

Cours 2006-2007: Deuxième Leçon

6 Novembre 2006

Condensation de Bose-Einstein et physique des collisions d'atomes froids

2A. Atomes froids et condensats de Bose-Einstein

**2B. Propriétés des collisions atomiques à très
basse énergie**

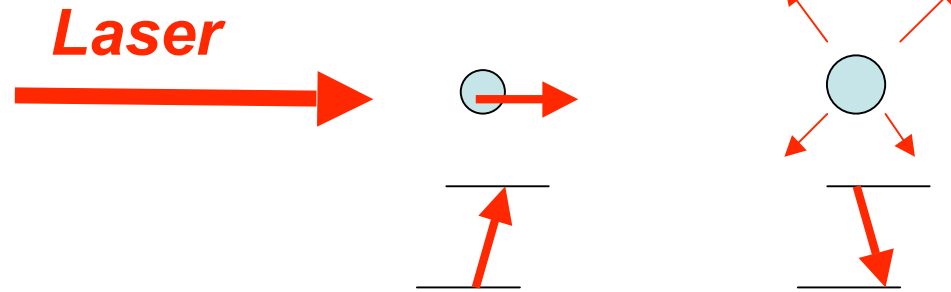
2A

Atomes froids et condensats de Bose-Einstein

Généralités sur les forces radiatives (résonnantes et dispersives) et la manipulation des atomes froids. Description qualitative du refroidissement par évaporation et de la condensation de Bose Einstein des atomes ultra-froids.

Interaction atome-lumière: 2 types de forces

1. Force résonnante: la pression de radiation:



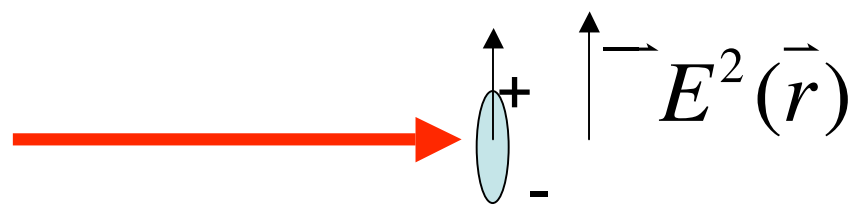
L'atome encaisse l'impulsion d'un photon laser à l'absorption et ré-émet spontanément avec probabilités égales dans des directions opposées: l'effet net est une force alignée le long du faisceau laser.

En exploitant l'effet Doppler (laser légèrement désaccordé vers le rouge), on réalise des configurations de faisceaux laser qui ralentissent l'atome dans toutes les directions (mélasses optiques). Effet décrit dans le cours 2005-2006 pour des ions piégés. La force résonnante présente des fluctuations autour de sa moyenne, d'où une limite au refroidissement laser réalisable par cette force ($k_b T_D \sim \hbar$, où est la largeur naturelle de l'état excité, voir cours 2005-2006). On a typiquement (atomes alcalins): $T_D \sim 200$ K.

En combinant la force de pression de radiation avec l'effet d'un gradient de champ magnétique qui, par effet Zeeman, rend les atomes résonnants en certains points de l'espace, on réalise des configurations qui piègent spatialement les atomes froids (pièges magnéto-optiques **MOT**)

Les deux types de forces lumineuses (suite)

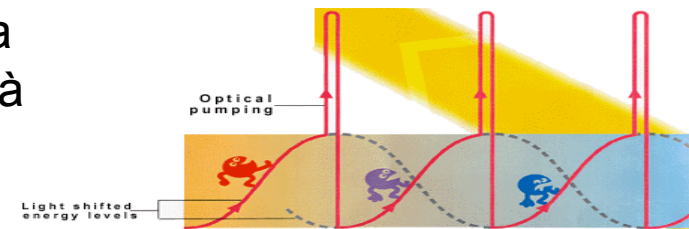
2. Interaction non-résonnante: la force dipolaire



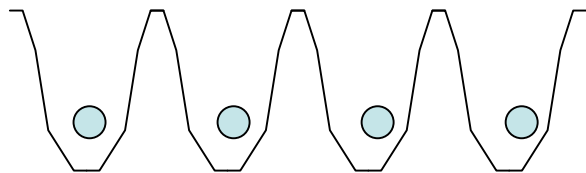
Un laser non-résonnant induit un dipôle sur l'atome (effet d'indice). Ce dipôle subit une force dans le gradient de l'intensité lumineuse.

