

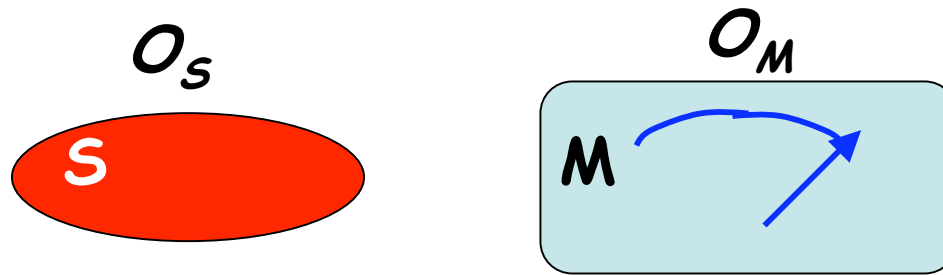
Cours 2007-2008: Troisième Leçon

4 Février 2008

Mesures quantiques non-destructives (QND) en optique

Leçon d'introduction sur les mesures QND du champ électromagnétique. Le but est de mesurer une observable du champ sans la perturber de façon à pouvoir répéter la mesure et retrouver le même résultat dans une mesure ultérieure. Il s'agit de la mesure projective d'une observable qui ne change pas entre deux détections successives sous l'effet de l'évolution Hamiltonienne. L'énergie du champ et son nombre de photons sont des observables pouvant être mesurées de façon QND, à condition d'éviter l'absorption de photons dans le détecteur. Nous présentons quelques modèles simples de mesures QND, basées soit sur la détection de la pression de radiation exercée sur un miroir (mesures opto-mécaniques), soit sur l'effet Kerr croisé dans un milieu optique non-linéaire. Nous analysons l'effet en retour de la mesure sur la phase du champ, ce qui nous conduit à définir de façon rigoureuse un opérateur de phase. L'analyse s'appuie soit sur une description des champs en terme de vecteurs d'états (ce qui est bien adapté au cas où la mesure projette le champ sur un état de Fock), soit sur une discussion en terme de bruit de photon, commode lorsque la mesure ne discrimine pas les photons individuels et que le champ apparaît comme une variable continue fluctuante. Les deux approches sont bien sûr équivalentes à la limite continue. Une liste de références sur le principe de la méthode QND et les mesures QND en optique est donnée à la fin de la leçon.

Les conditions d'une mesure QND



On mesure l'observable O_S d'un système S avec un appareil M dont l'observable détectée est O_M . Le Hamiltonien de $S+M$ contient trois termes:

$$H = H_S + H_M + H_{SM} \quad (3-1)$$

Il faut que O_M évolue sous l'effet du couplage avec S , soit:

$$[H_{SM}, O_M] \neq 0 \quad (3-2)$$

Pour être QND, la mesure ne doit pas affecter les états propres de O_S , ce qui est le cas si O_S est une constante du mouvement de l'interaction:

$$[H_{SM}, O_S] = 0 \quad (3-3)$$

Cette condition est suffisante, mais non nécessaire. Nous verrons qu'il est possible de s'en affranchir en choisissant bien le temps d'interaction entre S et M . Finalement, pour que la mesure soit répétable, O_S doit être constante du mouvement de H_S :

$$[H_S, O_S] = 0 \quad (3-4)$$

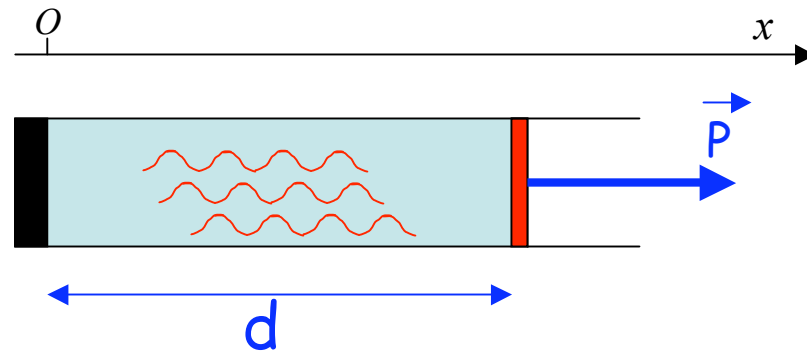
Observables QND

Une mesure projective d'une observable O_S constante du mouvement de S (satisfaisant l'équation (3-4)) est, par définition, une mesure QND. Elle projette le système dans un état propre de O_S qui n'évolue pas entre deux mesures: le résultat reste inchangé, tant que le système n'est pas perturbé. Le caractère QND est ainsi réservé aux constantes du mouvement de S . Le Hamiltonien H_S est donc lui même une observable QND. Dans le cas de la lumière, l'énergie du champ dans un mode et le nombre de photons sont des observables qui peuvent être mesurées de façon non destructive.

Pour une particule libre de hamiltonien $H_S = P^2/2M$, l'impulsion P est une observable QND, mais pas la position X . Cet opérateur ne commute pas avec H_S . Après une mesure de la position, l'impulsion (donc la vitesse) est complètement indéterminée. Une répétition de la mesure de position après un temps fini ne donnera en général pas le même résultat.

Pour un oscillateur harmonique ($H_S = P^2/2M + M\Omega^2 X^2/2$), ni X ni P , ni les quadratures combinaisons de X et P ne sont strictement QND. On peut cependant définir des observables QND en effectuant des mesures répétées avec la périodicité de l'oscillateur (analogie avec la stroboscopie). Il en est de même pour un mode du champ électromagnétique.

Un modèle mécanique simple de mesure QND du nombre de photons



Cavité cylindrique fermée par un piston mobile le long de Ox . Le champ est dans un mode stationnaire d'axe horizontal. Le piston et le miroir opposé sont réflecteurs parfaits. La durée de vie du champ dans la cavité est très longue devant le temps de mesure (perte de photons négligeable). Le système S est le mode dans la cavité de longueur d (fréquence angulaire du champ ω). O_S est l'opérateur nombre de photons N . Le mètre M est le piston mobile dont l'observable O_M est l'impulsion P (observable conjuguée: position X).

