

Cours 2007-2008: Sixième Leçon

3 Mars 2008

Comptage QND de plusieurs photons et génération d'états de Fock de la lumière

Nous avons vu (leçon 5) que des atomes de Rydberg circulaires non-résonnants, traversant un à un une cavité C , permettent la détection QND d'un seul photon. La mesure est faite à l'aide d'un interféromètre de Ramsey. Si le déphasage Φ_0 induit par un photon sur le dipôle atomique vaut π , chaque atome, décrit comme un spin, sort de l'appareil en pointant le long de l'une de deux directions opposées, indiquant que C contient 0 ou 1 photon. En répétant la mesure, on observe les sauts quantiques associés à la création et à l'annihilation des photons dans les miroirs de C .

Le réglage $\Phi_0 = \pi$ est adapté à la mesure de la parité du nombre n de quanta, assimilable à n si le champ, très faible, a une probabilité négligeable de contenir plus d'un photon. Pour des champs plus grands, le comptage QND reste possible en modifiant Φ_0 . La valeur de n ne peut plus être obtenue à l'aide d'un seul 'spin' mais doit être extraite d'un ensemble d'atomes. En détectant les 'spins' de cet ensemble un à un, on observe l'évolution progressive du champ vers un état de Fock, ce qu'on appelle l'effondrement ou 'collapse' de sa fonction d'onde. La répétition de la mesure correspondant au passage dans C d'ensembles d'atomes successifs, révèle la cascade en marches d'escalier du nombre de photons vers le vide, due à la relaxation du champ. Après quelques rappels et remarques générales, nous analysons cette procédure de mesure idéale de la lumière en l'appliquant à un petit champ cohérent.

Effets dispersifs vus par l'atome et par le champ

Le comptage QND de photons exploite le déplacement des niveaux d'énergie des atomes de Rydberg circulaires dans le champ de la cavité, ce que l'on appelle encore l'effet Stark dynamique. Le déplacement des états $|e,n\rangle$ et $|g,n\rangle$ sous l'effet du couplage atome-champ est donné à l'ordre le plus bas en développement perturbatif par l'éq.(5-28). On en déduit les énergies «habillées» pour un atome au centre de C:

$$E_{en} / \hbar = \frac{\omega_{eg}}{2} + n\omega_C + (n+1)s_0 \quad ; \quad E_{gn} / \hbar = -\frac{\omega_{eg}}{2} + n\omega_C - ns_0 \quad ; \quad s_0 = \frac{\Omega_0^2}{4\delta} \quad (6-1)$$

Les énergies et états propres sont ceux d'un Hamiltonien effectif d'effet Stark dynamique H_{SD} dont on peut regrouper les termes de deux façons différentes:

$$H_{SD} / \hbar = \omega_C a^\dagger a + \left(\frac{\omega_{eg} + 2s_0 a^\dagger a}{2} \right) \sigma_z + s_0 \sigma_+ \sigma_- = \frac{\omega_{eg}}{2} \sigma_z + (\omega_C + s_0 \sigma_z) a^\dagger a + s_0 \sigma_+ \sigma_- \quad (6-2)$$

Déplacement de la
fréquence atomique
induit par le champ

Lamb-shift
(état e)

Déplacement de la
fréquence du champ
induit par l'atome

Lamb-shift
(état e)

Le **déplacement de la fréquence atomique induit par le champ** (exploité pour la mesure QND des photons) et le **déplacement de la fréquence du champ induit par l'atome** («indice à un atome» qui peut être exploité pour le comptage des atomes traversant C) sont deux effets réciproques, décrits par le même Hamiltonien.

Analogie entre effet Stark dynamique et effet Kerr

Le terme d'interaction dispersif atome-champ (limite perturbative) s'écrit:

$$H_{SD}^{(\text{int})} / \hbar = s_0 N \sigma_Z \quad ; \quad N = a^\dagger a \quad (6-3)$$

qu'il est instructif de comparer à l'Hamiltonien de l'effet Kerr (leçon 3):

$$H_{Kerr}^{(\text{int})} / \hbar = \frac{c\phi}{L} N_S N_M \quad (6-4)$$

L'atome joue le rôle du **champ mètre M** de la mesure QND optique. En détectant la phase de ce champ par une méthode interférométrique (Mach-Zehnder), on mesure **l'intensité du champ signal** optique. De même, en mesurant la phase de la superposition atomique dans l'expérience micro-onde par l'interféromètre de Ramsey, on détermine le **nombre de photons**. On note encore la grande analogie entre le Mach-Zehnder optique et l'interféromètre de Ramsey. Les impulsions micro-onde séparées du second sont les analogues des lames séparatrices du premier. **La grande différence réside dans la sensibilité des deux méthodes. Alors que ϕ , le déphasage induit par photon du signal sur le champ mètre (après un temps de propagation L/c) est très petit, le déphasage $2s_0 t_{int}^d$ peut atteindre π en CQED, permettant à un seul atome de détecter un photon isolé (leçon 5).**

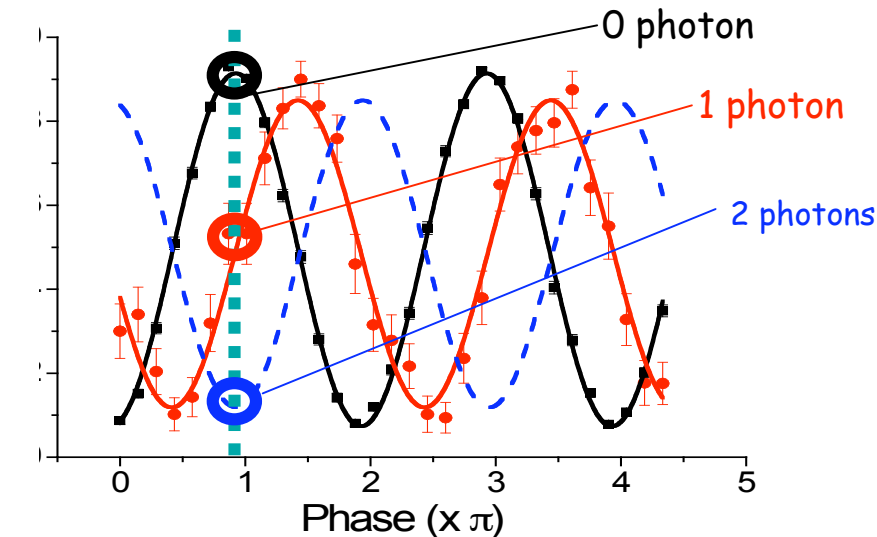
Passer de la mesure de la parité à celle du nombre de photons

La méthode décrite à la leçon 5, basée sur un déphasage Φ_0 de π par photon, mesure la **parité du nombre de photons**, qui ne s'identifie à n que si ce nombre a une probabilité négligeable d'être supérieur à 1 (champ thermique à très basse température ou champ cohérent d'amplitude très faible).

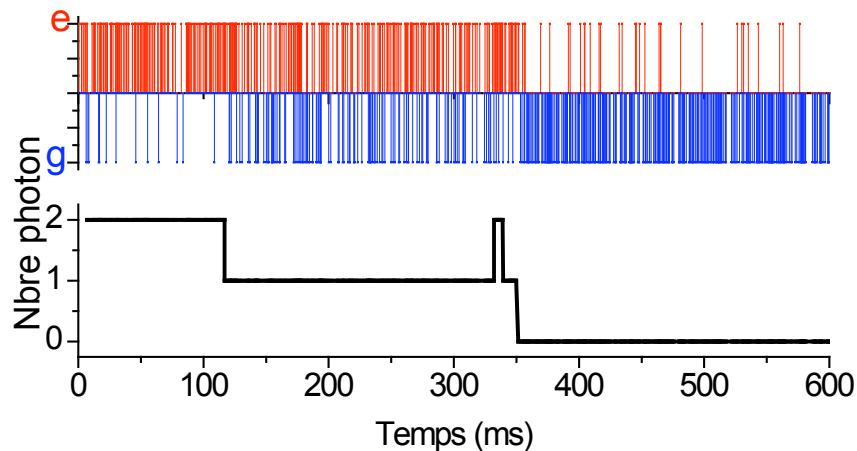
Cette mesure qui couple le système mesuré (le champ) à un qubit (l'atome de Rydberg circulaire) et détecte l'état final de ce qubit est un POVM à 2 éléments (leçon 2). Nous avons vu que pour mesurer une observable à spectre discret ayant plus de 2 valeurs propres, on peut réaliser une suite de m POVMs identiques, chacun apportant une information partielle jusqu'à ce que le résultat converge vers une valeur précise. Dans le cas du champ dans C , la méthode revient simplement à y envoyer m atomes successifs, tous préparés par R_1 dans la même superposition d'états et à mesurer, grâce à R_2 suivi du détecteur D l'état final de l'atome (e ou g).

Reste à choisir le réglage de Φ_0 . La valeur $\Phi_0 = \pi$ n'est pas adaptée: dans ce cas tous les POVMs remesurent la parité de N , sans fournir aucune autre information. L'analyse de la leçon 2 nous conduit à prendre $\Phi_0 = \pi/n_m$ où n_m est la borne supérieure du nombre de photons comptés. La phase des franges de Ramsey peut alors prendre $n_m + 1$ valeurs réparties entre 0 et π . En détectant suffisamment d'atomes, la probabilité de les trouver dans $|e\rangle$ convergera vers une valeur qui permettra de déterminer le déphasage avec une précision suffisante pour fixer celle du nombre de photons. Nous illustrons page suivante la méthode pour $n_m = 2$.

