# Intrication et information quantiques avec des atomes froids

Chaire de Physique Quantique- Cours 2006-2007

Nous poursuivons cette année la description d'expériences illustrant les méthodes de l'information quantique. Nous montrons comment la manipulation des atomes froids permet de réaliser des expériences d'*intrication* et la préparation de *superpositions mésoscopiques* d'états.

Une partie du cours sera consacrée aux atomes piégés dans des réseaux optiques. Ces cristaux optiques d'atomes constituent de véritables *simulateurs quantiques* de situations rencontrées en physique des solides, dont l'étude conduit à un rapprochement fécond entre l'optique quantique et la physique de la matière condensée.

#### **1.A**

#### Introduction: rappels sur l'information quantique

Rappels sur les concepts essentiels de l'information quantique, les qubits et les portes quantiques. Portes, intrication et mesure non destructive. Superpositions mésoscopiques d'états et décohérence.

#### **Qubits**

Système à deux états codant un bit (0/1).



Langage de la résonance magnétique: un qubit est représenté par un vecteur sur la sphère de Bloch

#### La sphère de Bloch d'un qubit



L'état le plus général d'un qubit est représenté par un vecteur sur la sphère de Bloch pointant dans la direction d'angles polaires , . Ce vecteur représente un spin pointant dans cette direction (état  $|0\rangle$  >).

$$|0\rangle_{,} = \cos(/2)|0\rangle + \sin(/2)e^{i}|1\rangle$$
$$|1\rangle_{,} = \sin(/2)|0\rangle \cos(/2)e^{i}|1\rangle (1 1)$$

La transformation unitaire la plus générale d'un qubit (porte à un bit) correspond à une rotation sur la sphère de Bloch.

# **Rotation d'un qubit**





Spin ou atome à 2 niveaux: une impulsion de champ résonnante fait tourner le vecteur de Bloch autour d'un axe équatorial (précession de Rabi). A partir de l'état |0>, on prépare l'état |0>, . La durée de l'impulsion fixe l'angle . La phase de l'impulsion détermine la direction de l'axe de rotation qui fixe .

Si le qubit est codé dans la polarisation d'un photon, la rotation est réalisée par une lame biréfringente produisant des déphasages dépendant de l'état de polarisation du champ.



Pour un qubit codé par un photon réparti entre deux modes, la rotation s'effectue à l'aide d'une lame séparatrice.

#### Rotation de qubit par lame séparatrice



#### Portes à deux qubits



#### Portes à deux qubits et intrication

Deux qubits ne peuvent être intriqués par des opérations locales à un bit. Ils le sont par action d'une porte à deux qubits:



La porte CNOT peut également séparer les bits et mesurer les états de Bell:



Ce circuit transforme les 4 états intriqués de Bell en 4 états de la base logique (|0,0>, |0,1>, |1,0> et |1,1>) qui peuvent être directement mesurés.

### **Rappels simples sur l'intrication**

#### Intrication entre A et B dans un cas pur:

Les systèmes sont séparables (non intriqués) si:  $|\rangle_{AB} = |\rangle_{A} |\rangle_{B}$  (1 8) Si l'état ne peut se mettre sous forme de produit, les systèmes sont intriqués et on peut écrire (*décomposition de Schmidt*):

 $| \rangle_{AB} = \sqrt{\frac{j}{j}} | \langle_{A} \rangle_{A} | \langle_{B} \rangle_{B}$  (les  $_{j}$  et  $_{j}$  orthonormés; au moins 2 des  $_{j}$  0) (1 9) Les  $_{j}$ , positifs, sont les valeurs propres non nulles de la matrice densité (commune) décrivant les sous-systèmes A et B.

#### **Entropie d'intrication (cas pur):**

 $S = \int_{j} \log_{j} (S = 0 : pas \ d'intrication ; S = \log_{2} N : intrication \ max. (A \ et \ B \ ont \ N \ \acute{e}tats)$ (1 10)

Intrication d'un mélange statistique:

Un mélange statistique de A et B est non-intriqué (séparable) si son opérateur densité est de la forme:

$$= P_{k} A_{k}^{(A)} A_{k}^{(B)} (les P_{k} réels > 0 avec P_{k} = 1) (1 11)$$
  
Si l'opérateur densité ne se met pas sous cette forme, A et B sont intriqués. La mesure de l'intrication est plus délicate à définir que pour un cas pur. Peut être le sujet d'un cours ultérieur...

