.

Mesure tomographique de l'état des bits $\{a_i\}$

$$\sum_m c_m |m\rangle \otimes \prod_i \left[\cos \frac{(m+J)\varphi}{2} |0\rangle_i - i \sin \frac{(m+J)\varphi}{2} |1\rangle_i \right]$$

n qubits tous dans le même état et intriqués à (J)

On choisit $\varphi = \frac{\pi}{2J}$ pour que les $2J+1$ angles $(m+J)\varphi$ couvrent l'intervalle $[0, \pi]$

On mesure σ_z indépendamment sur les n qubits. On obtient p fois $j=0$ et $n-p$ fois $j=1$. On en déduit:

$$\langle \sigma_z \rangle^{(n)} = \frac{p - (n - p)}{n} = 2 \frac{p}{n} - 1 \quad (2 - 42)$$

À la limite $n \rightarrow \infty$, $\langle \sigma_z \rangle^{(n)} \rightarrow \langle \sigma_z \rangle = \cos^2[(m+J)\varphi/2] - \sin^2[(m+J)\varphi/2] = 2\cos^2[(m+J)\varphi/2] - 1$, soit:

$$m + J = \frac{2}{\varphi} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arc cos} \left[\sqrt{\frac{p}{n}} \right] \quad (2 - 43)$$

La répétition un grand nombre de fois de la même mesure POVM bivaluée $j=0/1$ finit par déterminer m et correspond à une mesure idéale de J_z .

Approche équivalente: calcul de la distribution finale des valeurs de m

Un résultat $j=0$ multiplie la distribution des valeurs de m par $\cos^2(m+J)\varphi/2$, un résultat $j=1$ par $\sin^2(m+J)\varphi/2$. Après p mesures $j=0$ et $n-p$ mesures $j=1$, la distribution devient:

$$\Pi(m) = \frac{|c_m|^2 f(m+J)}{\sum_m |c_m|^2 f(m+J)} \quad (2-44) \quad \text{avec:} \quad f(m+J) = \cos^{2p} \frac{(m+J)\varphi}{2} \sin^{2(n-p)} \frac{(m+J)\varphi}{2} \quad (2-45)$$

Montrons que cette distribution tend pour n grand vers une fonction étroite piquée sur une valeur de m . Commençons par trois cas particuliers.

$p=n$

$$f(m+J) = \cos^{2n} \frac{(m+J)\varphi}{2} \approx \left[1 - \frac{(m+J)^2 \varphi^2}{8} \right]^{2n} \approx 1 - \frac{n(m+J)^2 \varphi^2}{4} \approx e^{-n(m+J)^2 \varphi^2 / 4}$$

Pic centré en $m=-J$ de largeur $\delta m = \frac{1}{\varphi\sqrt{2n}} = \frac{J\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}$

$p=0$

$$f(m+J) = \sin^{2n} \frac{(m+J)\varphi}{2} = \cos^{2n} \frac{(m+J)\varphi - \pi}{2} \approx e^{-n[(m+J)\varphi - \pi]^2 / 4}$$

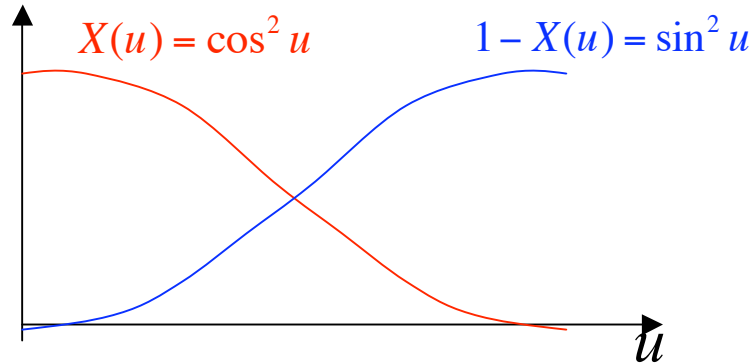
Pic centré en $m=+J$ de largeur $\delta m = \frac{1}{\varphi\sqrt{2n}} = \frac{J\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}$