Interprétation équivalente: le champ non résonnant déplace les niveaux atomiques. Comme l'intensité du champ varie spatialement, il en résulte une force. L'atome évolue dans un potentiel optique $U(r)$ proportionnel à l'intensité lumineuse. Dans le régime dispersif, ce potentiel est inversement proportionnel au désaccord de fréquence atome-laser. Le signe du potentiel dépend de celui du désaccord. Si le laser est décalé vers le bleu (rouge), l'atome est repoussé (attiré) par les fortes intensités. On réalise ainsi des pièges optiques.

Pour des atomes à plusieurs états fondamentaux, la force dipolaire, combinée au pompage optique, est à l'origine du processus de refroidissement Sisyphé (*température limite* $\sim 1 \text{ K} \ll T_D$).



Atomes ultra-froids piégés dans une onde stationnaire:



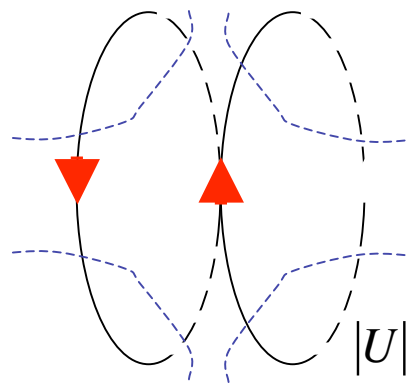
L'onde crée un potentiel périodique qui piège les atomes ultra-froids dans les nœuds (décalage bleu) ou ventres (décalage rouge)

Pièges dipolaires et magnétiques: Ordres de grandeur

Ordre de grandeur des profondeurs de piège dipolaires:

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } & \gg \frac{E D}{\hbar}, \quad : & P_L = 1W / mm^2 & \quad \frac{E D}{h} \sim 100 MHz \\
 & & & \quad / 2 = 1GHz \\
 U \sim \frac{(E D)^2}{\hbar} & \sim P_L \frac{e^2 a_0^2}{2 \hbar c} = \frac{1}{137} \frac{2}{2} P_L a_0^2 & & |U| \sim 2 \cdot 10^{-26} J \sim 1,5 mK
 \end{aligned}$$

Pièges magnétiques: Les atomes froids peuvent aussi être piégés dans le noir par un gradient de champ magnétique.