Modèle idéal très loin de la réalité physique qui doit prendre en compte l'amortissement du champ.

Interaction entre S et M produite par la pression du rayonnement sur le piston

La force f exercée par le rayonnement sur le piston est due à l'échange d'impulsion avec les photons. Chaque photon rebondit $c/2d$ fois par seconde en cédant une impulsion $2\hbar\omega/c$. D'où:

$$f = \frac{N\hbar\omega}{d} \quad (3-5)$$

On en déduit l'équation du mouvement de P (impulsion du piston):

$$\frac{dP}{dt} = \frac{N\hbar\omega}{d} \quad (3-6)$$

qui dérive du hamiltonien d'interaction:

$$H_{SM} = -\frac{\hbar\omega}{d}NX \quad (3-7)$$

Les conditions QND sont bien satisfaites: H_{SM} commute avec l'observable QND mesurée N . Dépendant de X , il ne commute pas avec l'observable du mètre P et de l'information est ainsi transférée de N vers P au cours de la mesure.

Analyse semi-classique de la mesure QND du nombre de photons

Après un temps de mesure τ , l'impulsion du piston a varié de:

$$\delta P = N \frac{\hbar \omega \tau}{d} \quad (3-8)$$

Pour être détectable, cette variation doit être au moins égale à l'incertitude initiale ΔP_0 sur l'impulsion. L'incertitude sur le nombre de photons mesuré est donc, après un temps τ :

$$\Delta N = \frac{d}{\hbar \omega \tau} \Delta P_0 \quad (3-9)$$

Cette incertitude peut en principe être rendue aussi petite que l'on veut, en particulier $\Delta N \ll 1$, en choisissant τ assez long.

Ce modèle reste très théorique car il néglige l'amortissement du champ et ne précise pas comment on mesure l'impulsion du piston. Nous décrirons plus loin un système opto-mécanique plus réaliste. Nous pouvons cependant utiliser ce modèle très simple pour montrer que la mesure QND du nombre de photons a une action en retour sur la phase du champ mesuré.

Effet de la mesure QND du nombre de photon sur la phase du champ

Au fur et à mesure que N est précisé, la phase du champ (variable conjuguée) doit être brouillée. Comment cela apparaît-il dans notre modèle? Le déplacement du piston entraîne un glissement de fréquence du champ:

$$\Delta\omega = -\omega \frac{\Delta x}{d} \quad (3-10)$$

On peut le comprendre soit comme le résultat, à nombre de photon invariant, du travail du piston sur le champ, soit comme une modification de la longueur d'onde du champ entraînée par le déplacement des parois.

Le déplacement classique du piston peut être rendu arbitrairement petit (en augmentant sa masse M par exemple), mais il existe toujours une incertitude ΔX_0 - indépendante de M - liée à l'incertitude initiale ΔP_0 sur P . Après le temps de mesure τ , cette incertitude se traduit par une incertitude sur la phase du champ:

$$\Delta\varphi = \omega\tau \frac{\Delta X_0}{d} \quad (3-11)$$

Soit, en tenant compte de l'eq. (3-9):

$$\Delta\varphi\Delta N = \left[\omega\tau \frac{\Delta X_0}{d} \right] \left[\frac{d}{\hbar\omega\tau} \Delta P_0 \right] = \frac{\Delta X_0 \Delta P_0}{\hbar} \geq \frac{1}{2} \quad (3-12)$$

Les relations d'incertitude (position-impulsion) du piston entraînent celles (phase-nombre de photon) du champ mesuré.

La phase du champ comme opérateur

Le modèle semi-classique de la mesure confirme le résultat bien connu que la phase et le nombre de photons sont reliés par une relation d'incertitude à la Heisenberg. Pour formuler cette relation de façon précise dans le cadre d'une description quantique complète, il nous faut introduire un opérateur pour représenter la phase du champ, ce qui présente des difficultés techniques. Nous suivons ici l'analyse de Pegg et Barnett (Phys.Rev.A **39**, 1665 (1989)).

Pour éviter les problèmes liés aux dimensions infinies, nous tronquons le nombre de photons à une valeur $s \gg n_{\max}$, où n_{\max} est le nombre maximum de photons dont la probabilité est non-négligeable. Le champ évolue dans un espace de Hilbert de dimension $s+1$. Cet espace est sous-tendu par une infinité de bases orthogonales. L'une est celle des états de Fock $\{|n\rangle\}$ avec $n=0,1,2,\dots,s$. Introduisons la base complémentaire des $s+1$ « états de phase » ($m=0,1,2,\dots,s$):

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{i\frac{2\pi nm}{s+1}} |n\rangle \quad (3-13)$$

qui satisfait les relations d'orthonormalité et de fermeture:

$$\langle \theta_m | \theta_{m'} \rangle = \delta_{mm'} \quad ; \quad \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = I \quad (3-14)$$

Les états de Fock s'expriment dans la base $\{|\theta_m\rangle\}$ par la relation réciproque de (3-13):

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s e^{-i\frac{2\pi nm}{s+1}} |\theta_m\rangle \quad (3-15)$$

La phase du champ comme opérateur (suite)

Introduisons l'opérateur hermitique:

$$\Phi = \frac{2\pi}{s+1} \sum_{m=0}^s m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \quad ; \quad \theta_m = \frac{2\pi m}{s+1} \quad (0 \leq \theta_m < 2\pi) \quad (3-16)$$

comme «observable phase» du champ tronqué. Il admet, par définition, pour valeurs propres réelles les $s+1$ valeurs θ_m et comme états propres correspondants les états $|\theta_m\rangle$. Cette définition revient à discrétiser la phase en $s+1$ valeurs équidistantes dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, le spectre de phase devenant continu lorsque $s \rightarrow \infty$.