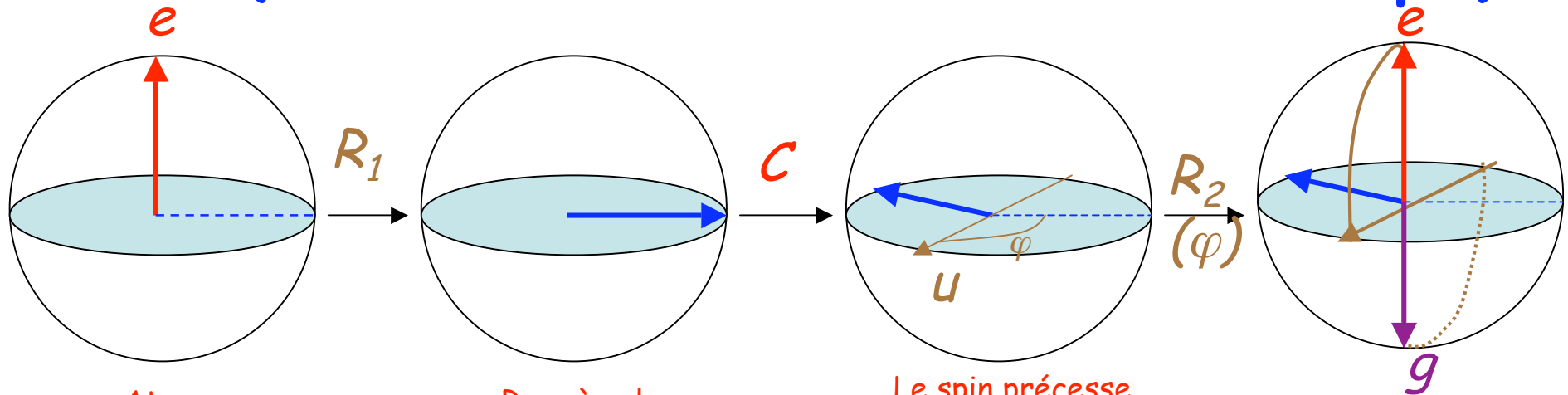
Compter jusqu'à 2 photons



On injecte dans C un champ cohérent avec en moyenne ~ 0.5 photons, qui a une probabilité négligeable d'avoir 3 photons ou plus. On règle le déphasage à $\pi/2$ par photon et on fixe la phase de l'interféromètre pour avoir un maximum de frange quand le champ contient 0 photons. Le signal prend alors 3 valeurs différentes suivant qu'il y a 0, 1 ou 2 photons. Les atomes sont en principe tous détectés dans e s'il y a 2 photons, tous dans g s'il y en a 0 et à 50% dans e et dans g pour 1 photon. La figure ci-contre montre une trajectoire du champ particulière, dépouillée avec un vote majoritaire à 25 atomes consécutifs. Elle commence avec 2 photons (atomes détectés majoritairement dans e), subit un saut vers l'état à 1 photon ("vote" 50%-50%), puis un second saut vers le vide (atomes détectés majoritairement dans g). Noter, juste avant le dernier saut quantique, le bref pic $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ qui correspond à un photon thermique créé et vite annihilé.



L'interféromètre de Ramsey et la sphère de Bloch (atome à 2 niveaux décrit comme un spin)

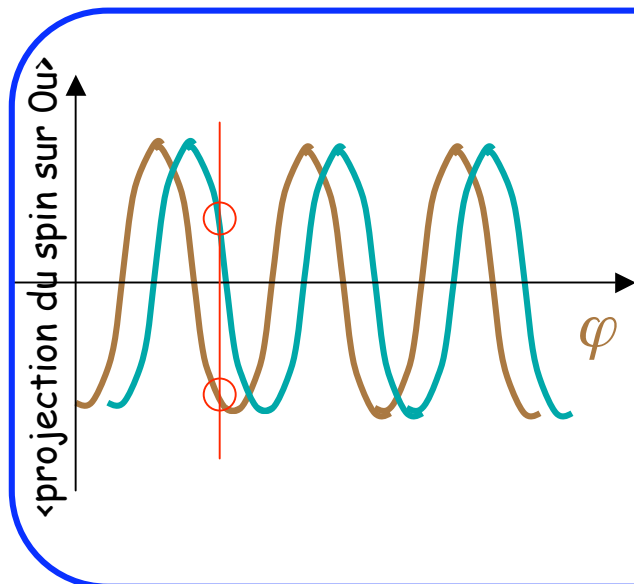


Atome initialement dans e

R_1 amène le «spin» le long de Ox

Le spin précesse pendant la traversée de C avec une vitesse linéaire en n

R_2 ramène l'axe transversal Ou (angle φ) sur Oz : La mesure finale de l'énergie (e ou g ?) revient à détecter le spin transversal (+/- le long de Ou ?)



Pour un n donné, la valeur moyenne de la projection du spin le long de Ou oscille quand φ varie: franges de Ramsey.

La direction du spin transversal dépend de n : la phase des franges glisse quand n change: cette phase est la variable QND que l'on mesure

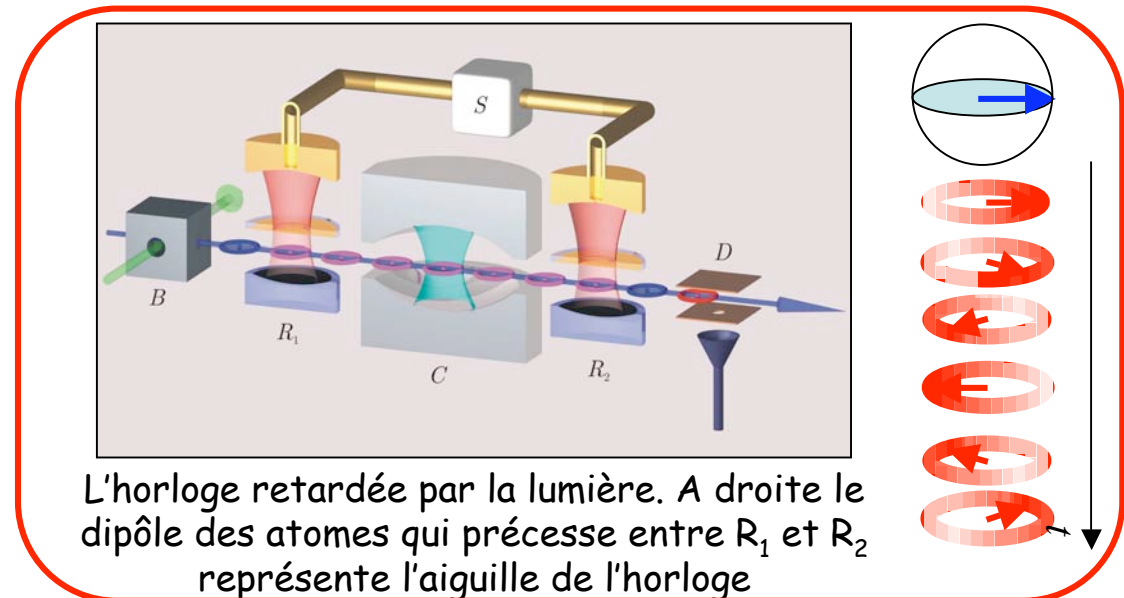
La détection de chaque atome donne une information partielle. Différentes stratégies de mesure possibles.

La mesure QND de photons dans une cavité: une horloge atomique retardée par la lumière

L'interféromètre de Ramsey fonctionne comme une horloge atomique: chaque atome est un chronomètre microscopique déclenché par R_1 et lu par R_2 . Le spin qui précesse est l'équivalent de son aiguille. Il représente aussi le dipôle électrique de la superposition d'états e et g préparée par R_1 . Les atomes-horloge traversent la cavité contenant les photons piégés. Le champ électrique de ces photons retarde le battement de l'horloge, dont la détection permet de compter les quanta de lumière. Le plan équatorial de la sphère de Bloch est le cadran de cette horloge, que l'on peut étalonner en nombre de photons. L'ordre de grandeur du déplacement de fréquence angulaire par photon est au maximum $\Omega_0/2$ (valeur de $2s_0$ donné par l'eq. (5-28) pour $\delta \sim \Omega_0$). Le décalage relatif par photon, $\eta = \Omega_0/2\omega_{eg}$, est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-7}$ (leçon 4), ce qui correspond à un retard de ~ 1 s par mois. Pendant le temps de traversée de l'atome $t \sim \lambda/v = 2\pi c/v\omega_{eg}$ le déphasage de l'aiguille par photon est au maximum de l'ordre de:

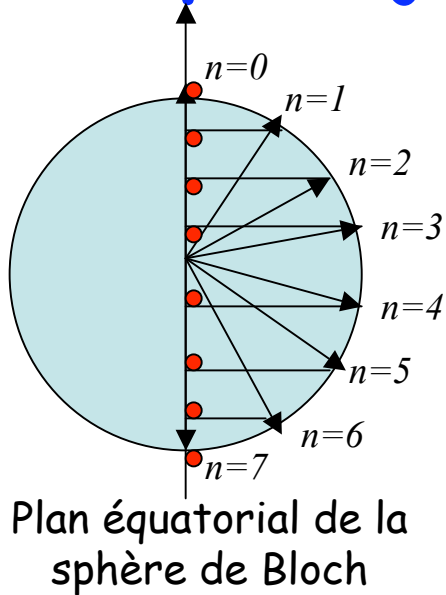
$$\Phi_0 = \frac{\Omega_0}{2} t \approx 2\pi\eta \frac{c}{v} \approx 3 \cdot 10^{-6} \frac{c}{v} \quad (6-5)$$

La valeur π par photon est atteinte pour $c/v \sim 10^6$ soit $v \sim 300$ m/s (vitesse thermique usuelle). On retrouve l'ordre de grandeur de la leçon 5. Des atomes moins sensibles au champ devraient être fortement ralentis par laser. Ce refroidissement radiatif est inutile pour les atomes de Rydberg.