$p=n/2$

$$f(m+J) = \cos^n \frac{(m+J)\varphi}{2} \sin^n \frac{(m+J)\varphi}{2} = \frac{1}{2^n} \sin^n [(m+J)\varphi] = \frac{1}{2^n} \cos^n \left[(m+J)\varphi - \frac{\pi}{2} \right] \approx \frac{1}{2^n} e^{-n \left[(m+J)\varphi - \frac{\pi}{2} \right]^2 / 2}$$

Pic centré en $m=0$ de largeur $\delta m = \frac{2J}{\pi\sqrt{n}}$

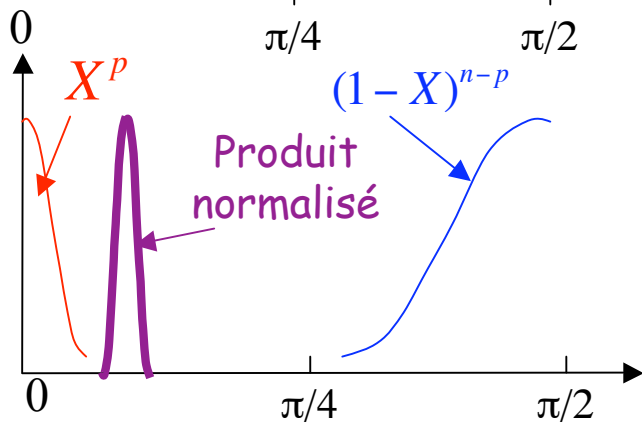
Une propriété remarquable des produits de puissances de fonctions sinus et cosinus



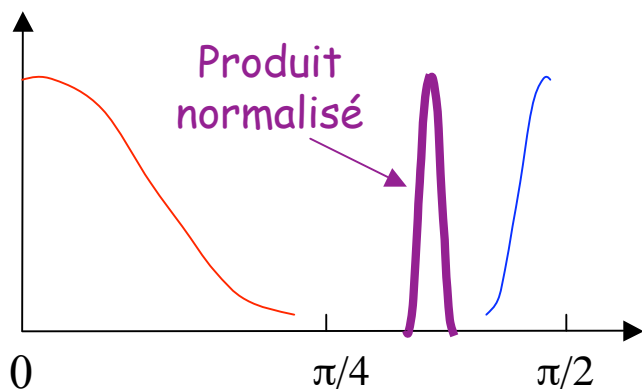
$$f(m+J) = \cos^{2p} \frac{(m+J)\varphi}{2} \sin^{2(n-p)} \frac{(m+J)\varphi}{2}$$

$$= X^p(u) [1 - X(u)]^{n-p}$$

$$u = \frac{(m+J)\varphi}{2} = \frac{m+J}{4J} \pi \quad ; \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$



Si $p > n/2$, on a $p > n-p$ et le produit des cosinus, centré en $u=0$ est plus étroit que le produit des sinus, centré en $u = \pi/2$: le produit $X^p(1-X)^{n-p}$ est piqué en u_{\max} tel que $\cos(u_{\max}) = (p/n)^{1/2} > 1/\sqrt{2}$, et $0 < u_{\max} < \pi/4$.



Si $p < n/2$, on a $p < n-p$ et le produit des cosinus, centré en $u=0$ est plus large que le produit des sinus, centré en $u = \pi/2$: le produit $X^p(1-X)^{n-p}$ est piqué en u_{\max} tel que $\cos(u_{\max}) = (p/n)^{1/2} < 1/\sqrt{2}$, et $\pi/4 < u_{\max} < \pi/2$.