Le calcul du commutateur $[\Phi, N]$ se fait simplement en exprimant son action sur un état $|n\rangle$:

$$(\Phi N - N\Phi)|n\rangle = \frac{2\pi}{(s+1)^2} \sum_{m, n'} m(n-n') e^{-i\frac{2\pi m(n-n')}{s+1}} |n'\rangle \quad (3-17)$$

d'où on déduit après une sommation simple sur m :

$$\langle n | (\Phi N - N\Phi) | n \rangle = 0 \quad (3-18a)$$

$$\langle n' | (\Phi N - N\Phi) | n \rangle = \frac{2\pi}{s+1} \cdot \frac{n-n'}{e^{-i\frac{2\pi(n-n')}{s+1}} - 1} \quad (n \neq n') \quad (3-18b)$$

Si on se limite à utiliser ces relations pour des états physiques tels que $n_{\max} \ll s$, on peut effectuer un développement de (3-18b) au premier ordre en $(n-n')/(s+1)$ et on obtient:

$$[\Phi, N] \approx i \sum_{n, n'} (1 - \delta_{nn'}) |n\rangle \langle n'| = -iI + i \left(\sum_n |n\rangle \right) \left(\sum_{n'} \langle n'| \right) = -iI + i(s+1) |\theta_0\rangle \langle \theta_0| \quad (3-19)$$

L'opérateur $[\Phi, N]$ est non-diagonal dans la base $|n\rangle$, donc de trace nulle, comme il se doit pour le commutateur de 2 opérateurs dans un espace de dimension finie. Noter la différence avec le commutateur $[X, P] = i\hbar$, dont la trace est infinie (voir plus loin).

Valeur moyenne du commutateur $[\Phi, N]$ et relation d'incertitude $\Delta\Phi \cdot \Delta N$

On déduit directement de (3-19) la valeur moyenne de $[\Phi, N]$ dans un état $|\psi\rangle$ quelconque:

$$\langle \psi | [\Phi, N] | \psi \rangle = -i + i(s+1) |\langle \psi | \theta_0 \rangle|^2 \quad (3-20)$$

où:

$$|\langle \psi | \theta_0 \rangle|^2 = p(0) \quad (3-21)$$

est la probabilité que la phase soit nulle dans cet état. On passe à la limite continue en introduisant la densité de probabilité de phase $P(\theta)$ qui satisfait les relations:

$$\langle \psi | \Phi | \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \theta P(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{s+1} \sum_m \theta_m P(\theta_m) = \sum_m \theta_m p(m) \quad (3-22)$$

ce qui identifie $p(m)$ et $2\pi P(\theta_m)/(s+1)$ et permet d'écrire (3-20) sous forme indépendante de s :

$$\langle \psi | [\Phi, N] | \psi \rangle = -i + 2i\pi P_\psi(0) \quad (3-23)$$

où $P_\psi(0)$ est la densité de probabilité à $\theta=0$ de la phase du champ dans l'état $|\psi\rangle$.

Si la distribution de phase du champ est restreinte à un intervalle de largeur très inférieure à 2π , on peut toujours «éviter le bord» de l'intervalle $[0, 2\pi]$ et définir l'origine de phase telle que $P_\psi(0) \ll 1/2\pi$. Pour ces états «paquets de phase», que l'on notera $|\psi_p\rangle$, on a:

$$\langle \psi_p | [\Phi, N] | \psi_p \rangle \approx -i \quad (3-24)$$

d'où (par inégalité de Cauchy-Schwartz), la relation d'incertitude, valable seulement pour les états paquets de phase:

$$(\Delta\Phi \cdot \Delta N)_p \geq \frac{1}{2} \quad (3-25)$$

On retrouve ainsi la relation (3-12) à partir d'une définition rigoureuse de la phase quantique.

Limite de la relation d'incertitude $\Delta\Phi\Delta N$

Les représentations $\{|n\rangle\}$ et $\{|\theta_m\rangle\}$ sont reliées par transformations de Fourier discrètes (Eqs (3-13) et (3-15)), analogues aux correspondances de Fourier continues entre les représentations X et P de la position et de l'impulsion d'une particule quantique. Cette correspondance de Fourier entraîne une relation de réciprocité entre les largeurs des distributions des variables conjuguées. C'est ce qu'exprime la relation (3-25): Plus la distribution des valeurs de N est large, plus celle des valeurs de Φ est étroite et inversement.

Il faut noter cependant la limite de cette correspondance. La relation (3-25) n'est pas valable pour des états dont la phase est très étalée. En particulier pour un état de Fock $|n\rangle$, on a $P_n(0)=1/2\pi$ et on retrouve par la relation (3-23) la non diagonalité de $[N,\Phi]$ dans la base $|n\rangle$:

$$\langle n|[N,\Phi]|n\rangle = 0$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz que l'on en déduit ($\Delta N\Delta\Phi \geq 0$) est alors triviale et n'impose aucune restriction aux incertitudes sur Φ et N (on a alors $\Delta N=0$ et $\Delta\Phi = \pi/\sqrt{3}$).

Le terme «de bord» ($2i\pi P_\psi(0)$) dans (3-23) qui assure la nullité des éléments diagonaux de $[\Phi,N]$ dans la base $|n\rangle$, entraîne que la trace de cet opérateur est nulle, ce qui est (cf remarque plus haut) une propriété de tout commutateur dans un espace de dimension finie. Ceci entraîne une différence essentielle entre les commutateurs $[N,\Phi]$ et $[X,P]$. Si on peut négliger le terme de bord, le commutateur $[N,\Phi]$ s'écrit comme celui de X et P (en ne gardant que le premier terme du membre de droite dans (3-23)) et les relations d'incertitude phase-nombre de photons rappellent celles de la position et de l'impulsion. Ceci n'est valable que pour des «états paquets» à phase localisée.