Compter jusqu'à n_m photons: deux stratégies

Illustration avec $n_m = 7$



1^{ère} méthode: répétition de POVM identiques (voir leçon 2)

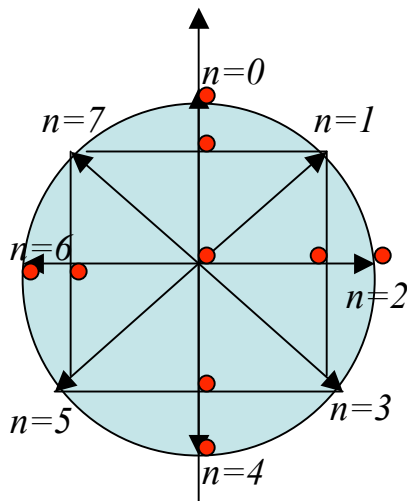
On choisit $\Phi_0 = \pi/n_m$ et une valeur de φ telle que $n=0$ corresponde à un extremum de frange. Les n_m+1 directions de spins entre 0 et π correspondent à n_m+1 valeurs de la projection du spin sur Oz. Après un nombre de mesures $m \sim a n_m^2$, la projection est définie à mieux que $1/n_m$ et le nombre de photons dans le champ est déterminé. Le paramètre $a > 1$ dépend des imperfections (contraste des franges) et du taux d'erreur que l'on accepte. Nous avons pris $a \sim 6$ dans l'expérience de mesure de 0,1 ou 2 photons (vote majoritaire à 25 atomes).

2^{nde} méthode: alternance de 2 ou 4 POVM différents: tomographie du spin atomique (voir leçon 1)

On choisit $\Phi_0 = 2\pi/(n_m+1)$ pour répartir les directions du spin sur 2π . Mesurer avec une seule phase donnerait une information ambiguë, deux directions de spin différentes ayant même projection. On peut choisir 2 phases φ_1 et $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ associées à 2 POVM différents. On applique chaque POVM à un atome sur deux. On détermine ainsi les projections du spin sur 2 axes orthogonaux, ce qui revient à faire sa tomographie. Après un nombre de mesure $m \sim a n_m^2/2$, la direction du spin et n sont déterminés.

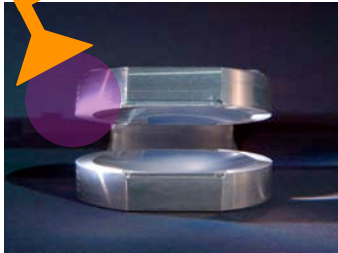
Cette méthode utilise mieux le grand cercle de la sphère de Bloch, en séparant davantage les directions de spin associées à des nombres de photons consécutifs: elle converge deux fois plus vite que la première.

Variante équivalente: au lieu de 2 directions de détection, en prendre 4 orthogonales deux à deux et appliquer chacun des POVM à 1/4 des atomes.

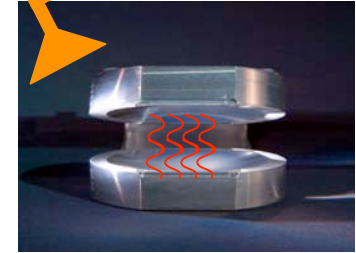


Démonstration: comptage QND des photons d'un petit champ cohérent

C.Guerlin, J.Bernu, S.Deléglise, C.Sayrin, S.Gleyzes, S.Kuhr, M.Brune, J-M. Raimond & S.Haroche, Nature, 448, 889, (2007).

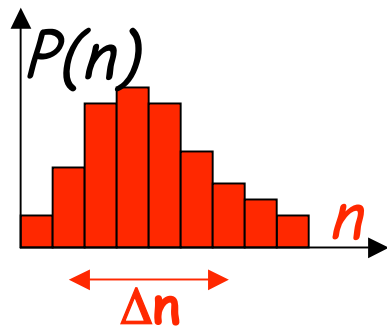


Injection d'un petit champ dans la cavité en utilisant une source cohérente de micro-onde couplée par diffraction au bord des miroirs



La phase du champ étant bien définie, le nombre de photons est incertain:

$$\Delta n \Delta \phi \geq 1/2$$



Champ cohérent microscopique contenant en moyenne 3 à 4 photons ($\Delta n \sim 2$, $\Delta \Phi \sim 0.25$ rad).

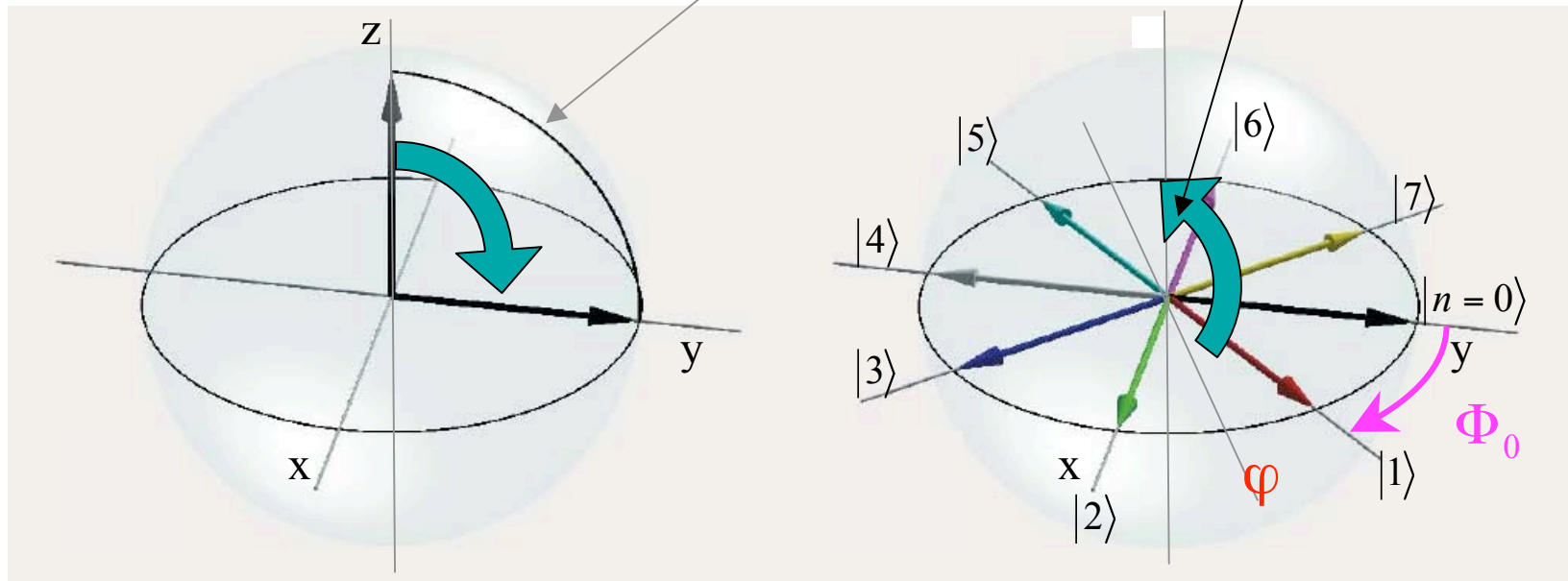
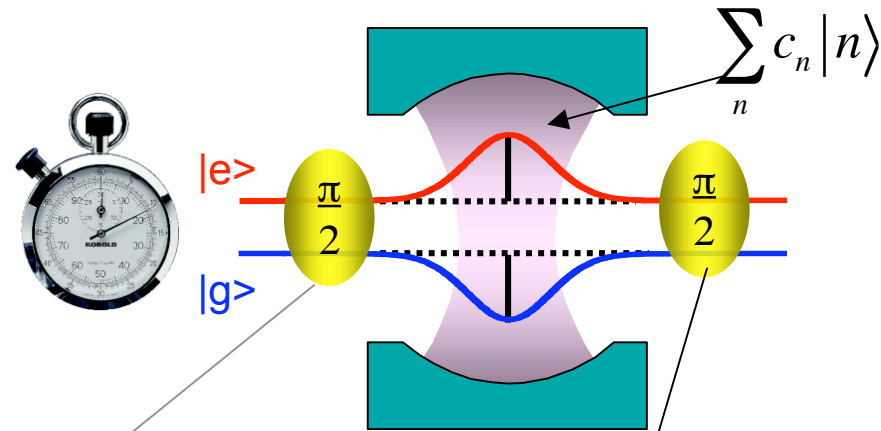
La distribution du nombre de photon est théoriquement une loi de Poisson. Le champ est préparé dans une superposition cohérente d'états nombre de photons:

$$|\Psi_{champ}\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \quad ; \quad P(n) = |C_n|^2 : \text{ probabilité de } n \text{ photons}$$

On règle l'amplitude du champ injecté pour avoir $0 \leq n \leq 7$
(8 valeurs possibles de n)

Comptage QND d'un champ cohérent ($\Phi_0 = \pi/4$)

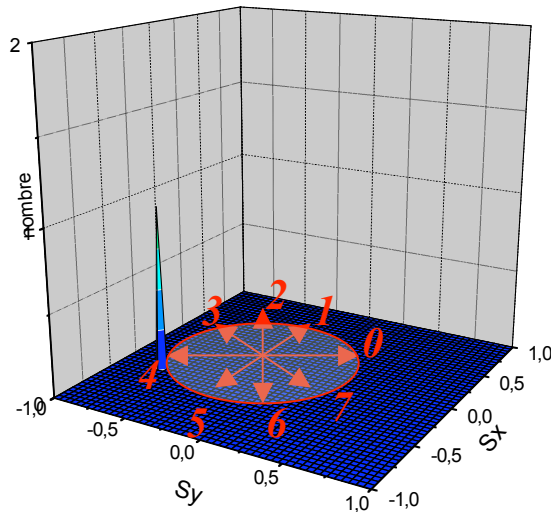
L'aiguille est mesurée dans la direction φ (la 2nde impulsion reporte cette direction sur l'axe polaire Oz avant détection de l'énergie atomique).