Evaluation de la distribution finale des m

La distribution finale des valeurs de m est déterminée par le produit $f(m+J)$, qui, après changement de notation s'écrit:

$$f(m+J) = \cos^{2p} \frac{(m+J)\varphi}{2} \sin^{2(n-p)} \frac{(m+J)\varphi}{2} = X^p(u) [1 - X(u)]^{n-p} \quad ; \quad X(u) = \cos^2(u), \quad u = \frac{(m+J)\varphi}{2} \quad (2-46)$$

Le maximum de ce produit est atteint pour la valeur de m qui annule sa dérivée:

$$\frac{d}{dm} f(m+J) = \frac{\varphi}{2} \frac{dX}{du} X^{p-1} (1-X)^{n-p-1} [p - nX] \quad (2-47)$$

soit:

$$\frac{d}{dm} f(m+J) = 0 \rightarrow X_{\max} = \cos^2 \left(\frac{(m_{\max} + J)\varphi}{2} \right) = \frac{p}{n} \Rightarrow m_{\max} + J = \frac{2}{\varphi} \text{Arc cos} \left[\sqrt{\frac{p}{n}} \right] \quad (2-48)$$

ce qui correspond au résultat déjà trouvé plus haut (eq. 2-43). Nous allons évaluer à présent la largeur de la distribution en m autour de m_{\max} en calculant la dérivée seconde de $f(m+J)$.

Distribution finale des m (suite)

De l'expression de la dérivée seconde en $m = m_{\max}$:

$$\frac{d^2}{dm^2} f(m+J)_{m=m_{\max}} = -n \frac{\varphi^2}{4} \left(\frac{dX}{du} \right)^2 X^{p-1} (1-X)^{n-p-1} = -n\varphi^2 X^p (1-X)^{n-p} = -n\varphi^2 f(m_{\max} + J) \quad (2-49)$$

on déduit le développement de Taylor de la distribution de m au voisinage de son maximum et son expression analytique approchée:

$$f(m+J) = f(m_{\max} + J) + \frac{(m - m_{\max})^2}{2} \frac{d^2}{dm^2} f(m+J)_{m=m_{\max}} = f(m_{\max} + J) \left[1 - \frac{n\varphi^2 (m - m_{\max})^2}{2} \right] \approx f(m_{\max} + J) e^{-n\varphi^2 (m - m_{\max})^2 / 2} \quad (2-50)$$

La distribution est quasi-gaussienne avec une largeur:

$$\delta m = \frac{1}{\varphi\sqrt{n}} = \frac{2J}{\pi\sqrt{n}} \quad (2-51)$$

et la mesure est résolue si:

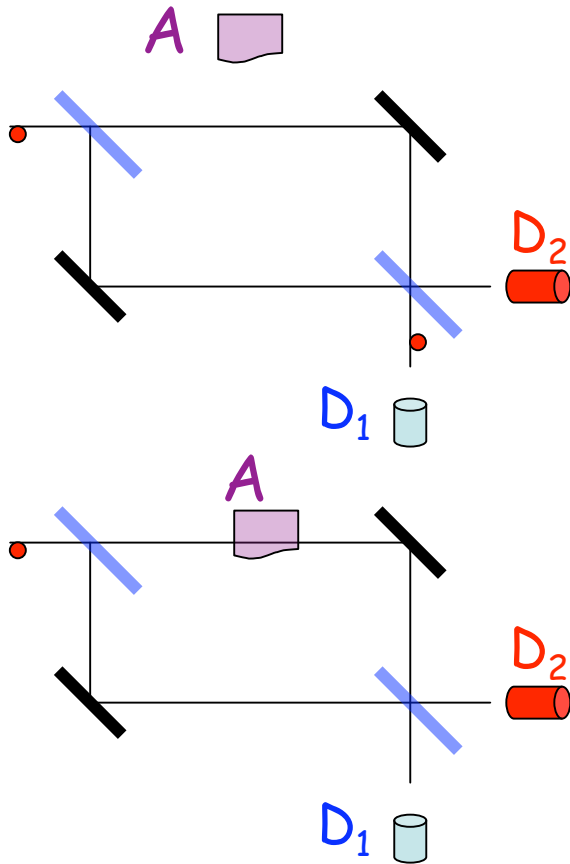
$$\delta m < 1 \quad \rightarrow \quad n > \frac{4J^2}{\pi^2} \quad (2-52)$$

Quand l'information est extraite indépendamment par les différents qubits, le nombre de qubits doit être de l'ordre du carré de la dimension de l'espace du système mesuré. Nous verrons dans les prochaines leçons qu'il existe des stratégies plus efficaces, dans lesquelles les observables mesurées sur les qubits successifs sont conditionnées aux résultats des mesures antérieures.