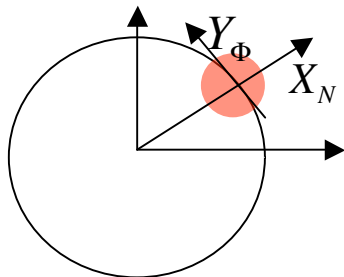
Etat cohérent: paquet d'incertitude minimale

Les états cohérents, obtenus en translatant le vide dans l'espace de phase, sont des superpositions d'états de Fock à distribution de Poisson du nombre de photons dont l'écart type est $\Delta N = \sqrt{\bar{n}}$ (où \bar{n} est le nombre moyen de photons). Dès que $\bar{n} \gg 1$ l'état est bien localisé en phase et la relation d'incertitude (3-25) s'applique. Cette relation correspond alors à la borne inférieure de l'inégalité. On le montre en remarquant qu'à la limite des grands n , la loi de Poisson est assimilable à une loi de Gauss de largeur $\sqrt{\bar{n}}$ dont la transformée de Fourier est aussi une gaussienne, de largeur $\Delta\Phi = 1/2\sqrt{\bar{n}}$. Les états cohérents sont donc des paquets d'états à incertitude minimale, analogues aux paquets d'onde gaussiens d'une particule libre. Contrairement à ce dernier cas, ces paquets ne s'étalent pas.

Lorsqu'on décrit des paquets de phase localisés, il est commode pour simplifier les notations, de renormaliser les opérateurs nombre de photons et phase sous la forme:

$$X_N = \frac{N}{\sqrt{\bar{n}}}; Y_\Phi = 2\sqrt{\bar{n}} \Phi \quad ; \quad [X_N, Y_\Phi] = 2i \quad (3-26)$$

L'incertitude $\Delta X_N = 1$ d'un état cohérent correspond à ce qu'on appelle la «limite quantique standard» (LQS). La notation X et Y adoptée dans (3-26) rappelle l'analogie avec les quadratures conjuguées d'un oscillateur (noter la différence de normalisation avec X et P en mécanique).



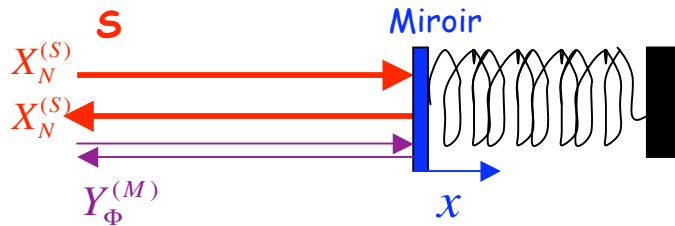
Pour un état cohérent, on appellera X_N la quadrature ayant la phase du champ et Y_Φ la quadrature conjuguée. Leurs variations reflètent celles de N et Φ . Il est (encore) impossible par mesure opto-mécanique d'obtenir pour X_N une incertitude inférieure à la LQS. Des méthodes d'optique non-linéaire ont cependant permis d'atteindre cette limite (voir plus loin).

Mesure QND en optique: analyse des fluctuations du signal

Nous avons commencé l'étude des mesures QND du rayonnement en décrivant une situation très simple: celle d'un champ stationnaire piégé dans une cavité, dont le nombre de photons est progressivement déterminé par la mesure. Le modèle opto-mécanique que nous avons présenté n'est pas réaliste dans le domaine optique, mais nous verrons que l'électrodynamique en cavité permet d'effectuer la mesure QND d'un champ micro-onde piégé dans une cavité, en atteignant la résolution des photons individuels.

Avant de décrire ces expériences dans les leçons suivantes, nous allons passer rapidement en revue d'autres mesures QND en optique, qui ont précédé nos expériences. Dans ces mesures optiques, les champs ne sont pas stationnaires dans une cavité, mais se propagent librement (faisceaux laser). La description des mesures QND sur ces champs utilise le formalisme de l'optique quantique: développement des champs en modes, introduction des opérateurs de création et d'annihilation et des quadratures du champ etc... (voir cours précédents). Les méthodes QND optiques n'ayant pas atteint la limite de résolution de quanta individuels, on traite en général l'intensité du champ comme une observable continue. Cette intensité peut s'exprimer comme le nombre moyen de photons transportés pendant le temps d'intégration de la mesure. Ce nombre présente dans un état cohérent une fluctuation standard égale à \sqrt{n} . Les critères QND adaptés à cette situation expriment que la mesure réduit cette fluctuation au dessous de cette limite standard et est répétable (corrélations entre résultats de mesures successives). Nous présentons plus bas l'analyse du bruit dans une mesure QND optique, mais nous commencerons par une description en terme d'états quantiques, peut-être plus familière. Nous nous limiterons à une analyse qualitative simple des méthodes QND optiques, en donnant à la fin des références où plus de détails pourront être trouvés.

Vers une mesure opto-mécanique QND de l'intensité d'un faisceau laser



Le faisceau signal S est réfléchi par un miroir associé à un oscillateur mécanique (mode de vibration du miroir ou levier microscopique sur lequel le miroir est collé). La pression de radiation de S exerce une force sur le miroir dont le déplacement est mesuré.

L'action en retour sur S se traduit par le déphasage $2kx$ produit par la réflexion sur le miroir déplacé. La mesure du déplacement peut se faire par la détection du déphasage produit sur un faisceau sonde M de faible intensité réfléchi sur le miroir (ce déphasage peut être mesuré par méthode homodyne). La grandeur QND est la quadrature $X_N^{(S)}$ du laser S et le «mètre» est la quadrature de phase $Y_\Phi^{(M)}$ de M .

Idéalement, on cherche à obtenir des fluctuations de $Y_\Phi^{(M)}$ et $X_N^{(S)}$ bien corrélées. On pourra mesurer ces fluctuations soit à fréquence 0 (en moyennant les signaux sur un temps d'intégration), soit à fréquence non nulle en filtrant une composante de leur spectre de bruit (le bruit de grenaille de la pression de radiation traduit l'arrivée aléatoire des photons sur le miroir). Les expériences font des progrès rapides mais sont encore au-dessus de la LQS pour le champ. Pour atteindre cette limite, il faut des miroirs microscopiques de très grand facteur Q mécanique. Il faut également refroidir ces miroirs à leur point zéro de vibration, ce qui peut également se faire en utilisant des moyens optiques (voir références à la fin du chapitre sur les expériences opto-mécaniques).