$$|B| = B_0 (x^2 + y^2 + 4z^2)^{1/2}$$

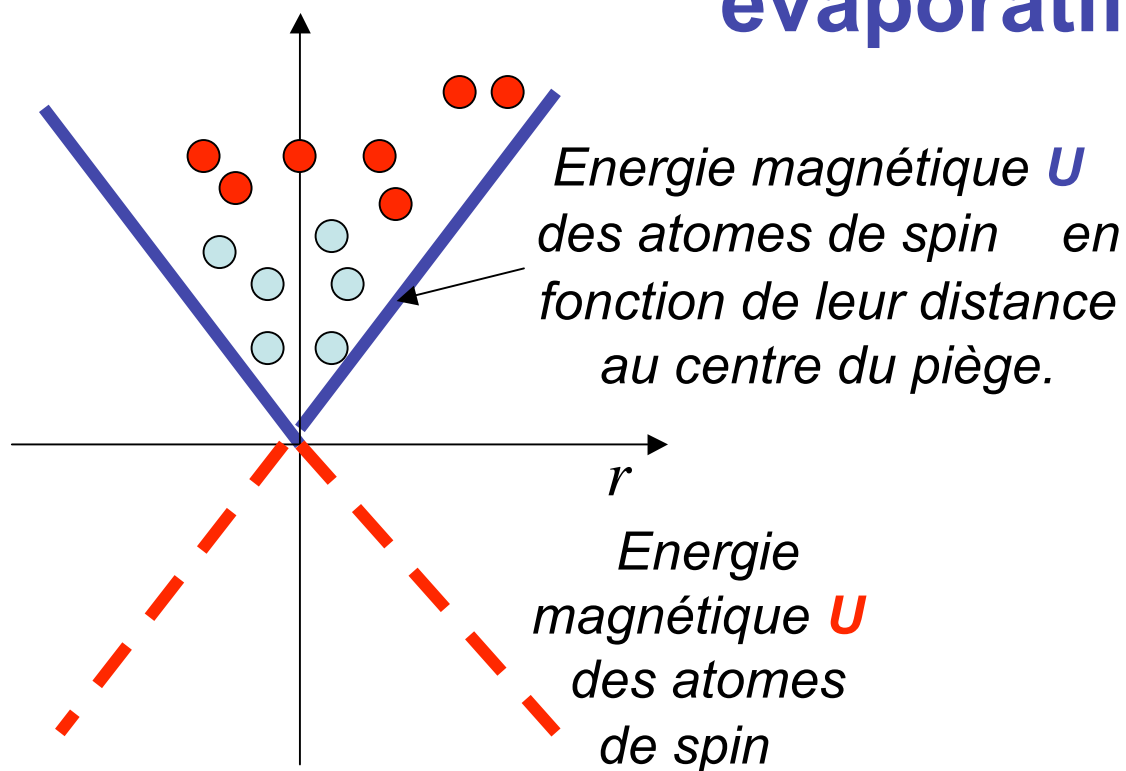
$$B_0 \sim 100G / cm = 1T / m$$

$$|U| \sim B_{\max} \frac{e\hbar}{2m} \sim 7 \cdot 10^{-2} K (B_{\max} = 0.1T)$$

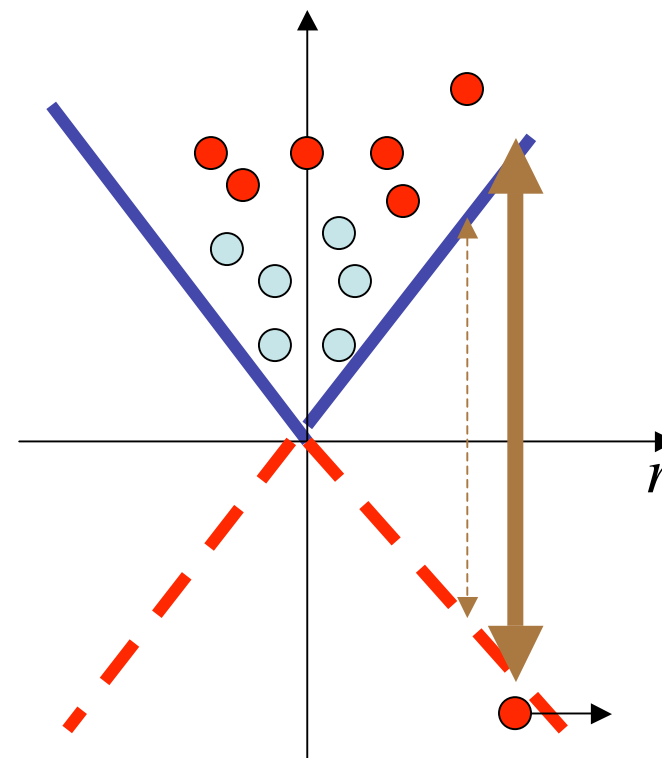
Bobines anti-Helmholtz

Les pièges magnétiques ou dipolaires sont largement assez profonds pour retenir des atomes refroidis par laser (température de refroidissement typique de l'ordre de μK).

Piégeage magnétique et refroidissement évaporatif



Les atomes les plus chauds s'éloignent le plus du centre du piège



En appliquant une **radiofréquence (rf) résonnante** avec les atomes les plus énergétiques, on fait basculer leur spin, ce qui les expulse du piège.