#### Porte CNOT, mesure QND et états GHZ $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ $c_0 |0\rangle |0\rangle + c_1 |1\rangle |1\rangle$ $c_0 |0\rangle |0\rangle + c_1 |1\rangle |1\rangle$

Dans l'opération d'une CNOT, le bit contrôle est mesuré de façon non destructive (QND) par le bit cible jouant le rôle de *mètre*. La détection finale du bit cible projette le bit contrôle dans l'état correspondant au résultat de la mesure, avec la probabilité  $|c_i|^2$ (i=0,1). L'opération, *non-destructive*, peut être répétée un nombre arbitraire de fois:



Un état GHZ dans lequel chaque<br/>qubit est maximalement intriqué<br/>avec les N-1 autres $c_0 | 0 \rangle$  $|0,0,0...0\rangle + c_1 | 1 \rangle$  $|1,1,1...1\rangle$ 

Si N est grand, cet état peut être vu comme un « chat de Schrödinger »

## Décohérence des superpositions mésoscopiques

Supposons qu'un quelconque des Nqubits s'intrique à l'environnement (vu comme un qubit  $|0/1_E>$ ):

 $| \rangle_{chat} | 0_E \rangle c_0 | 0 \rangle | 0,0,0...0 \rangle | 0_E \rangle$  $+ c_1 | 1 \rangle | 1,1,1...1 \rangle | 1_E \rangle$ (1 12)



*La trace sur l'environnement* conduit à un mélange statistique pour le système des N qubits:

 ${}_{N} = Tr_{E} {}_{N+E} = |c_{0}|^{2} |0,0,0,0...0\rangle \langle 0,0,0,0...0| + |c_{1}|^{2} |1,1,1,1...1\rangle \langle 1,1,1,1...1|$ (1 13)

La disparition des cohérences de l'état de type « chat » correspond au phénomène de décohérence. En général, le temps de décohérence varie en 1/N. Il est d'autant plus rapide que le système est plus grand.

#### Caractère universel des portes de phase et CNOT. Principe du calcul quantique

Toute porte à deux qubits control-U peut se décomposer en un produit de CNOTs et de portes à un bit (ou en un produit de portes de phase et de portes à un bit). Toute transformation unitaire d'un ensemble de *N* bits peut s'écrire comme un circuit quantique impliquant uniquement des portes CNOT (ou de phase) et des portes à un bit. Tout calcul de fonction peut donc se décomposer en un produit de CNOTs et de rotations de qubits. Les algorithmes quantiques exploitent ces propriétés pour résoudre certains problèmes de façon plus rapide (avec moins d'opérations) que par des méthodes de calcul classiques. Superpositions d'états, interférences et intrication jouent un rôle essentiel dans ces algorithmes. Il faut réaliser les portes avec une excellente fidélité et combattre la décohérence à l'aide de codes correcteurs qui détectent les erreurs et en corrigent les effets. Le principe est bien établi, mais la réalisation pratique à grande échelle est très difficile...

#### **1.B.**

### La physique des portes quantiques: exemples de réalisations

Rappel sur les portes atome-photon en CQED. Rôle essentiel de l'interaction non-linéaire atome-champ dans ces portes. Analogie avec les portes entre ions piégés. Portes photoniques réalisées avec des lames séparatrices. Comment la non-linéarité nécessaire à la réalisation de portes est introduite dans ce cas par la mesure, dans un processus de post - sélection. Caractère probabiliste de ces portes. Principe de l'ordinateur «tout optique». Intérêt des atomes froids comme porteurs de qubits pour la réalisation de portes. Plan général du cours.

# Electrodynamique en cavité: interaction d'un atome à deux niveaux avec un mode



Atomes de Rydberg interagissant fortement avec le champ: oscillation de Rabi plus rapide que la dissipation.

La « collision » cohérente atome-photon permet de réaliser différents types de portes, soit (dans le cas résonnant) en exploitant le déphasage produit sur l'état de l'atome par une oscillation de Rabi complète, soit (dans le cas non-résonnant) en utilisant le déplacement d'énergie produit par le champ d'un photon sur l'atome (équivalent à un effet Kerr).



Le couplage induit par laser entre états internes et mouvement de vibration d'ions piégés obéit à une équation d'évolution analogue. La porte ionique de Cirac-Zoller fonctionne suivant le même principe (voir cours 2005-2006).