Mesures QND par effet Kerr

Les fluctuations de la lumière sont réduites sous la LQS par des mesures tout optique où le miroir est remplacé par un faisceau sonde **M** couplé à **S** par effet Kerr croisé dans un milieu non linéaire (gaz atomique proche de résonance, refs en fin de leçon).



Nous donnerons successivement deux analyses complémentaires de cette mesure QND. Les champs **S** et **M**, supposés de même fréquence, se propagent en se recouvrant sur une longueur L dans le milieu, avec les indices respectifs:

$$n_{ind}^M = 1 + \chi_1^M + \chi_2 N_S \quad ; \quad n_{ind}^S = 1 + \chi_1^S + \chi_2 N_M \quad (3-27)$$

L'effet Kerr couple l'intensité de chaque champ à la phase de l'autre. L'effet Kerr de **M** sur lui-même est négligeable (ce qu'on peut réaliser en jouant avec la polarisation des lasers et l'anisotropie du milieu Kerr). On ne tient pas compte non plus de l'effet Kerr de **S** sur lui-même, qui modifie sa distribution de phase, mais n'affecte pas celle de son nombre de photons. Appelons $|\Psi_M\rangle_0 \otimes |\Psi_S\rangle_0$ l'état du système **S+M** à la sortie du milieu, quand on fait $\chi_2=0$. Lorsqu'on tient compte de l'effet Kerr, l'état de **S+M** devient:

$$|\Psi_{M+S}(\tau)\rangle = U_M(\tau) |\Psi_M\rangle_0 \otimes |\Psi_S\rangle_0$$

$$U_M(\tau = L/c) = e^{ik_0 \chi_2 L N_M N_S} \quad (3-28)$$

k_0 : vecteur d'onde de **M** et **S**
dans le vide

Cette évolution est décrite par le Hamiltonien:

$$H_{SM} = -\hbar c k_0 n_{1M} N_M N_S \quad (3-29)$$

qui satisfait tous les critères QND

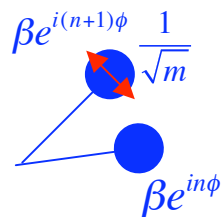
Mesure QND par effet Kerr: champ sonde dans un état cohérent de Glauber

Décrivons S et M par des états monomodes. On peut les considérer comme deux paquets d'onde de même durée τ , contenant en moyenne \bar{n} et \bar{m} photons dans leurs modes respectifs. On décompose explicitement S sur les états $|n\rangle$ (c_n : amplitude correspondant à n photons). On appelle β l'amplitude complexe du champ sonde dont l'état est noté $|\beta\rangle$. $S+M$ après la traversée du milieu Kerr est dans l'état intriqué:

$$|\Psi_{M+S}(\tau)\rangle = \sum_n c_n e^{i\phi N_M N_S} |n\rangle \otimes |\beta\rangle = \sum_n c_n |\beta e^{in\phi}\rangle \otimes |n\rangle \quad ; \quad \phi = k_0 L \chi_2 \quad (3-30)$$

Chaque nombre de photons de S est corrélé à un état cohérent de M dont la phase classique $n\phi$ porte l'empreinte de l'intensité de S . La «phase par photon» $\phi = k_0 L \chi_2$ est un paramètre sans dimension décrivant l'efficacité de l'effet Kerr dans la mesure QND. Pour distinguer les différents états n , il faut que les états de M associés à deux nombres de photons consécutifs soient quasi orthogonaux, soit:

$$\phi > \frac{1}{\sqrt{\bar{m}}} \quad (3-31)$$

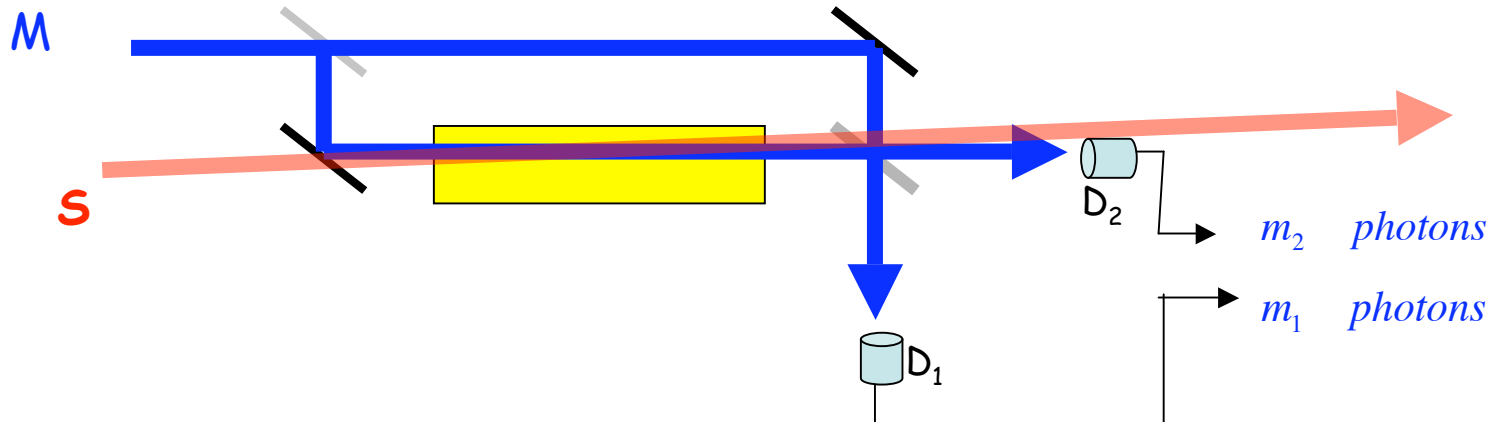


Pour projeter S sur un état comprimé, il suffit de réaliser la condition moins contraignante:

$$\phi > \frac{1}{\sqrt{\bar{m}\bar{n}}} \quad (3-32)$$

Pratiquement, ϕ peut satisfaire la condition (3-32) mais non (3-31): les mesures QND optiques sont «sous la LQS», mais ne résolvent pas les valeurs discrètes de n .