Evaporation des atomes les plus énergétiques. En balayant la fréquence de la radiofréquence vers le bas, on expulse des atomes de plus en plus froids. Les atomes restants se thermalisent par collisions et le gaz se refroidit.

La condensation de Bose-Einstein

Si l'évaporation est réalisée dans des conditions optimales sur un gaz de bosons (atomes à nombre pair de protons+neutrons+électrons), la température atteint une valeur T_{BE} telle que la longueur d'onde de de Broglie devient de l'ordre de la distance moyenne entre atomes. Une fraction des atomes s'accumule alors dans l'état fondamental du piège. Cette fraction augmente quand T diminue et devient supérieure à 99,9% pour $T/T_{BE} \sim 1/10$. Un ensemble macroscopique d'atomes occupe le même état.

Fréquence d'oscillation, fluctuation de position et énergie de point zéro typiques pour des atomes de Rb dans un piège magnétique isotrope:

$$\omega_{oh} = 10^3 \text{ s}^{-1} ; a_{oh} = \sqrt{\hbar / m \omega_{oh}} \sim 1 \text{ m} ; T_{oh} = \hbar \omega_{oh} / k_b \sim 5 \text{ nK}$$

Rayon a_T du volume occupé par le gaz non condensé en fonction de T :

$$a_T \sim (2k_B T / m \omega_{oh}^2)^{1/2}$$

Distance moyenne entre atomes à la température T :

$$r_{int}(T, N) = a_T (4 / 3N)^{1/3}$$

La longueur d'onde de de Broglie égale r_{int} lorsque:

$$(2 \hbar^2 / m k_B T)^{1/2} = a_T (4 / 3N)^{1/3}$$

$$T = T_{BE} \sim 1,1 N^{1/3} T_{oh}$$

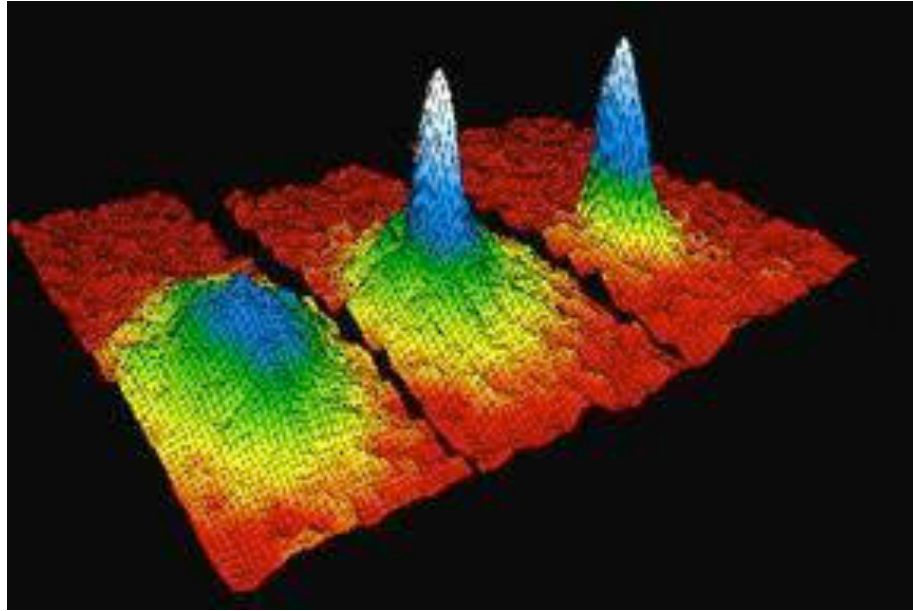
valeur très proche du résultat exact:

$$T_{BE} \sim 0,94 N^{1/3} T_{oh}$$

Typiquement:

$$T_{BE} \sim 500 \text{ nK} \text{ pour } N = 10^6$$

Condensation de Bose-Einstein (suite)