#### Porte dispersive:une utilisation des déplacements lumineux



de façon non-destructive

Mesurer le déplacement de phase de la cohérence atomique pendant la traversée de la cavité par interferométrie de Ramsey

#### Porte de phase par couplage spin-oscillateur dispersif en CQED

 $V = i \frac{\hbar}{2} a_{+} a^{\dagger} \qquad (1 \quad 16) \quad \text{Désaccord de fréquence:} = e_{g}$ 

Couplage effectif au second ordre de perturbation:

$$V_{eff} = \frac{V|e,n-1\rangle\langle e,n-1|V}{E-E_{e,n-1}} + \frac{V|g,n+1\rangle\langle g,n+1|V}{E-E_{g,n+1}} = \frac{\hbar^{-2}}{4} a^{\dagger}a_{-+} a^{\dagger}$$



En ajoutant deux portes de Hadamard (impulsions /2 sur le qubit atomique avant et après la porte de phase), on change la porte de phase en CNOT: l'atome mesure de façon non destructive le photon (*voir séminaire de Stefan Kuhr le 11 Décembre prochain*).

#### Portes de phase «tout optique»

Qubits photoniques à 2 modes couplés par lames semi-réfléchissantes:



L'aiguillage d'un photon entre les deux voies est donné par la matrice unitaire de transfert de la lame (eqn.1-2, transformation de Hadamard). La «*collision de deux photons* » (deuxième ligne de l'eqn.1-20) est analysée page suivante.

#### Collision de deux photons sur lame semiréfléchissante

De la matrice de transfert des états, on déduit la transformation des opérateurs création de photons dans les modes b et c:

$$U|1,0\rangle_{bc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle_{bc} + |0,1\rangle_{bc}) \qquad Ub^{\dagger}U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b^{\dagger} + c^{\dagger})$$
$$U|0,1\rangle_{bc} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle_{bc} - |0,1\rangle_{bc}) \qquad Uc^{\dagger}U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b^{\dagger} - c^{\dagger}) \quad (1 \quad 21)$$

D'où la transformation de l'état |1,1><sub>bc</sub>:

$$U|1,1\rangle_{bc} = Ub^{\dagger}c^{\dagger}|0,0\rangle_{bc} = Ub^{\dagger}U^{-1}Uc^{\dagger}U^{-1}U|0,0\rangle_{bc} = \frac{1}{2}(b^{\dagger}+c^{\dagger})(b^{\dagger}-c^{\dagger})|0,0\rangle_{bc}$$
$$= \frac{1}{2}(b^{\dagger 2}-c^{\dagger 2})|0,0\rangle_{bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,0\rangle_{bc}-|0,2\rangle_{bc}) \quad (1 \quad 22)$$

Photons groupés dans l'un ou l'autre mode de sortie (Effet Hong-Ou-Mandel).



#### Interféromètre avec déphasage non linéaire



## **Porte CNOT optique**



En ajoutant deux lames séparatrices mélangeant les modes du qubit cible, on réalise deux Hadamard qui transforment la porte de phase en une CNOT

Le dispositif réalise en principe une collision entre deux photons analogue à la collision atome-photon de la porte CQED (le Hamiltonien en  $a^{\dagger}a_{+}$  devient un terme non linéaire en  $(b^{\dagger}b)^2$  +  $(c^{\dagger}c)^2$ ). Les non-linéarités dans un milieu matériel réel sont cependant négligeables au niveau du photon, bien trop faibles pour pouvoir réaliser la porte de cette façon...

# Déphasage non-linéaire induit par une mesure: porte «post sélectionnée»

On veut réaliser un dispositif qui effectue la transformation non linéaire:

SNL



 $\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle$ 

$$\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle \quad a_2 |2\rangle$$

Dispositif interférométrique à 3 modes , , couplés par 3 lames de coefficients de réflexion  $cos^2(_i/2)$  (*i*=1,2,3). On injecte l'état | > dans le mode , 1 photon dans le mode et le vide dans le mode . On appelle P la probabilité jointe pour que les détecteurs dans les modes et (supposés parfaits) détectent respectivement 1 et 0 photons.

On peut choisir les *i* pour que cette combinaison de « clics » projette avec la probabilité P=1/4 le mode dans l'état final | '> (voir page suivante).