Mesures «sans interaction»?

Peut-on détecter la présence d'un objet absorbant A dans un faisceau lumineux sans qu'il absorbe un seul photon? Voir références à la fin de la leçon.

A est placé soit à l'extérieur, soit dans un des bras d'un interféromètre Mach Zehnder (MZ). On envoie un photon dans l'appareil. Les détecteurs sont parfaits.



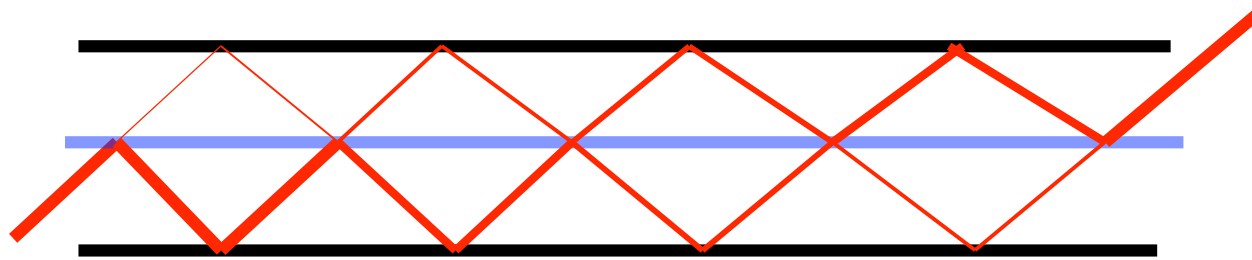
On règle le MZ pour que le photon sorte avec la probabilité 1 dans la voie D_1 lorsque les deux chemins sont indiscernables (A à l'extérieur).

Si on place A dans un des bras, les deux voies deviennent distinguables. Le photon est bloqué avec une probabilité de 50%. Il a une probabilité de 50% de passer par l'autre voie, et la lame de sortie l'envoie alors à probabilités égales vers D_1 ou D_2 . **Un clic de D_2 implique que A est dans le bras (Bayes). Un clic de D_1 n'apporte aucune information. Le clic de D_2 détecte donc A sans qu'il y ait eu absorption d'un seul photon!**

A est détecté avec une probabilité 50% par absorption (absence de clics de D_1 **et** D_2), à 25% sans absorption (clic D_2). Il y a incertitude dans 25% des cas (clic D_1).

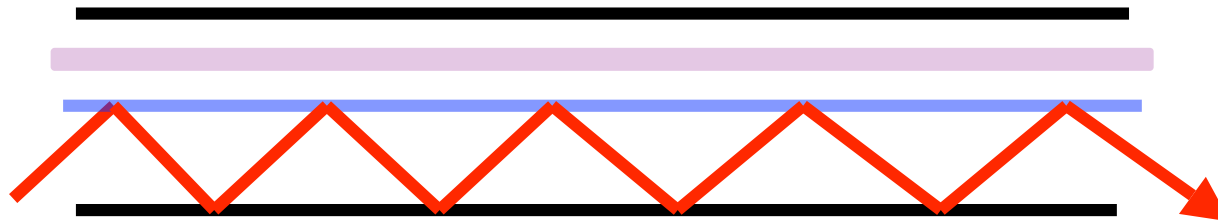
Le rendement de la détection sans absorption peut être rendu arbitrairement proche de l'unité (page suivante).

Mesure 'sans interaction' avec MZs en série



Proposé par Kwiat
et al ,PRL 74, 4763
(1995).

On remplace le MZ par N MZs 'en série' (figure), formé de deux miroirs et d'une lame séparatrice, qui réfléchit avec une probabilité $R = \cos^2\left(\frac{\pi}{2N}\right)$. En absence d'objet absorbant A, l'onde réfléchie est progressivement atténuée dans la partie inférieure de l'interféromètre alors que l'onde transmise dans la partie supérieure est amplifiée. Après N interactions avec la séparatrice, toute l'onde est transmise dans la partie supérieure. Si on envoie un photon unique à travers le dispositif, il sort avec probabilité unité vers le haut (voir page suivante).