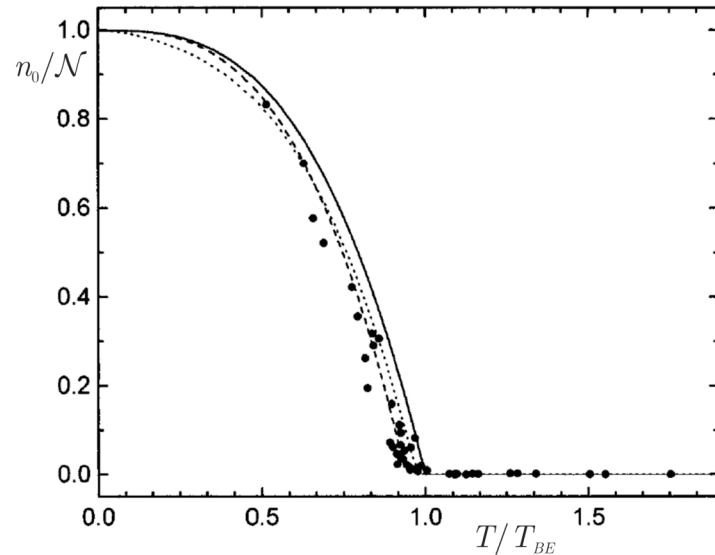
Le premier condensat (Cornell et al, Boulder)

celle des vitesses atomiques au moment où le gaz a été libéré (*si N est très grand, la distribution après expansion est déterminée par les interactions entre atomes -voir plus loin*). Les 3 images reconstituent en représentation 3D la distribution des impulsions atomiques dans un plan pour trois températures $T > T_{BE}$, $T \sim T_{BE}$ et $T < T_{BE}$ (*1^{er} condensat à petit nombre d'atomes*). La transition de phase est claire. On distingue bien la fraction condensée (pic étroit à l'origine) du fond thermique non condensé (piédestal). Expériences réalisées depuis avec Na , Rb , K , Li , Cs , He , Yb ...et H (avec une technique différente).

Observation du phénomène:

On supprime soudainement le piège et on laisse le gaz se dilater et tomber. On mesure après un temps d'expansion sa forme et sa taille en détectant l'ombre qu'il projette sur un écran lorsqu'il est éclairé par un faisceau laser résonnant. La distribution des atomes reproduit, si le nombre d'atomes n'est pas trop grand,

Condensation de Bose-Einstein (suite)



Fraction condensée en fonction de la température

$$\frac{n_0}{N} \sim 1 - \left(\frac{T}{T_{BE}}\right)^3$$

Si $N < 1000$, condensation pratiquement complète pour $T/T_{BE} \sim 0,1$

Importance des collisions dans la formation des condensats et pour la compréhension de leurs propriétés:

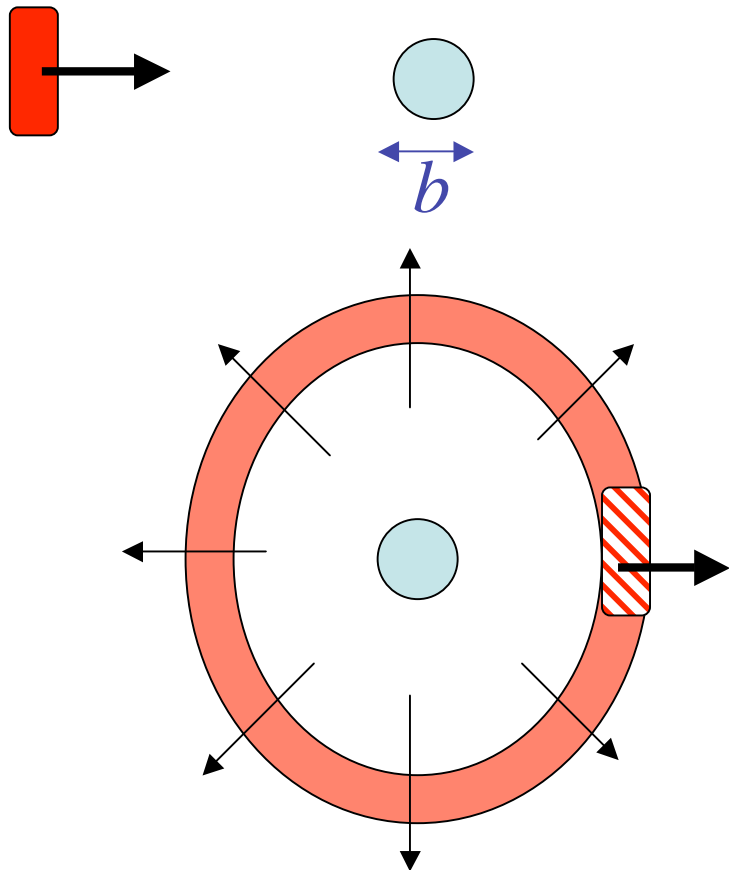
Les collisions élastiques binaires sont essentielles pour permettre la thermalisation du gaz pendant la phase d'évaporation. Ces collisions déterminent également certaines propriétés importantes de la phase condensée. En introduisant un couplage entre les particules, elles sont enfin essentielles pour réaliser des opérations d'information quantique avec des atomes froids (qu'il s'agisse d'atomes condensés ou non). Nous allons décrire de façon détaillée ces processus de collision, dont la physique est en elle-même très riche.