# Porte non-linéaire post sélectionnée (suite)



La conservation du nombre de photons impose que les projections induites par la mesure satisfont les relations:

$$\begin{vmatrix} \rangle = |0\rangle \quad \stackrel{projection}{} \quad | \quad '\rangle = C_0 |0\rangle$$
$$\begin{vmatrix} \rangle = |1\rangle \quad \stackrel{projection}{} \quad | \quad '\rangle = C_1 |1\rangle$$
$$\begin{vmatrix} \rangle = |2\rangle \quad \stackrel{projection}{} \quad | \quad '\rangle = C_2 |2\rangle$$

où les  $C_j$  (j=0,1,2) sont des amplitudes dépendant des  $_j$ .

On impose aux  $C_j$  de satisfaire les relations:  $C_0 = C_1 = C_2 = 0,5$  ce qui donne trois équations fixant les *j*:

$$\cos\frac{1}{2} = \cos\frac{3}{2} = \frac{1}{\sqrt{4} - 2\sqrt{2}}; \cos\frac{2}{2} = \sqrt{2} - 1 \quad (1 - 27)$$

Par linéarité, on en déduit que la mesure post-sélectionne avec la probabilité 0,25 les événements qui correspondent à la transformation cherchée:

$$a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle$$
 probabilité 0.25  $a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle \quad a_2 |2\rangle$  (1 28)

# **Porte CNOT post sélectionnée réalisée avec des composants linéaires (10 lames)**



Opération conditionnée aux résultats de la mesure de 4 détecteurs (probabilité de succès 1/16). La porte peut devenir *quasi-déterministe* si on combine son opération avec la téléportation des qubits contrôle et cible. *Voir Knill, Laflamme et Milburn, Nature ,409, 46 (2001) et Ralph et al, PRA 65, 012314 (2001).* 

# Caractéristiques des portes logiques réalisées en optique quantique: intérêt des atomes froids

Portes basées sur le déphasage accumulé au cours d'une collision contrôlée:

Collision entre un atome et un photon dans une cavité en CQED

lons couplés par laser via l'excitation de degré de vibration dans les expériences d'ions piégés (voir Cours 2005-2006).

Collisions entre photons dans un milieu non-linéaire (simulé en pratique par un processus de post-sélection).

Ces collisions sont cohérentes. Dans les expériences dispersives, elles induisent simplement un déphasage de l'un des quatre états du système des deux qubits. Ce déphasage peut être transformé en un basculement conditionnel d'un qubit (porte CNOT) à l'aide d'un dispositif interférentiel réalisant la succession des deux Hadamard encadrant la porte de phase.

Des collisions contrôlées analogues peuvent être réalisées dans des expériences d'atomes ultrafroids. Ces collisions permettent de construire des dispositifs de portes quantiques et conduisent à des d'expériences nouvelles sur l'intrication et la décohérence.

#### Plan du Cours 2006-2007 2<sup>ème</sup> Leçon (6 Novembre)

Introduction à la physique des atomes froids: rappel sur les méthodes de refroidissement radiatif et de piégeage. Notion sur le refroidissement évaporatif et la condensation de Bose Einstein. Propriétés essentielles des condensats. Méthodes d'étude et de diagnostic.

Les collisions élastiques jouent un rôle essentiel dans la physique des gaz ultra-froids. Elles fournissent également des mécanismes pour coupler les atomes entre eux et réaliser des portes quantiques et de l'intrication. Nous présentons les propriétés essentielles de ces collisions. Nous montrons que les collisions à basse énergie impliquent essentiellement des ondes de diffusion S à symétrie sphérique, entièrement caractérisées par un seul paramètre: la longueur de diffusion  $a_s$ . Nous montrons comment cette quantité et son signe - dépendent des propriétés du potentiel diffuseur et comment on peut les ajuster (résonances de Feshbach). Nous introduisons ensuite un modèle dit de champ moyen, dans lequel le potentiel de diffusion réel est remplacé par un potentiel effectif de contact, ayant la même longueur de diffusion que le potentiel réel, mais traitable par une approximation de premier ordre, ce qui revient à considérer que chaque atome interagit «faiblement» et de façon binaire avec tous les autres.