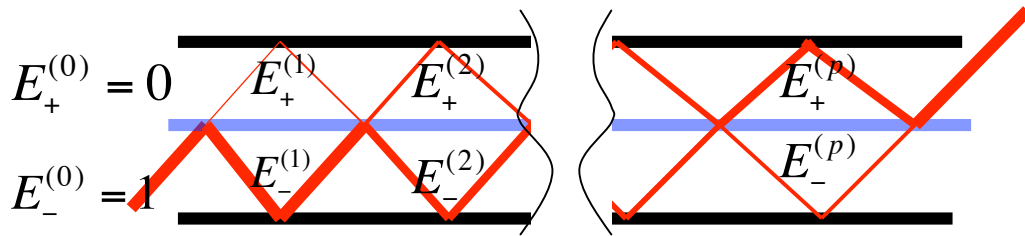


On place une **lame absorbante A** dans la partie supérieure. Si le photon n'est pas absorbé, il a, parmi tous les chemins possibles, nécessairement suivi celui du bas, avec la probabilité:

$$P_N = \cos^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right) \approx \left[1 - \frac{\pi^2}{8N^2}\right]^{2N} = 1 - \frac{\pi^2}{4N} + O(N^2) \quad (2-53)$$

qui tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$. La présence de **A** dans la partie supérieure de l'appareil empêche la croissance de l'onde de probabilité transmise. L'analogie de (2-53) avec les formules de l'effet Zenon (eqs. 1-8 et 1-10) est discutée plus bas. Une variante de l'expérience utilise un autre type d'interféromètre (Michelson) avec des photons polarisés (voir plus loin).

Oscillation du champ entre les deux modes de l'interféromètre avec 'MZs en série'



Transfert à chaque traversée de la lame séparatrice (amplitudes):

$$\begin{pmatrix} E_+^{(p)} \\ E_-^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) & i \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_+^{(p-1)} \\ E_-^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad (2-54)$$

Matrice de transfert unitaire:

$$U = i \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) I + \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \sigma_x \quad (2-55)$$

Valeurs et vecteurs propres de U:

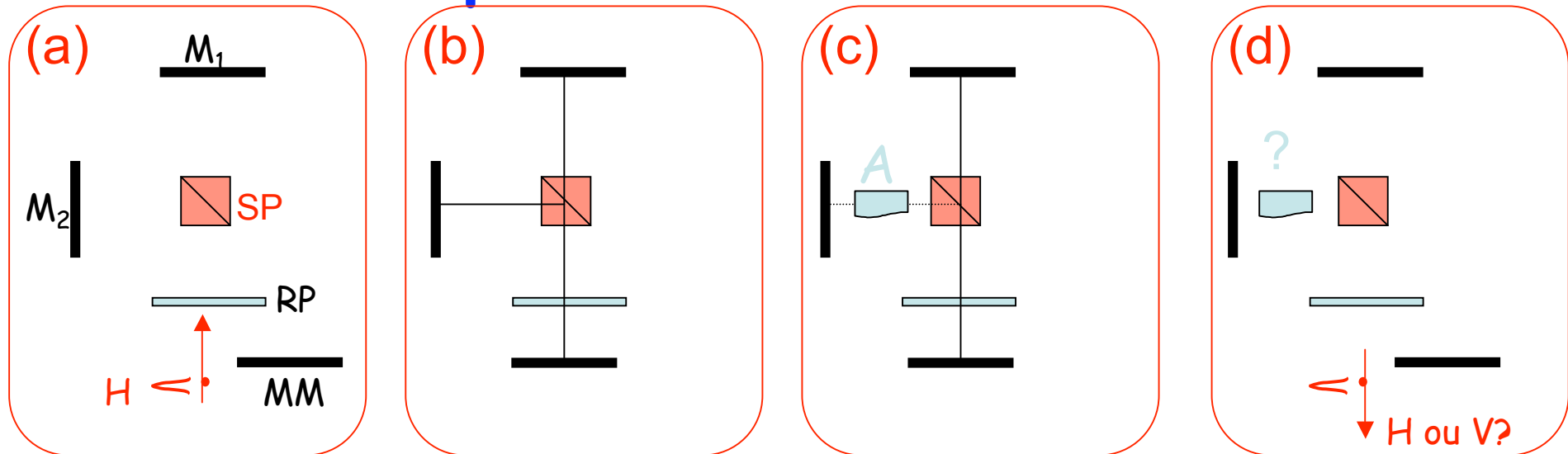
$$\varepsilon_{\pm} = i \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) \pm \sin\frac{\pi}{2N} = ie^{\mp i \frac{\pi}{2N}} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad (2-56)$$