2B.

Propriétés des collisions atomiques à très basse énergie

Rappels sur la théorie des collisions élastiques. Développement en ondes partielles de diffusion. Caractérisation des collisions à basse énergie par la longueur de diffusion dans l'onde S . Interprétation physique de cette longueur et étude qualitative de sa dépendance par rapport à la forme du potentiel interatomique. Collisions de particules identiques (bosons ou fermions). Potentiel de contact effectif et notion de champ moyen. Limite des petits et grands condensats (Thomas-Fermi). Résonances de Feshbach.

Rappel sur les collisions élastiques en physique quantique



Une collision élastique entre deux particules se ramène, dans le référentiel du centre de masse, au problème de la diffusion par un potentiel central $V(r)$, en général de portée b limitée. Un paquet d'onde plane (transversalement limité) arrive sur le centre diffuseur. L'état final est (à grande distance) la superposition de l'onde incidente et d'une onde sphérique diffusée. L'interférence vers l'avant de ces deux ondes décrit l'onde transmise (théorème optique). La forme asymptotique $\psi_{\vec{k}}^+$ de l'état de diffusion pour $r \gg b$ est:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} ; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta, \phi)|^2 \quad (2.1)$$

*Amplitude de diffusion
(homogène à une longueur)*

*Section efficace
différentielle de diffusion*

Equation intégrale de la diffusion et approximation de Born

L'amplitude de diffusion est donnée par une équation intégrale implicite reliant l'onde diffusée à grande distance à ses valeurs à l'intérieur de la zone de diffusion:

$$f_k(\theta, \phi) = \frac{m}{2\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{i\vec{k}\vec{n}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') f_{\vec{k}}^+(\vec{r}') \quad (2.2)$$

n: vecteur unitaire dans direction \vec{k} ,
m: masse réduite, égale à $M/2$ si collision de particules identiques de masse M

Le traitement au premier ordre en V (*approximation de Born*) donne une amplitude de diffusion proportionnelle à la transformée de Fourier du potentiel:

$$f_k^B(\theta, \phi) = \frac{m}{2\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') \quad (2.3)$$

Résultat important pour la description des phénomènes de diffusion cohérente simple (diffusion de Bragg, etc...)

Diffusion aux basses énergies: approximation de l'onde S

L'approximation de Born ne s'applique pas à des processus correspondant à des interactions fortes entre les particules, ce qui est le cas des collisions entre atomes alcalins. Un autre développement très utile se fait, non pas en puissances de V , mais en puissances de kb . Il permet de simplifier le problème de la diffusion dans le cas où la longueur de de Broglie de la particule relative est grande devant la portée du potentiel:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k(\theta, \phi) = \frac{m}{2\hbar^2} \lim_{k \rightarrow 0} \int d^3\vec{r}' V(\vec{r}') \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} - 1}{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} = a_s \quad (2-4)$$