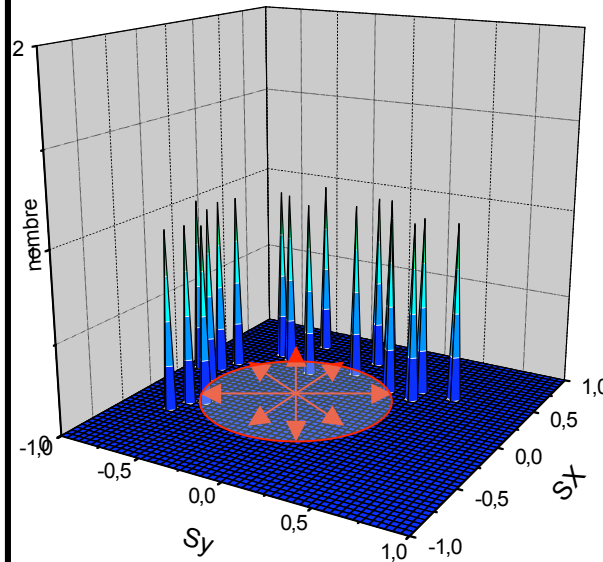
Intrication atome-champ:

$$\sum_n c_n |n\rangle \otimes |spin_n\rangle$$

Compter jusqu'à 7 les photons d'un champ cohérent

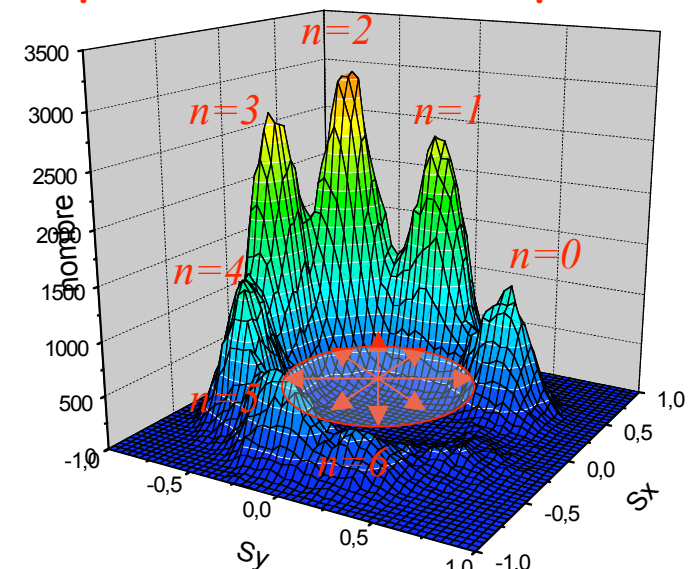


Une séquence de 110 atomes traverse C en un temps $T_M = 26 \text{ ms} \ll T_C$ (intervalle entre atomes $\sim 250 \mu\text{s}$). on obtient une valeur du spin transversal, correspondant ici à $n = 4$. La condition $T_M < T_C/n$, durée de vie de l'état n , est réalisée: l'état est mesuré plus vite qu'il ne décroît.



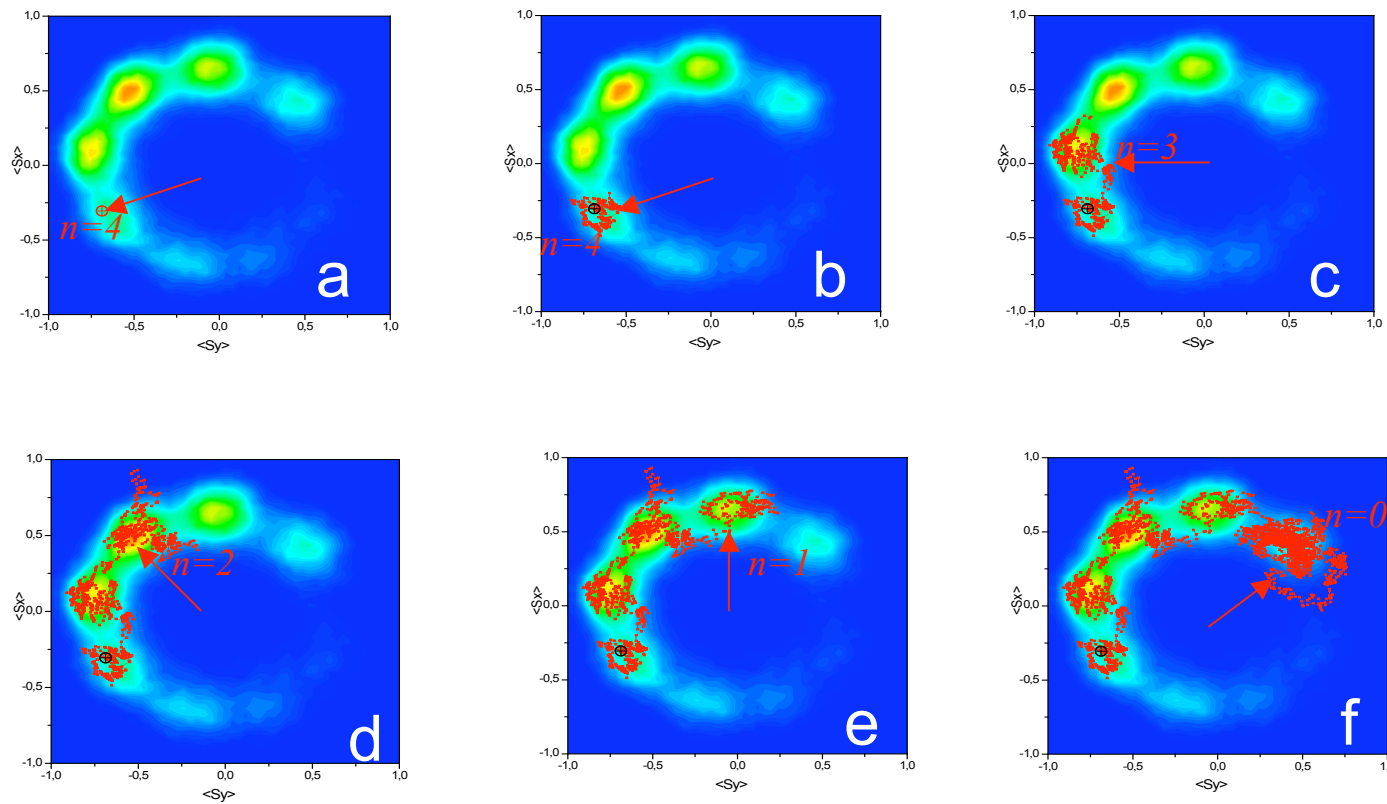
On recommence la même séquence de mesure en repartant du même champ initial et on obtient un ensemble de valeurs de n différentes (ici 16 mesures).

On réalise des séquences longues (1000 atomes détectés soit ~ 9 mesures successives) recommencées 2000 fois. Le temps de mesure étant $> T_C$, le nombre de photons déterminé par les 110 premiers atomes de chaque séquence cascade par sauts (voir p.suivante). La moyenne des 18000 mesures présente des pics associés aux différentes valeurs de n :
Calibration du cadran de l'horloge
Démonstration claire de la quantification du champ.



Suivre le 'spin-aiguille' sur une trajectoire: observation des sauts quantiques du champ

On fait la tomographie d'un échantillon glissant de 110 atomes, sur une réalisation unique du champ. Chaque point rouge correspond à un changement incrémental du spin (deux mesures indépendantes sont séparées de 110 atomes). La valeur initiale (ici $n=4$, cadre a) se maintient un moment (b) puis saute à $n=3$ (c), $n=2$ (d), $n=1$ (e) pour finir en $n=0$ (f).



Voir plus loin pour une analyse plus précise de ces sauts quantiques

Comment "se décide" n? Observation directe du collapse de la fonction d'onde du champ

Après une centaine d'atomes détectés, le champ, initialement cohérent, contient un nombre défini de photons. Dans notre expérience, où les atomes traversent la cavité 1 à 1, cette information est acquise progressivement, sous l'effet d'une succession de POVMs binaires. On peut en utilisant la loi de Bayes (ou le postulat de projection) inférer, pas à pas, la distribution de probabilité $P_i(n)$ et observer, pour ainsi dire en temps réel, l'évolution de cette distribution vers un pic de Dirac. Le raisonnement est le même que pour la description de la mesure d'un moment angulaire par une séquence de POVMs réalisés par couplage à des qubits (voir leçon 2).

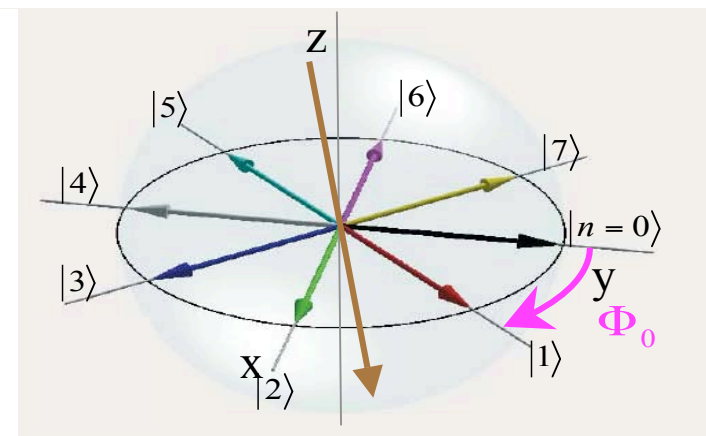
Mesurons le 1^{er} atome le long de l'axe Oz ou faisant l'angle φ avec Ox . Les probabilités conditionnelles de le trouver dans l'état + ($j=0$) ou - ($j=1$) sont (propriété de projection du spin, relation de Stern-Gerlach):

$$P(j | n) = [1 + \cos(n\Phi_0 - \varphi - j\pi)] / 2 \quad (6-6)$$

On en déduit qu'inversement la probabilité d'avoir n photons après avoir obtenu le résultat j est devenue (loi de Bayes):