D'où, l'évolution du champ initial ($E_+^{(0)}=0$, $E_-^{(0)}=1$) après p itérations:

$$U^p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{U^p}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{i^p}{2} \left[e^{-\frac{ip\pi}{2N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{\frac{ip\pi}{2N}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = i^p \begin{pmatrix} -i \sin\left[\frac{p\pi}{2N}\right] \\ \cos\left[\frac{p\pi}{2N}\right] \end{pmatrix} \quad (2-57)$$

**L'amplitude du champ oscille entre les deux modes.
Après N interactions avec la séparatrice, le champ est entièrement transmis ($E_-^{(N)}=0$).**

Autre exemple de mesure 'sans interaction'



- (a) Un interféromètre Michelson M est formé de deux miroirs M_1 et M_2 et d'une séparatrice polarisante SP qui transmet (resp. réfléchit) les photons polarisés horizontalement H (resp. verticalement V). Un miroir mobile MM laisse entrer un photon polarisé H, l'emprisonnant dans M pour N cycles. Une lame rotatrice RP fait tourner la polarisation de $\pi/2N$ par cycle.
- (b) Si M est vide, la composante V du photon est à chaque cycle réfléchi vers M_2 , la composante H transmise vers M_1 . Après retour sur SP, V et H se recombinent en phase, le photon se propage vers MM et retransverse 2 fois RP. A chaque cycle la polarisation tourne de $\pi/2N$ et après N cycles le photon est polarisé V.
- (c) Si le bras horizontal contient un objet absorbant A et si le photon n'est pas absorbé, le champ suit nécessairement le chemin qui correspond à chaque cycle à une transmission de SP vers M_1 . La probabilité de ce chemin est $\cos^{2N}(\pi/2N) \sim 1 - \pi^2/4N$ et tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$.
- (d) Après N cycles, MM est retiré et le photon s'échappe, polarisé H si A est absent, V si A est présent. A, qui n'a presque pas absorbé, est détecté avec quasi certitude. Analogie de cette version de l'expérience avec l'effet Zenon de polarisation (1^{ère} leçon). Cette expérience est décrite par Kwiat et al (Scientific American) et Kwiat (Physica Scripta) (voir refs à la fin).

Interaction ou non? Absorption ou pas?

L'expression «**sans interaction**» est abusive. A interagit dans toutes les versions de l'expérience avec le mode du champ. Même si la probabilité d'absorption du photon est petite, l'état du champ est modifié par le couplage à A . Le caractère étonnant de cette expérience provient des propriétés intrinsèquement quantiques de l'interférence à une particule.

Pour approfondir l'analogie avec l'effet Zenon, considérons un paquet d'onde à un photon se propageant dans l'interféromètre 'MZ en série' (voir 2 pages plus haut). En l'absence de A , l'état du paquet après p collisions avec la séparatrice s'écrit sous la forme déduite de la relation classique (2-57):

$$|\Psi_p\rangle = -i \sin\left(\frac{p\pi}{2N}\right)|0,1\rangle + \cos\left(\frac{p\pi}{2N}\right)|1,0\rangle \quad (2-58)$$