Mesure de la phase du mètre après son interaction avec le signal



Pour mesurer la phase du champ M , on la compare à celle d'un champ identique (obtenu grâce à une lame séparatrice) n'ayant pas traversé le milieu Kerr dans un dispositif Mach-Zehnder (MZ). A la sortie du MZ, les photons sont comptés dans les deux voies 1 et 2. Avant ce comptage, $S+M$ est dans l'état:

$$|\Psi_{M+S}(\tau)\rangle = \sum_n c_n \left| \beta\sqrt{2} \cos\left(\frac{n\phi}{2}\right) \right\rangle_1 \otimes \left| \beta\sqrt{2} \sin\left(\frac{n\phi}{2}\right) \right\rangle_2 \otimes |n\rangle \quad (3-33)$$

où les indices 1 et 2 repèrent les deux modes de sortie du MZ. On remarque que les modes de sortie du MZ ne sont pas intriqués (propriété fondamentale d'un état cohérent traversant une lame séparatrice- voir cours 2002-2003). L'ensemble des deux modes est cependant intriqué avec le champ signal.

Mesure de la phase du mètre après son interaction avec le signal (suite)

Le comptage des photons dans les voies de sortie du MZ donne 2 valeurs m_1 et m_2 de somme égale à $2\bar{m}$ (aux fluctuations près). La probabilité de ce résultat quand le champ sonde contient n photons est:

$$p(m_1, m_2 | n) = C \cos^{2m_1} \left(\frac{n\phi}{2} \right) \sin^{2m_2} \left(\frac{n\phi}{2} \right) \quad (3-34)$$

où C est indépendant de n . On peut (loi de Bayes, voir leçon 2) en inférer la probabilité de n photons *après* détection:

$$p(n | m_1, m_2) = \frac{|c_n|^2 \cos^{2m_1} \left(\frac{n\phi}{2} \right) \sin^{2m_2} \left(\frac{n\phi}{2} \right)}{\sum_n |c_n|^2 \cos^{2m_1} \left(\frac{n\phi}{2} \right) \sin^{2m_2} \left(\frac{n\phi}{2} \right)} \quad (3-35)$$

On voit dans (3-35) un produit de fonctions cos et sin à des puissances élevées, déjà rencontré (leçon 2). Un calcul analogue (voir eqs. (2-48) et (2-50)) donne:

$$p(n | m_1, m_2) \propto |c_n|^2 e^{-\bar{m}\phi^2(n-n_{\max})^2} \quad (3-36a); \quad \cos^2 \left(\frac{n_{\max}\phi}{2} \right) = \frac{m_1}{2\bar{m}} \quad (3-36b)$$

L'eq. (3-36a) montre que la mesure de la phase de M multiplie la distribution de n par une gaussienne centrée sur n_{\max} (donné par (3-36b)) de largeur:

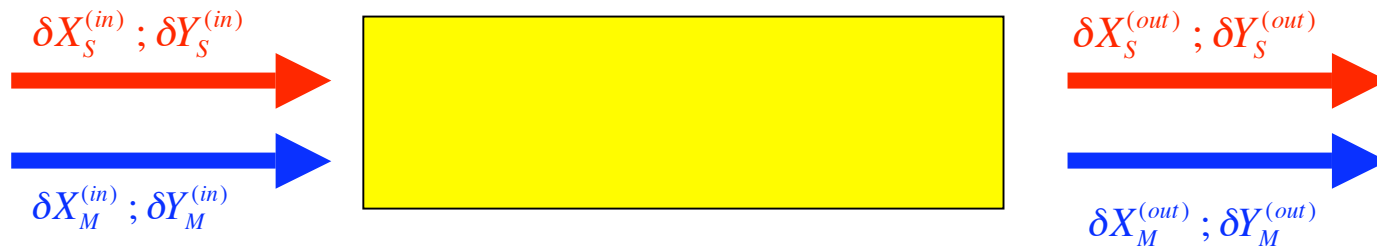
$$\delta n = \frac{1}{\phi\sqrt{2\bar{m}}} \quad (3-37)$$

On retrouve l'ordre de grandeur donné par (3-32) en remarquant que la LQS est franchie lorsque $\delta n < \sqrt{\bar{n}}$. La mesure «découpe» alors un paquet d'états n plus fin que le paquet initial.

Analyse de la mesure QND Kerr par l'étude des fluctuations des champs signal et sonde

Au lieu d'explicitier l'état quantique du champ, la plupart des analyses décrivent le signal et le mètre comme un bruit aléatoire. Les nombres de photons et la phase des deux champs fluctuent autour de leurs moyennes. Définissons les fluctuations normalisées (égales à 1 à la LQS) à l'entrée et à la sortie du milieu Kerr:

$\delta X_S^{(in)}$, $\delta X_M^{(in)}$; $\delta X_S^{(out)}$, $\delta X_M^{(out)}$ Fluctuations normalisées de l'intensité du **signal** et du **mètre** (entrée et sortie): X est la quadrature le long de l'axe correspondant à la phase du champ.
 $\delta Y_S^{(in)}$, $\delta Y_M^{(in)}$; $\delta Y_S^{(out)}$, $\delta Y_M^{(out)}$ Fluctuations normalisées des phases du **signal** et du **mètre** (entrée et sortie): Y est la quadrature conjuguée de X.