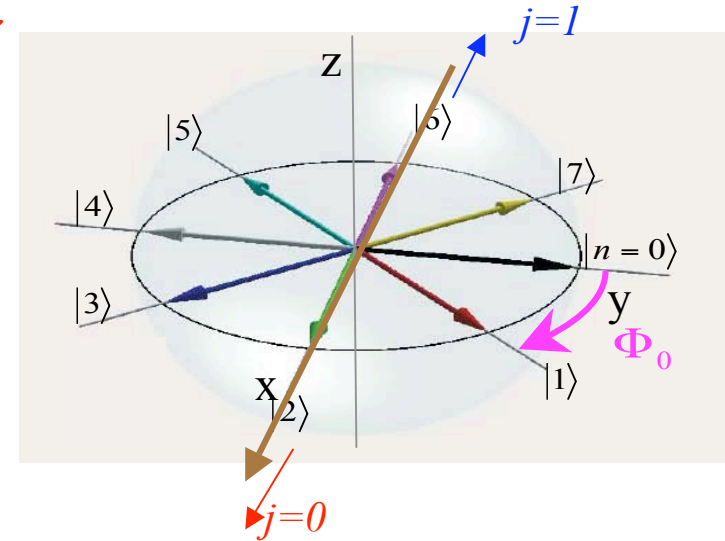
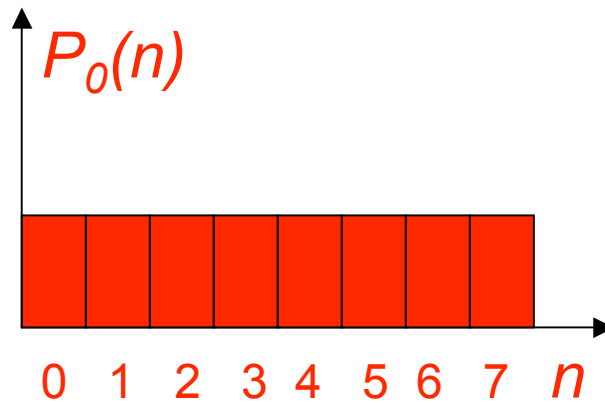
$$P(n | j) = P_0(n) \frac{P(j | n)}{Z} = \frac{P_0(n)}{Z} [1 + \cos(n\Phi_0 - \varphi - j\pi)] / 2 \quad (6-7)$$

où $P_0(n)$ est la distribution de probabilité avant la mesure et Z assure la normalisation à 1 de la somme des probabilités.

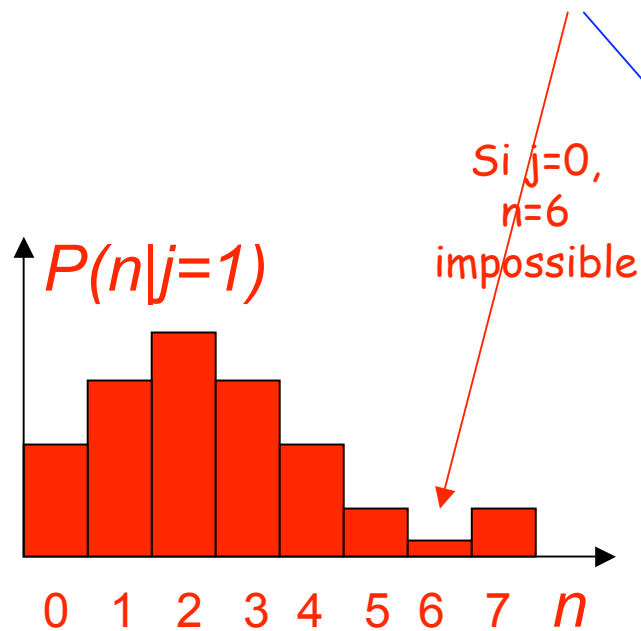


Observation directe du 'collapse': effet du premier atome

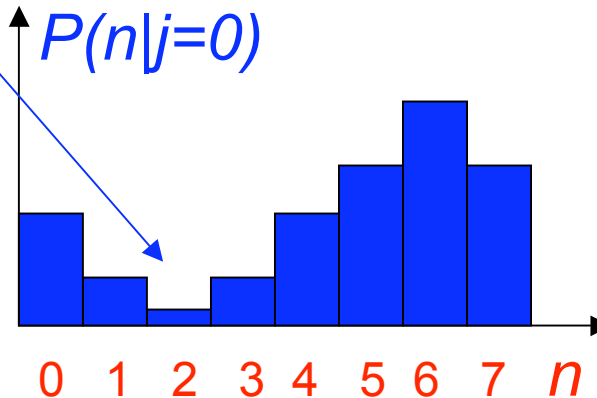
Distribution initiale plate: la seule information est $0 \leq n \leq 7$



Exemple: détection le long de l'axe $n=2-n=6$

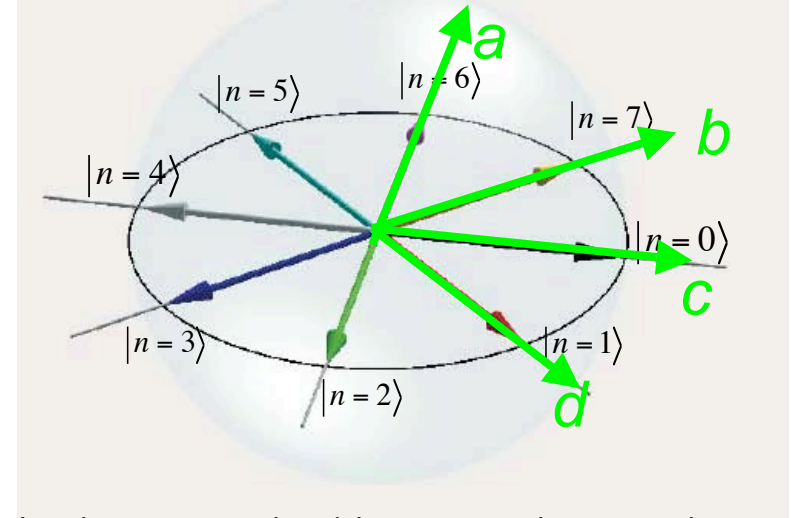


Si $j=1$, $n=2$ impossible



Distribution $P_0(n)$ multipliée par fonction oscillante de n qui rend impossible certains n

Une acquisition d'information pas à pas



Les atomes traversent C un à un...

...et on change la direction de détection du spin d'un atome au suivant (4 directions 2 à 2 orthogonales)

$$P_i^{(N)}(n) = \frac{P^{(0)}(n)}{2Z} \prod_{k=1}^N [A + B \cos(n\Phi_0 - \phi(k) - j(k)\pi)] / 2$$

(6-8)

a/b/c/d
0/1

Les mesures étant imparfaites ($A, B < 1$), le champ est décrit à chaque pas par un opérateur densité. Pour une mesure idéale, il resterait après chaque atome dans un état pur.

Lecture des spins

000101101010001011001...

Direction de détection

abdcadbcbadcaabcbacd b...

$$P_i^{(N)}(n) \longrightarrow \delta(n - n_0) \quad (6-9)$$

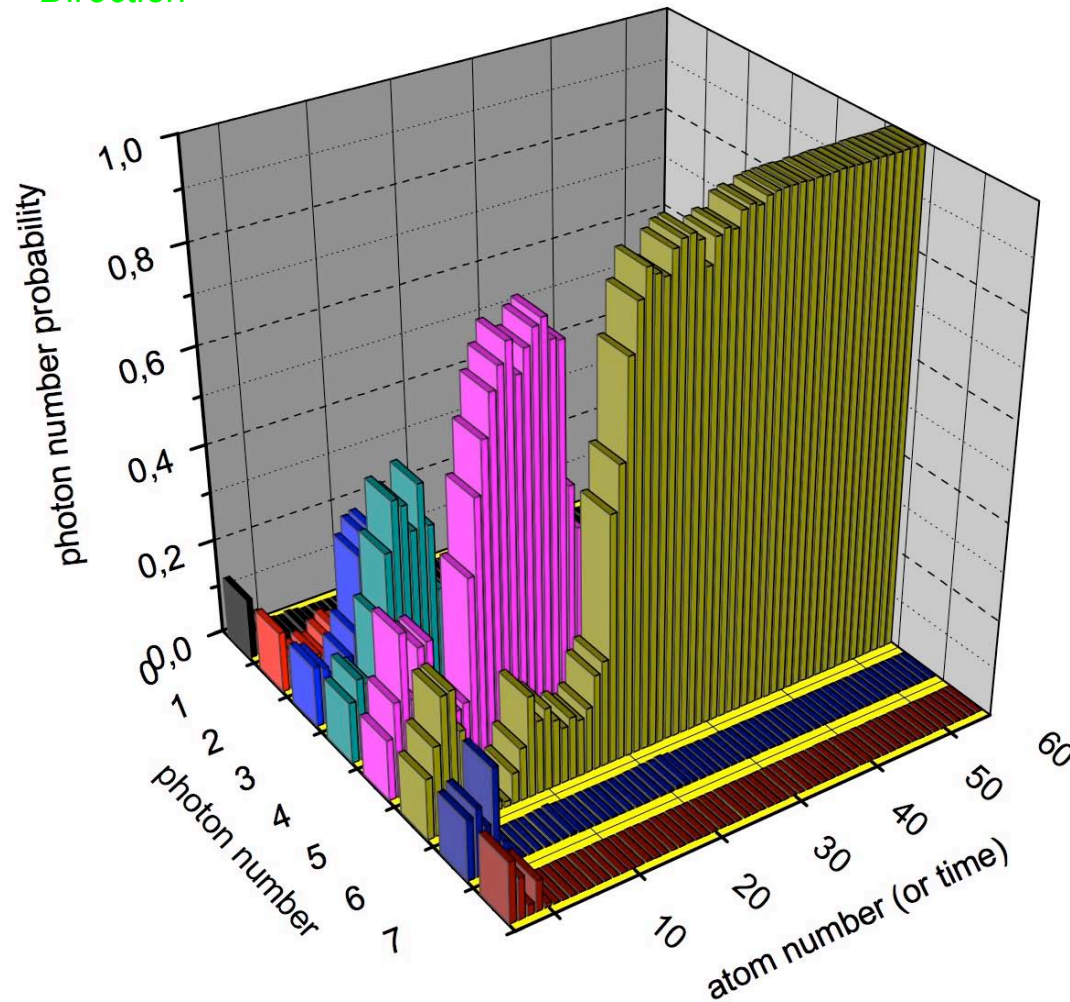
'Collapse' progressif

Convergence d'un état cohérent vers un état de Fock: projection de l'état en temps réel

Lecture
du spin
Direction

000101101010001011001...

abdcadbcbadcaabcbacd b...