où sont indiqués dans chaque ket le nombre (0 ou 1) de photons dans les parties inférieure et supérieure de l'interféromètre. Le champ oscille entre les états $|1,0\rangle$ (photon «en bas») et $|0,1\rangle$ (photon «en haut»), rappelant l'oscillation de Rabi (eq. (1-7)). L'objet A inséré dans la partie supérieure du MZ, joue le rôle d'un détecteur, que l'on peut modéliser en lui attribuant deux états $|A_g\rangle$ (fondamental) et $|A_e\rangle$ (excité). Après la 1^{ère} collision avec la séparatrice, le couplage avec A réalise la transformation très rapide:

$$\left[-i \sin(\pi / 2N)|0,1\rangle + \cos(\pi / 2N)|1,0\rangle\right] \otimes |A_g\rangle \rightarrow -i \sin(\pi / 2N)|0,0\rangle \otimes |A_e\rangle + \cos(\pi / 2N)|1,0\rangle \otimes |A_g\rangle \quad (2-59)$$

Comme on n'observe pas A , l'état final du champ est décrit par l'opérateur densité tracé sur A :

$$\rho = \sin^2(\pi / 2N)|0,0\rangle\langle 0,0| + \cos^2(\pi / 2N)|1,0\rangle\langle 1,0| \quad (2-60)$$

La composante $|0,0\rangle$ (vide) n'évolue plus dans les collisions ultérieures et ne contribue pas au signal. L'autre composante, $|1,0\rangle$, est l'état initial, obtenu avec la probabilité $\cos^2(\pi/2N)$. Chacune des collisions et couplage à A qui suivent re-préparent avec la même probabilité le champ dans l'état initial, le figeant dans cet état avec la probabilité finale $\cos^{2N}(\pi/2N)$, comme dans l'effet Zenon. **Cette analyse montre que l'absorption, même si elle a une probabilité faible, est essentielle.** C'est parce que A fait disparaître très efficacement tout photon apparaissant dans le «haut» du MZ que le champ est constamment reprojété dans l'état initial.

Conclusion de la deuxième leçon

Nous avons passé en revue différents types de mesures généralisées en physique quantique et introduit la notion de POVM, qui correspond à une mesure projective réalisée sur un système auxiliaire couplé au système étudié. Nous avons vu comment l'acquisition d'information par POVM s'apparentait à un processus de Bayes classique. Nous avons également introduit un modèle intéressant de mesure dans lequel le système (représenté par un moment angulaire) est couplé à un ou plusieurs qubits indépendants, chaque couplage correspondant à un POVM permettant d'extraire une information partielle sur le système. Nous avons vu comment l'accumulation de ces mesures POVM conduisait à une mesure projective du système. Ce modèle nous servira dans la suite du cours lorsque nous étudierons la détection non destructive de photons par un ensemble d'atomes à deux niveaux.

L'analyse des mesures interférométriques dites «sans interactions» a aussi été instructive. Elle nous a montré la puissance - et le caractère non intuitif- des méthodes interférométriques comme moyen d'acquisition d'information et de mesure. Nous avons vu aussi que malgré leur nom, ces méthodes reposent sur un couplage absorptif entre le système mesuré et l'appareil de mesure. Nous verrons une situation analogue en Cavity QED, où un atome placé dans une cavité peut, avec une probabilité d'absorption arbitrairement faible, contrôler la transmission d'un champ contenant un grand nombre de photons. Dans les expériences décrites plus haut, le photon fait partie de l'appareil de détection. Nous allons voir dans la suite une situation opposée où le photon est l'objet mesuré et où le processus de mesure ne repose pas sur un processus absorptif résonnant.

Quelques références sur les mesures dites « sans interaction »:

Elitzur et Vaidman, *Foundations of Physics*, 23, 987 (1993)

«Quantum seeing in the dark», Kwiat, Weinfurter et Zeilinger, *Scientific American*, Nov 1996.

Kwiat, Weinfurter, Herzog, Zeilinger and Kasevich, *Phys.Rev.Lett.* 74, 4763 (1995).

Kwiat, *Physica Scripta*, T76, 115 (1998)