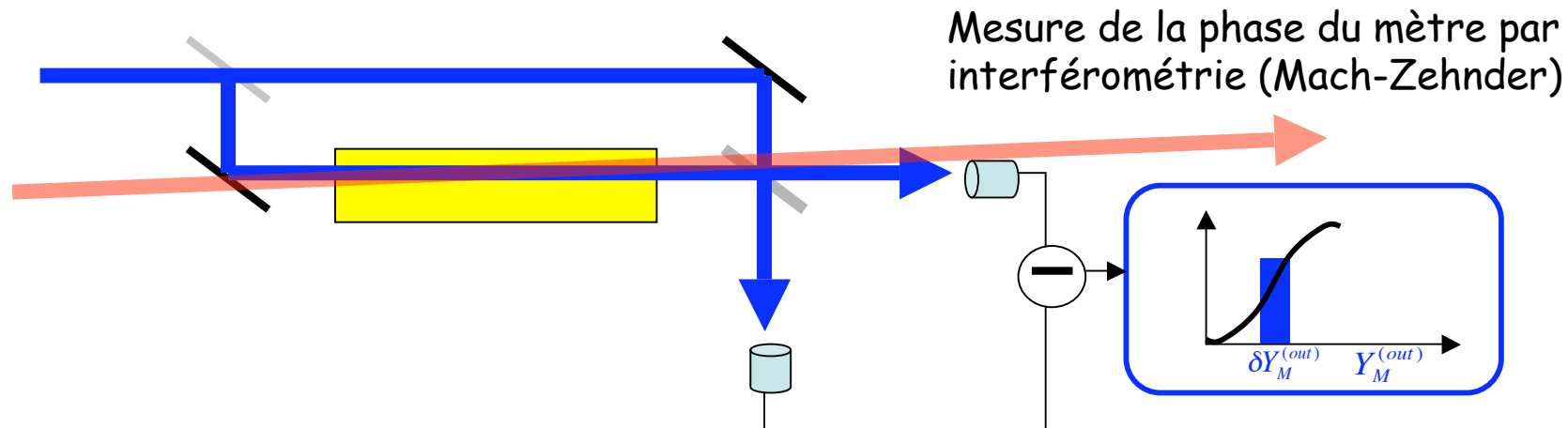
L'absence d'absorption entraîne les relations:

$$\delta X_S^{(out)} = \delta X_S^{(in)} \quad ; \quad \delta X_M^{(out)} = \delta X_M^{(in)} \quad (3-38)$$

et la variation de la phase d'un champ en fonction de l'intensité de l'autre s'exprime par:

$$\delta Y_M^{(out)} = \delta Y_M^{(in)} + 2\phi \sqrt{\bar{n} \bar{m}} \delta X_S^{(in)} \quad ; \quad \delta Y_S^{(out)} = \delta Y_S^{(in)} + 2\phi \sqrt{\bar{n} \bar{m}} \delta X_M^{(in)} \quad (3-39)$$

Corrélation signal-mètre et variance du signal sortie conditionnée à une mesure



L'expérience analyse les corrélations entre les fluctuations de sortie de l'intensité du signal et de la phase du mètre:

$$C^2(\delta X_S^{(out)} \delta Y_M^{(out)}) = \frac{\left| \langle \delta X_S^{(out)} \delta Y_M^{(out)} \rangle \right|^2}{\langle \delta X_S^{(out)2} \rangle \langle \delta Y_M^{(out)2} \rangle} = \frac{4\phi^2 \bar{n} \bar{m}}{1 + 4\phi^2 \bar{n} \bar{m}} \quad (3-40) \quad C^2 \text{ tend vers 1 lorsque } \phi\sqrt{\bar{n}\bar{m}} \rightarrow \infty$$

Après lecture de la mesure, l'information acquise diminue l'incertitude sur la valeur de sortie du signal (inférence Bayésienne). Si on répète la mesure, on trouve le second résultat dans un intervalle plus étroit. Cette caractéristique QND essentielle est quantifiée par la variance $V_{(S|M)}$ du signal de sortie conditionnée au résultat de la mesure. Cette variance est nulle si $C=1$ (corrélations parfaites) et est égale à $\langle \delta X_S^{(out)2} \rangle$ si $C=0$ (aucun effet de la mesure). La statistique du bruit étant gaussienne, on montre:

$$V_{(S|M)} = (1 - C^2) \langle \delta X_S^{(out)2} \rangle = \frac{1}{1 + 4\phi^2 \bar{n} \bar{m}} \quad (3-41)$$

On retrouve que $\phi\sqrt{\bar{n}\bar{m}}$ doit atteindre une valeur de l'ordre de 1 pour battre la LQS

Caractéristiques QND de l'effet Kerr

On généralise au cas d'une variable quasi-continue (intensité d'un champ macroscopique) les caractéristiques de la mesure QND, définies plus haut:

L'intensité de sortie du mètre M est fortement corrélée aux variations d'intensité du signal (eq. 3-40).

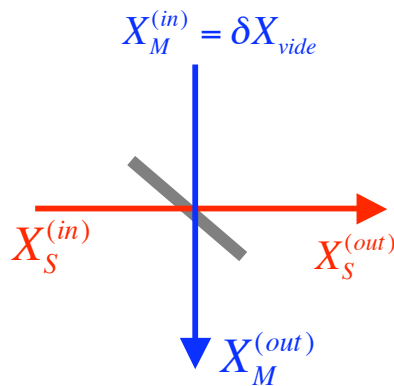
Si la mesure du mètre n'est pas lue, les fluctuations de l'intensité du signal sont les mêmes à la sortie et à l'entrée (eq. (3-38)): une mesure non lue n'affecte pas la statistique des résultats possibles d'une mesure ultérieure.

Les fluctuations du signal sont fortement réduites quand on les conditionne au résultat d'une mesure du mètre (eq.(3-41)). Cette propriété décrit la projection du signal sur un paquet étroit de valeurs de n (voir analyse plus haut en terme d'états). Cette projection, qui réduit l'incertitude sur n au dessous de la LQS, s'accompagne d'un élargissement de la distribution de phase du signal. Cet effet (action en retour sur la phase) est décrite par la 2ème eq. (3-39) qui relie les fluctuations de phase du signal aux fluctuations d'intensité du mètre.