Nous verrons que a_s , homogène à une longueur, est réelle (positive ou négative). On l'appelle *longueur de diffusion* et elle caractérise complètement le processus de diffusion aux basses énergies. On déduit de (2-2):

$$\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} + \frac{a_s}{r} \quad (2-5) \quad \text{L'onde de diffusion } a_s \text{, à basse énergie, une symétrie sphérique (onde S) même si le potentiel n'a pas cette symétrie.}$$

Ondes partielles de diffusion

Pour un potentiel $V(r)$ à symétrie sphérique, la partie angulaire de l'état de diffusion se développe sur les harmoniques sphériques $Y_{m=0}^l$, proportionnelles aux polynômes de Legendre $P_l(\cos \theta)$. Chaque coefficient du développement est une fonction de r satisfaisant une équation radiale (à 1D) qui fait intervenir un potentiel radial, somme de $V(r)$ et d'un potentiel centrifuge en $l(l+1)/r^2$ (cf. atome d'H). On en déduit que l'amplitude de diffusion se décompose en une somme d'amplitudes partielles, chacune définie par son déphasage δ_l :

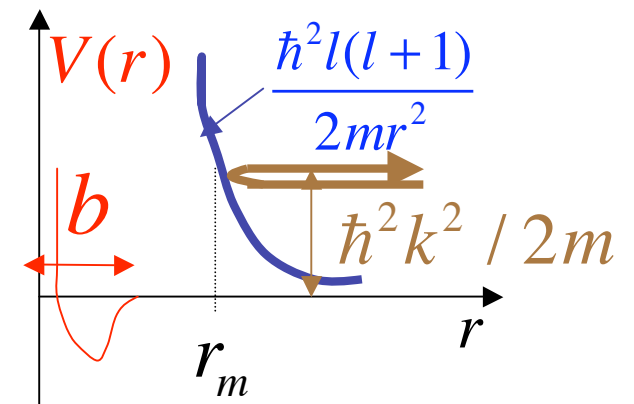
$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (2.6)$$

L'onde sphérique sortante d'ordre l s'ajoute à la composante sphérique d'ordre l de l'onde plane incidente, la somme étant déphasée de δ_l . C'est un effet d'indice quantique dépendant de l par l'intermédiaire du potentiel radial.