Evolution de la distribution $P_i(n)$ au fur et à mesure que le nombre d'atomes dans la séquence augmente. La distribution initiale est plate (aucune information sur le champ si ce n'est $n < 8$). Resultat aléatoire car dépendant des mesures impévisibles sur chaque spin (ici la séquence converge vers $n=5$).

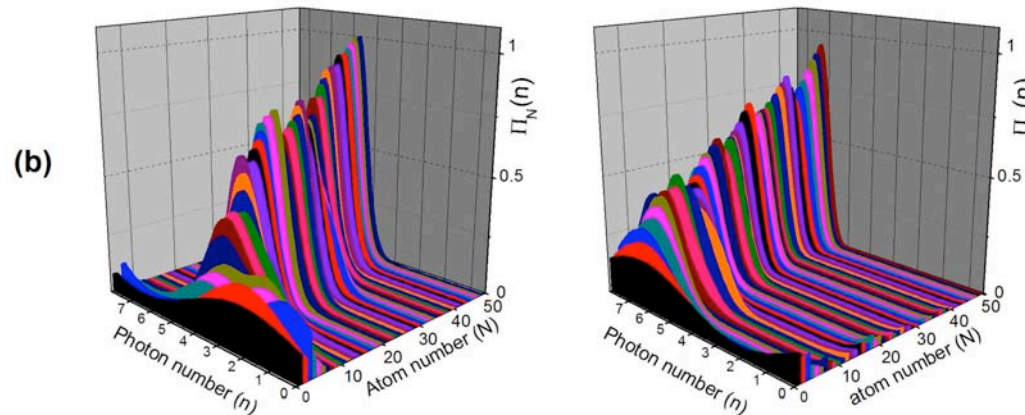
Evolution progressive vers 2 états de Fock différents à partir du même état initial

2 Séquences de données atomiques

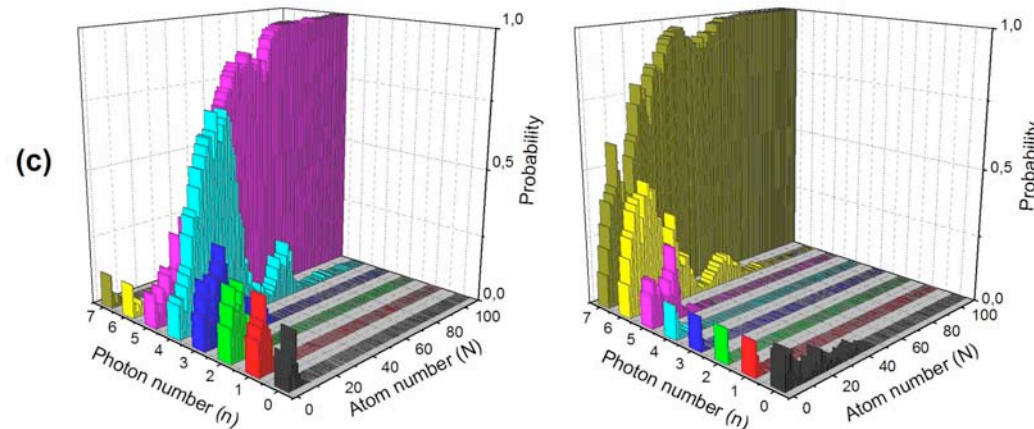
j 11011111111110011101101111
i ddcbccabcdaadaabaddbadbc

j 00010001101110000001010110
i ddcaddabbccdcchcdaabbccab

Produits des fonctions cosinus correspondant à la détection d'atomes successifs



Distribution inférée du nombre de photons



'Collapse' vers $n=5$

'Collapse' vers $n=7$

Analyse statistique de 2000 séquences: histogramme des états de Fock obtenus

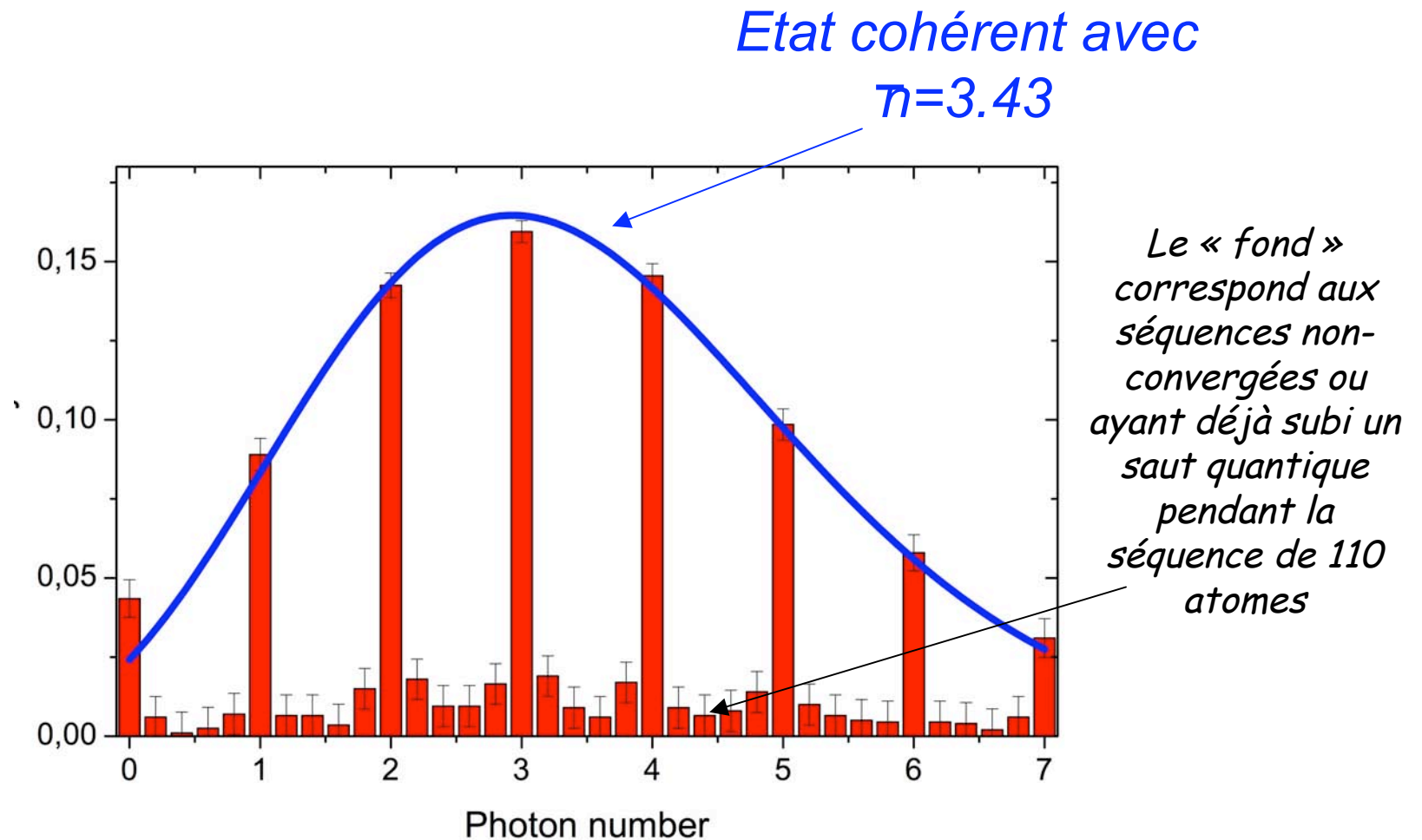
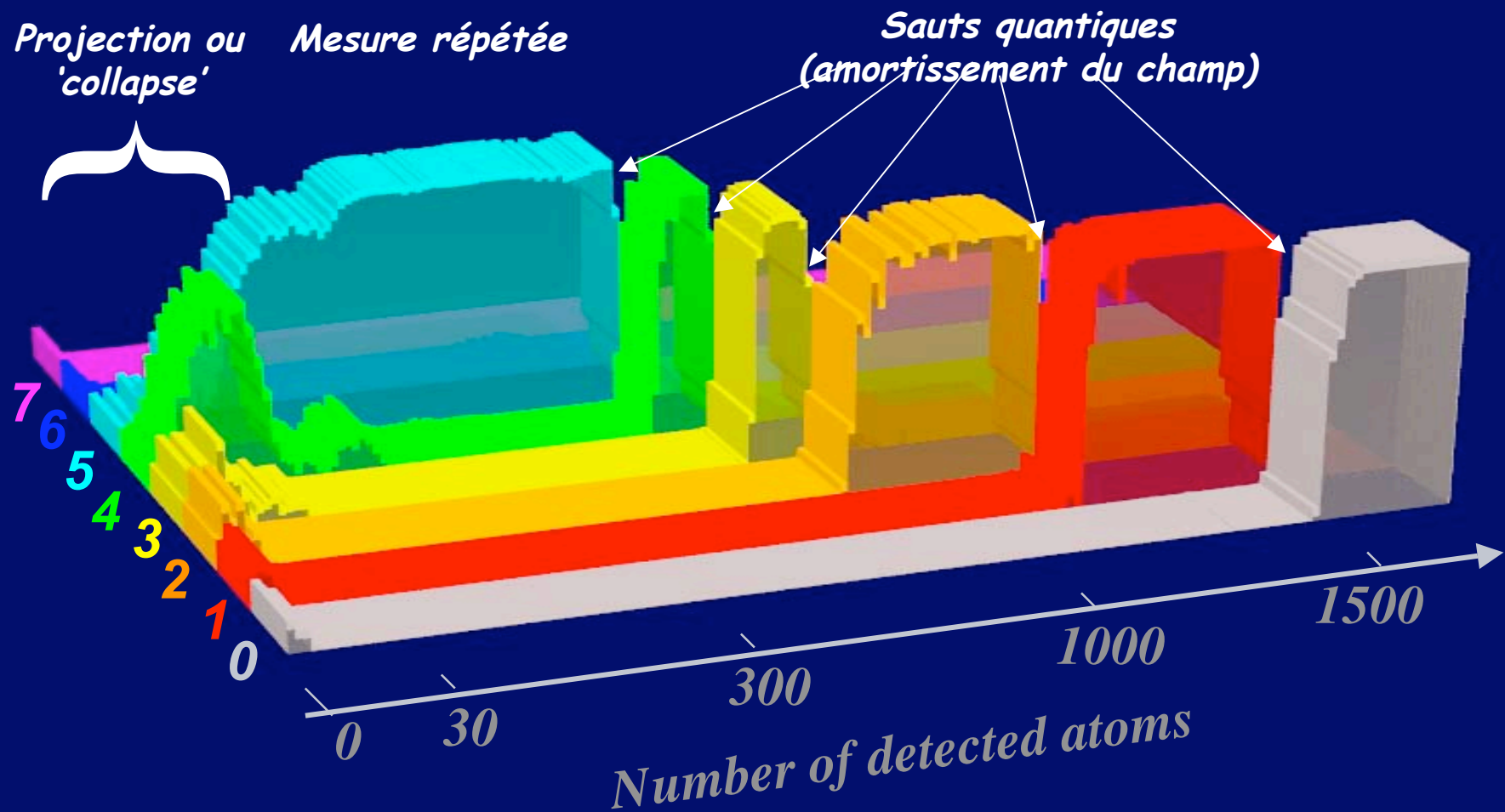