Des références sur les expériences QND basées sur l'effet Kerr sont données à la fin de la leçon, ainsi que la référence à un article établissant des critères quantitatifs pour définir le caractère QND d'une expérience optique, basés sur des mesures de quantités directement accessibles à l'expérience (variance conditionnelle et transfert de rapport signal-bruit entre entrée et sortie).

Mesures QND optiques par lame séparatrice?

Envisageons le dispositif de la figure réalisé à l'aide d'une lame séparatrice semi-transparente:



Classiquement, le champ à mesurer est divisé en deux parts égales. La mesure dans la voie verticale M donne l'intensité du champ qui se propage dans la voie horizontale S. On peut répéter la mesure de ce champ. L'analyse quantique des fluctuations montre cependant que les critères QND ne sont pas respectés. En particulier, la variance conditionnelle de ce dispositif est égale à l'unité:

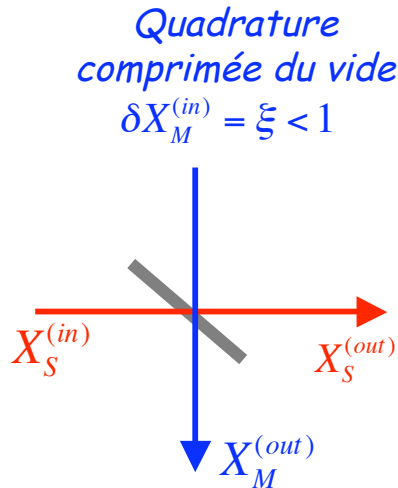
$$\begin{aligned} \delta X_S^{(out)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta X_S^{(in)} + \delta X_{vide}) \\ \delta X_M^{(out)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta X_S^{(in)} - \delta X_{vide}) \end{aligned} \quad (3-42)$$

$$\rightarrow \langle \delta X_M^{(out)} \delta X_S^{(out)} \rangle = \frac{1}{2} [\langle \delta X_S^{(in)2} \rangle - \langle \delta X_{vide}^2 \rangle] = \frac{1}{2} [1 - 1] = 0 \rightarrow C^2 = 0 \rightarrow V_{(SIM)} = 1 \quad (3-43)$$

Fluctuations non corrélées dans les deux voies:
la mesure ne dépasse pas la LQS.

On retrouve le même résultat en représentant le champ entrant par un état cohérent: la lame séparatrice n'intrique pas les deux voies de sortie, dont les statistiques de comptage de photons restent indépendantes.

Mesure QND optique par lame séparatrice mélangeant le signal avec une quadrature comprimée du champ du vide



$$\delta X_S^{(out)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta X_S^{(in)} + \xi)$$

$$\delta X_M^{(out)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta X_S^{(in)} - \xi)$$

(3-44)

Dispositif analogue au précédent, mais on fait entrer dans la voie verticale une quadrature comprimée du vide (même quadrature que le signal). On calcule simplement la corrélation signal-mètre à la sortie et la variance conditionnelle en fonction du degré ξ de compression:

$$C^2 = \frac{|\langle \delta X_S^{(out)} \delta X_M^{(out)} \rangle|^2}{\Delta X_S^{(out)2} \Delta X_M^{(out)2}} = \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^2 \quad (3-45)$$

$$V_{(SIM)} = \langle \delta X_M^{(out)2} \rangle (1 - C^2) = \frac{4\xi^2}{(1 + \xi^2)^2} \quad (3-46)$$

A la limite $\xi = 0$, les fluctuations des deux faisceaux de sortie sont identiques. La mesure de l'un projette l'autre dans un état d'intensité bien définie.

Références page suivante sur expériences QND suivant cette méthode. Noter que la génération du champ du vide comprimé requiert, comme l'effet Kerr, des processus d'optique non-linéaire.

Conclusion de la troisième leçon

Nous avons décrit le principe des mesures QND optiques basées sur le couplage non dissipatif du champ signal avec un oscillateur mécanique ou avec un second champ (mètre) interagissant avec le signal par effet Kerr. Nous avons également montré que le mélange avec un champ vide comprimé sur une lame séparatrice permet de faire une mesure QND. D'autres méthodes QND optiques basées sur la duplication sans bruit de photons n'ont pas été abordées ici. Nous concluons par quelques références approfondissant les points traités dans la leçon:

Historique des propositions de mesures QND:

V.Braginsky et al, *Sov.Phys.JETP*, 46, 705 (1977)

K.S.Thorne et al, *PRL*, 40, 667 (1978)

W.G.Unruh, *Phys.Rev.D*.18, 1764 (1978)

C.M.Caves et al *RMP* 52, 341 (1980)

G.J.Milburn & D.F.Walls, *Phys.Rev.A* 28, 2065 (1983)

Imoto et al, *Phys.Rev.A* 32, 2287 (1985)....

Vers des mesures QND opto-mécaniques, refroidissement mécanique de miroirs:

Heidmann A, Hadjar Y, Pinard M. *Applied Phys. B* 64 (2) 173 (1997)

O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard & A. Heidmann, *Nature*, 444, 71 (2006).

S. Gigan, H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab,

D. Bäuerle, M. Aspelmeyer & A. Zeilinger, *Nature*, 444, 67 (2006).

D.Kleckner et D.Bouwmeester, *Nature*, 444, 75 (2006)

Mesures QND optiques par effet Kerr, critères des mesures QND optiques:

P.Grangier, J.A.Levenson & J.P.Poizat, *Nature* 396, 537 (1998) et refs in,

J-P.Poizat, J-F.Roch et P.Grangier, *Ann.Phys.Fr.* 19, 265 (1994).

J-F.Roch, K.Vigneron, P.Grelu, A.Sinatra, J-P.Poizat et P.Grangier, *Phys.Rev.Lett.* 78, 634 (1997)

Mesures QND par mélange avec un champ comprimé:

R.Bruckmeier, H.Hansen, S.Schiller et J.Mlynek, *Phys.Rev.Lett.* 79, 43 (1997).