#### Plan du Cours 2006-2007 (suite) 3<sup>ème</sup> Leçon (13 Novembre 2006)

On aborde dans cette leçon la physique très riche des condensats bi-modaux, dans lesquels les bosons se répartissent entre deux états. On considère explicitement le cas de condensats spatialement distribués entre deux puits séparés par une barrière. L'analogie entre l'effet tunnel et celui d' une lame séparatrice en optique est rappelée. Les états stationnaires de ce système et ses propriétés dynamiques résultent de la compétition entre l'échange des particules par effet tunnel et les effets répulsifs ou attractifs du champ moyen induit par les collisions dans chaque puits. Nous étudions d'abord l'état fondamental du système, en montrant que l'effet tunnel crée des fluctuations de population entre les deux puits alors que les collisions répulsives tendent à figer ces fluctuations. Si l'interaction est attractive, elle tend à donner à l'état fondamental une structure de type chat de Schrödinger. Nous abordons enfin l'étude des effets dynamiques, qui rappellent l'effet Josephson de la physique des supraconducteurs. Ici encore, les collisions jouent un rôle important. Elles induisent un comportement non-linéaire qui peut conduire à un gel des oscillations de type Josephson (self-trapping des populations), lorsque la différence des populations des deux puits dépasse une valeur critique.

#### Plan du Cours 2006-2007 (suite) 4<sup>ème</sup> Leçon (20 Novembre 2006)

Nous continuons l'étude des condensats bimodaux en les décrivant par un modèle de moment angulaire collectif, déjà utilisé dans les cours antérieurs. Ce modèle introduit une analogie entre un condensat bimodal et un ensemble symétrique de spins 1/2. Nous montrons comment des états intriqués, analogues aux états comprimés de spins, peuvent être préparés dans des ensembles d'atomes froids. Nous étudions également le phénomène d'effondrement et de résurgence périodique de la phase d'un condensat bimodal, que nous comparons avec le «collapse et revival» de la phase d'un champ dans un milieu de type Kerr en optique quantique. Nous montrons que ce phénomène conduit à la génération de chats de Schrödinger dans les condensats et présentons une analogie entre ces «chats bosoniques» et les chats ioniques réalisés sur des chaînes d'ions piégés (cours 2005-2006). Le lien entre ces états de type chat et l'interférométrie multi-atomique sera également présenté.

#### Plan du Cours 2006-2007 (suite) 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> Leçons (4 et 11 Décembre 2006)

Les deux dernières leçons seront consacrées à l'étude des réseaux optiques d'atomes froids. Nous présenterons le modèle de Bose-Hubbard qui décrit le comportement des atomes froids dans un réseau de puits à trois dimensions. Ce modèle rappelle celui de la théorie des bandes électroniques dans un réseau cristallin (à l'approximation de la liaison forte). Nous décrirons diverses méthodes de manipulation de atomes dans ces réseaux de puits: comment les initialiser en peuplant de façon régulière les puits, comment minimiser les défauts, comment utiliser des structures multi-puits pour faire de l'interférométrie atomique, comment réaliser des portes et de l'intrication massive conduisant à des états de type GHZ ou «cluster».

Comme ce plan l'indique, il ne s'agit pas ici d'un cours complet d'information quantique avec des atomes froids. Nous utilisons plutôt le thème de la manipulation des atomes comme un prétexte pour aborder l'étude d'effets physiques intéressants, en établissant des liens entre l'optique quantique, la physique atomique et celle de la matière condensée. Le cours de cette année et ceux des années antérieures sont consultables sur les serveurs du Collège de France et du Département de Physique de l'ENS (www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/college/college.html) et sur www.cqed.org

La matière des cours des années 2001 à 2007 a servi de base à un livre de Serge Haroche et Jean-Michel Raimond:



#### Exploring the Quantum Atoms, cavities and Photons

S.Haroche and J-M.Raimond Oxford UP (Septembre 2006)

#### Séminaires de l'année 2006-2007 (les lundis à 11h)

30 octobre 2006 : Production et observation d'atomes corrélés Christoph WESTBROOK, Institut d'Optique, Orsay

6 novembre 2006 : Quantum optics and condensed matter physics with cold polar molecules Peter ZOLLER, Université d'Innsbruck (Autriche)

13 novembre 2006 : Single atoms trapped on a microchip Vladan VULETIC, MIT, Cambridge (Etats-Unis)

20 novembre 2006 : Oscillations de spin cohérentes dans les réseaux optiques Fabrice GERBIER, Université de Mayence (Allemagne) et Laboratoire Kastler Brossel de l'ENS, Paris

27 novembre 2006 : pas de séminaire

4 décembre 2006 : Circuit quantum electrodynamics : quantum optics on a chip Robert SCHOELKOPF, Université de Yale (Etats-Unis)

11 décembre 2006 : Observer la naissance, la vie et la mort d'un photon Stefan KUHR, Laboratoire Kastler Brossel de l'ENS, Paris et Université de Mayence (Allemagne)