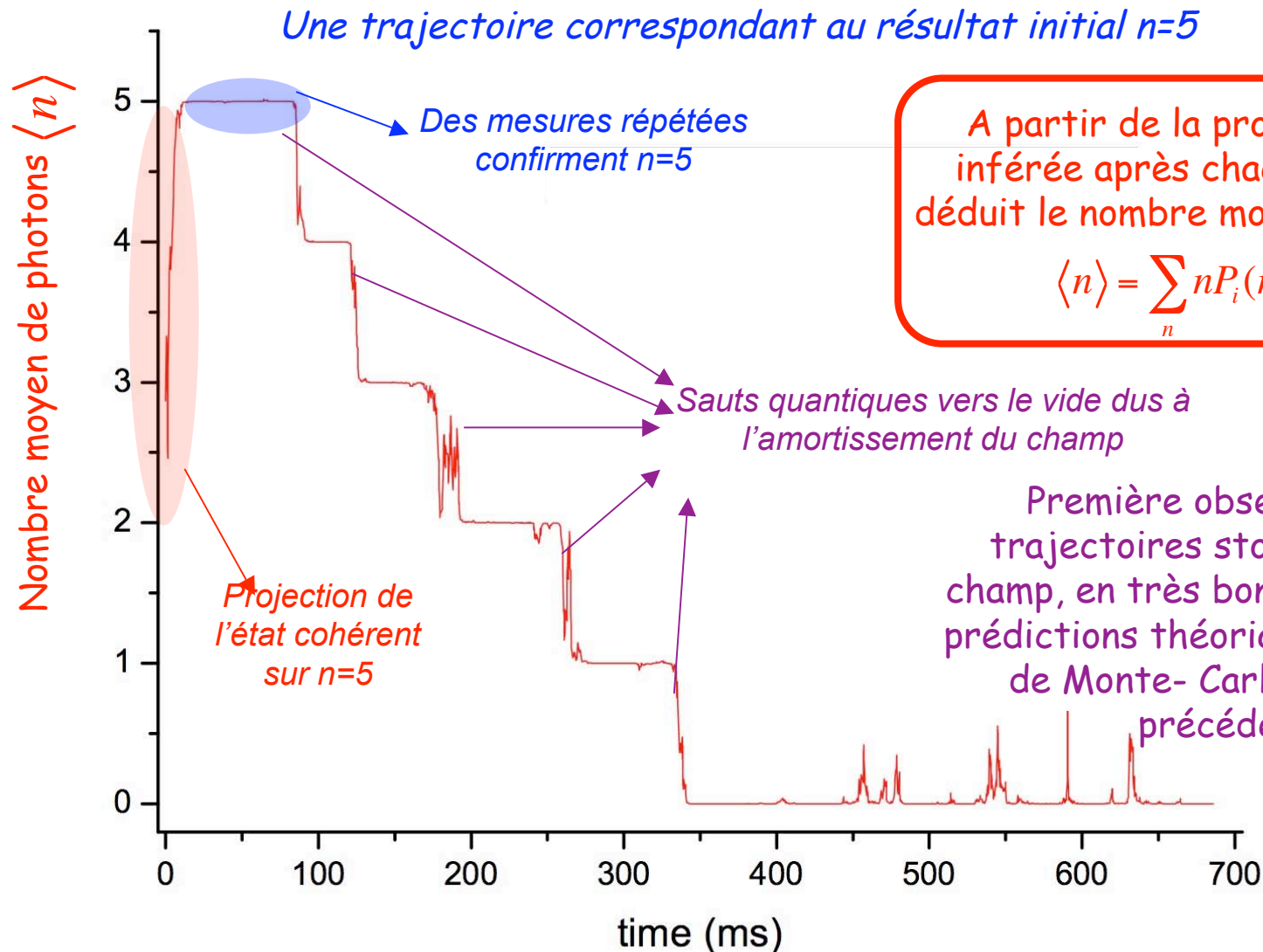
Illustration du postulat sur la statistique des résultats de
mesure

Evolution de la distribution de probabilité sur une longue séquence de mesures: encore les sauts quantiques



Distribution $P_i(n)$ obtenue à partir d'un échantillon «glissant» de 110 atomes.

Valeur moyenne du nombre de photons le long d'une longue séquence de mesure: observation d'une trajectoire stochastique



A partir de la probabilité $P_i(n)$ inférée après chaque atome, on déduit le nombre moyen de photons:

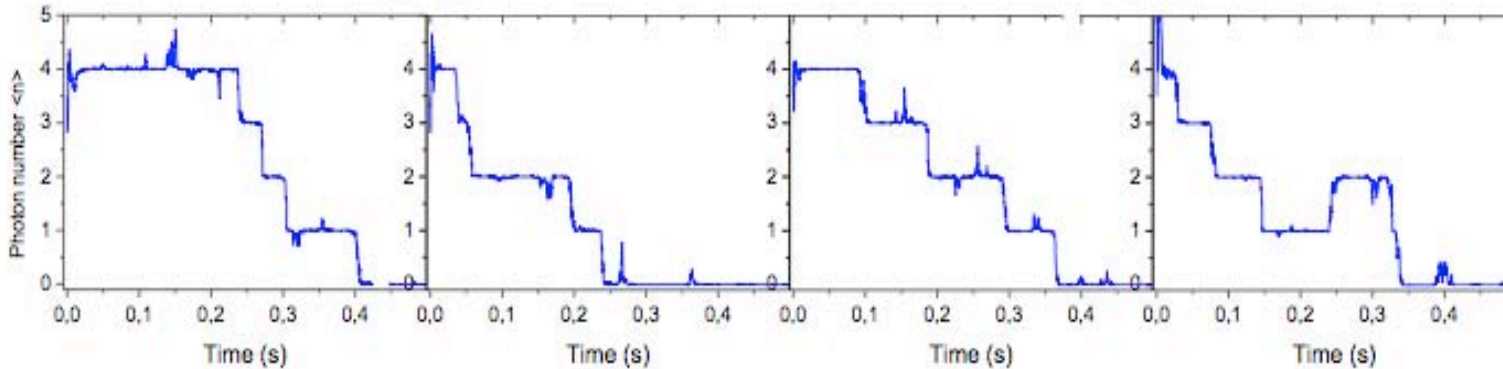
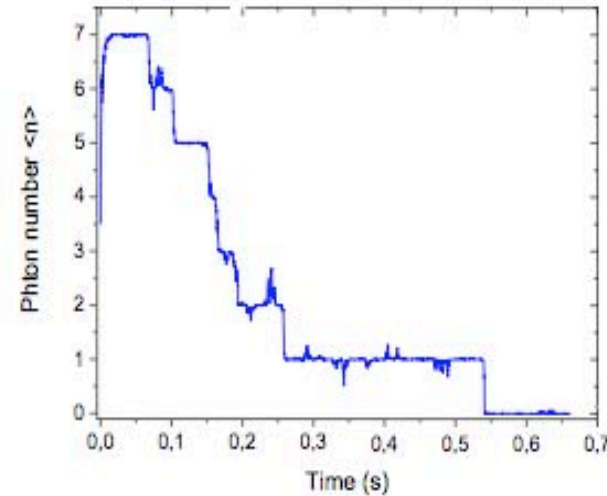
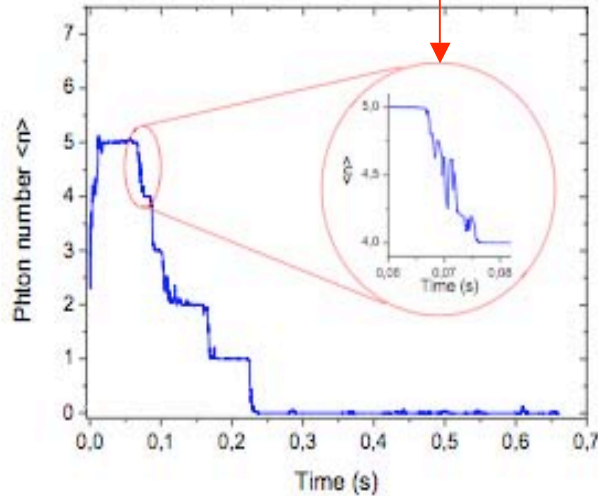
$$\langle n \rangle = \sum_n n P_i(n) \quad (6-10)$$

Première observation des trajectoires stochastiques du champ, en très bon accord avec les prédictions théoriques (simulations de Monte-Carlo. Voir cours précédents).

Autres trajectoires

Des trajectoires analogues on été observées sur un électron piégé. Il s'agit alors des sauts entre niveaux cyclotrons de l'électron. L'oscillateur est un système matériel et non un champ (Peil and Gabrielse, PRL 83, 1287 (1999)).

Les atomes mettent quelques ms pour 'réaliser' qu'un saut a eu lieu

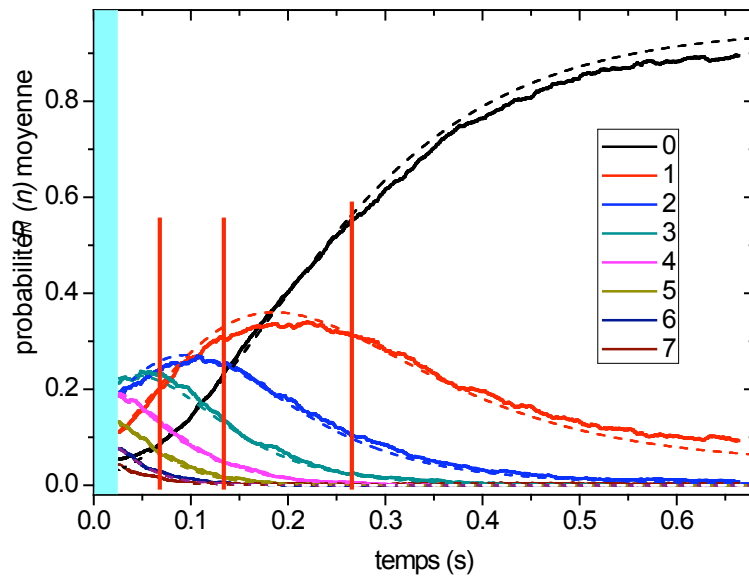


Quatre trajectoires suivant une projection initiale dans $n=4$

Processus fondamentalement aléatoire (la durée des paliers fluctue d'une réalisation à l'autre et seule leur statistique est calculable).

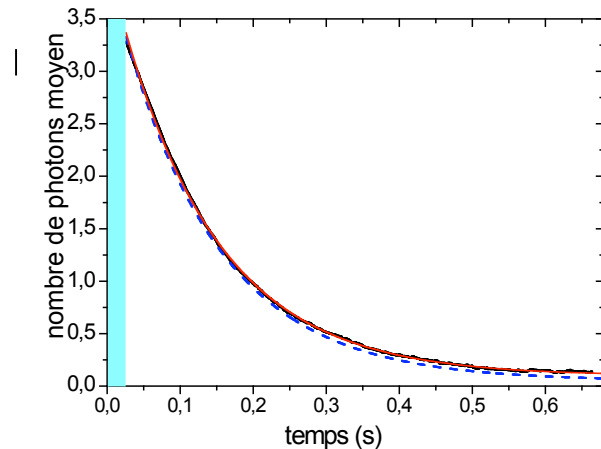
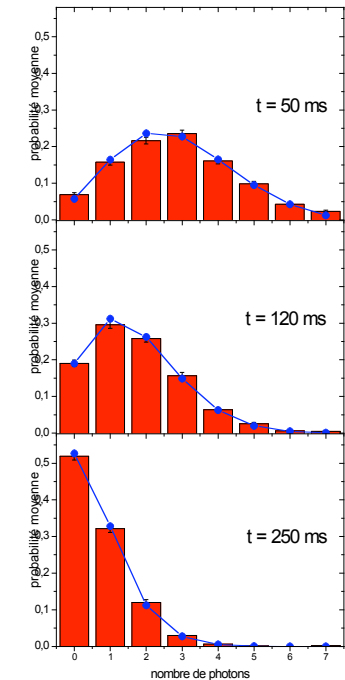
Analyse statistique des trajectoires: évolution du champ en fonction du temps

L'analyse de *l'ensemble des trajectoires* partant du même champ cohérent initial permet de reconstruire $\Pi(n,t)$, la probabilité de trouver n photons à l'instant t (à ne pas confondre avec la probabilité $P_i^{(N)}(n)$ du nombre de photons inférée après N atomes sur une trajectoire).



A gauche: Les probabilités $\Pi(n)$ en fonction du temps pour un état cohérent initial avec $n=3.5$. Traits pleins: expérience, traits pointillés: théorie. La barre bleue à $t \sim 0$ marque le temps mort de mesure initiale

A droite: Les histogrammes $\Pi(n)$ aux temps marqués par les 3 traits verticaux de la figure de gauche. Courbes bleues: théorie. La distribution du nombre de photons reste une loi de Poisson, comme prévu pour l'amortissement d'un état cohérent (voir cours antérieurs).



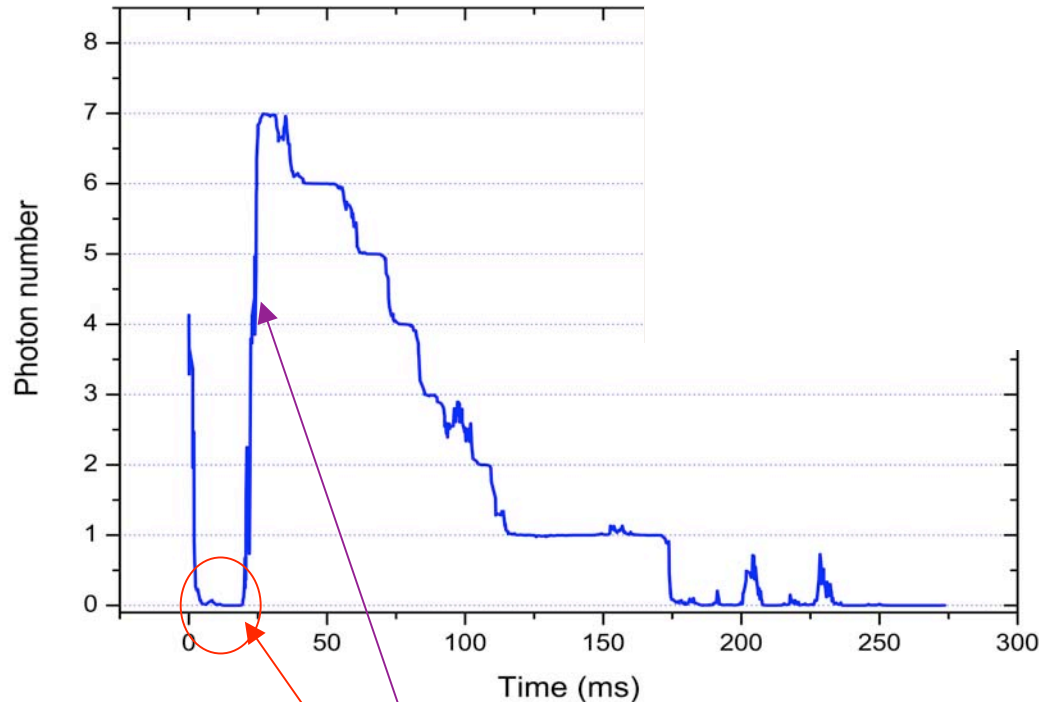
En bas: Evolution du nombre moyen de photons:

$$\bar{n}(t) = \sum_n n \Pi(n,t) \quad (6-11)$$

sur l'ensemble des trajectoires: les marches sont lissées et on retrouve la loi exponentielle de décroissance de l'énergie dans la cavité.

Au delà des états de Fock: génération d'états non classiques

Certaines trajectoires «bizarres» correspondent à la préparation d'états non-classiques de la forme $|n\rangle + |n+8\rangle$

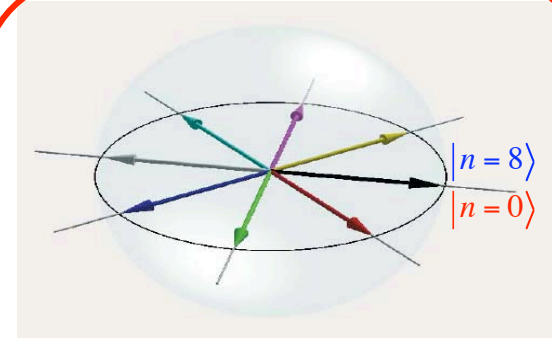


La détection QND modulo 8 peut projeter le champ dans une superposition cohérente du vide et de 8 photons (qui apparaît comme un zéro)

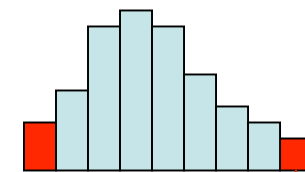
Amortissement suivant:

$$c_0 |0\rangle + c_8 |8\rangle \longrightarrow |7\rangle$$

La perte d'un photon augmente l'énergie moyenne!



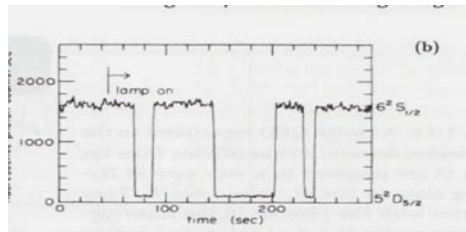
L'horloge interférométrique compte n modulo 8: elle ne distingue pas 0 et 8



$$\frac{c_0 |0\rangle + c_8 |8\rangle}{\sqrt{|c_0|^2 + |c_8|^2}}$$

Conclusion de la cinquième leçon

La détection QND d'un champ quantique dans une cavité permet pour la première fois d'observer les trajectoires stochastiques du champ, telles qu'elles sont prévues par la théorie (calcul Monte Carlo). Cette expérience correspond à une nouvelle façon de « voir la lumière » sans la détruire. Le rayonnement devient un objet qui peut être observé et manipulé de façon continue. Il y a là un dualisme frappant avec les expériences d'ions ou d'atomes piégés. Alors que dans celles-ci on confine les atomes pour les observer non-destructivement à l'aide de faisceaux laser, nous avons décrit dans cette leçon des expériences « duales » où on piège la lumière pour la détecter de façon QND à l'aide de faisceaux atomiques. Nous verrons dans la leçon 7 que ce dualisme peut être poussé plus loin. De même que l'on peut manipuler avec des lasers les ions pour préparer et reconstruire des états non classiques de la matière, nous pouvons grâce au couplage aux atomes, préparer et reconstruire des états non-classiques du champ.



Nagourney et al, PRL 56, 2797 (1986)

Ions piégés
et
trajectoires
stochastiques

Champ piégé
et
trajectoires
stochastiques