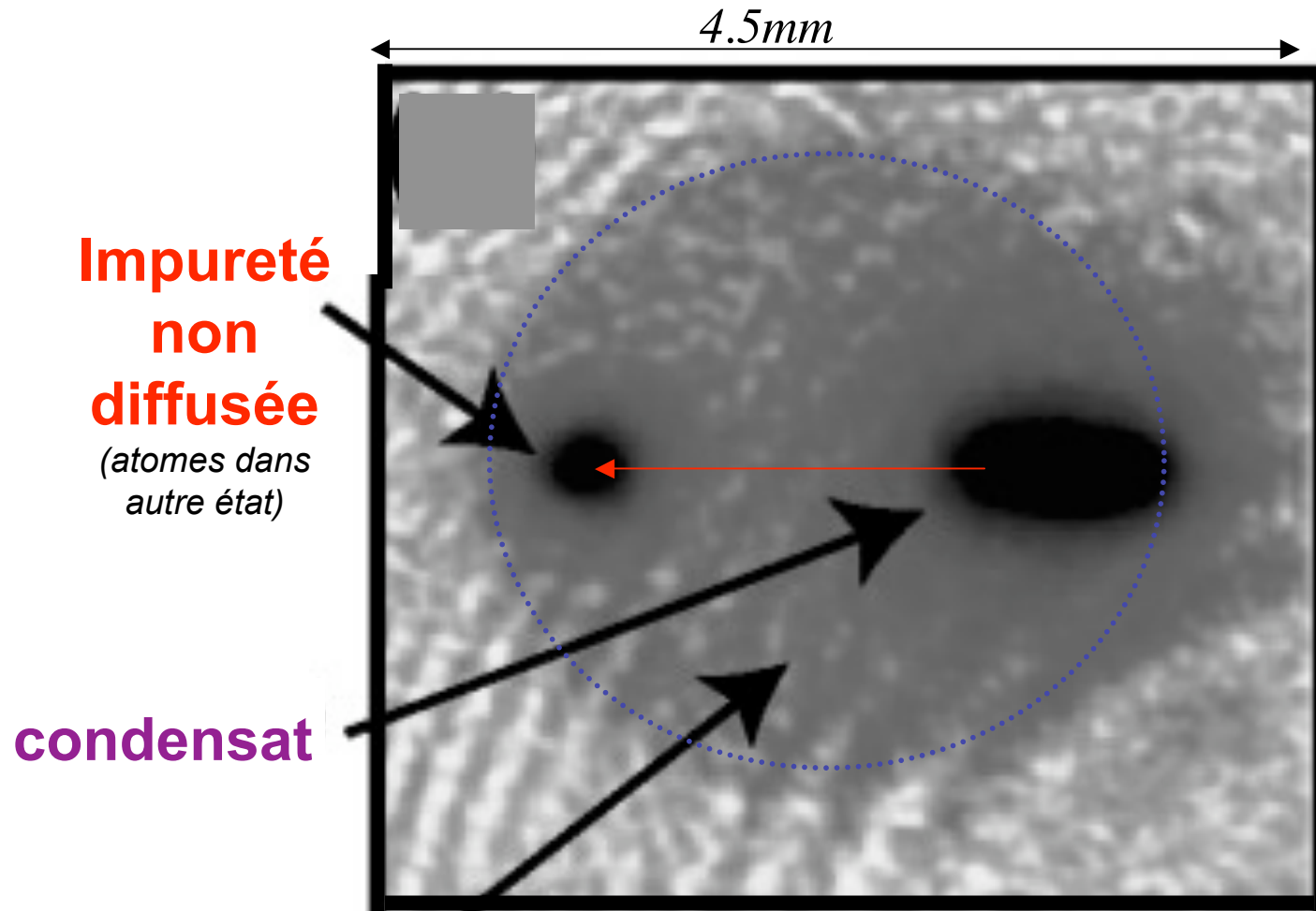
A basse énergie, les ondes de $l > 0$ sont écrantées de V par *la barrière centrifuge*: elles ne «voient» pas V et leur déphasage, ainsi que leur poids dans $f(\theta)$ est négligeable. La condition pour négliger l'onde l est:

$$r_m(l) = \sqrt{l(l+1)} / k > b \quad \text{soit} \quad kb = 2 \sqrt{l(l+1)} < \sqrt{l(l+1)}$$

Pour $kb < 1$, seule l'onde S ($l = 0$) compte.



Visualisation de l'onde S de diffusion



**Impureté
non
diffusée**
(atomes dans
autre état)

condensat

***Halo de
collision
dans l'onde S***

Une impureté formée d'atomes dans un état différent de l'état condensé traverse horizontalement le condensat à la vitesse de 6 cm/s . Le piège est ensuite supprimé et, après une phase d'expansion de 60 ms , la distribution atomique est sondée par absorption laser. Les produits de la collision forment un halo sphérique, révélant la diffusion dans l'onde S.

Diffusion dans l'onde S à la limite $k \rightarrow 0$

Si seule l'onde S subsiste, l'amplitude de diffusion se réduit à:

$$f_k^S(\theta) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0(k)} \sin \delta_0(k) \quad \text{et} \quad T = \frac{4}{k^2} \sin^2 \delta_0(k) \quad (2-7)$$

Comment varie δ_0 en fonction de k ? A la limite $kb \ll 1$, un développement limité donne:

$$\delta_0 = -a_s k + O(k^2) \quad (2-8)$$

où a_s (réel) est la **longueur de diffusion**. Le signe - dans la définition est choisi par convention. Il donne une valeur positive à a_s pour un potentiel répulsif. On déduit alors:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k^S = -a_s \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow 0} T = 4 a_s^2 \quad (2-9)$$

Pour obtenir l'onde de diffusion S complète, il faut ajouter à l'onde sortante la contribution $l=0$ de l'onde plane incidente, égale à $\sin(kr)/kr$. La forme asymptotique de l'onde S de diffusion est donc, pour $b \ll r \ll 1/k$:

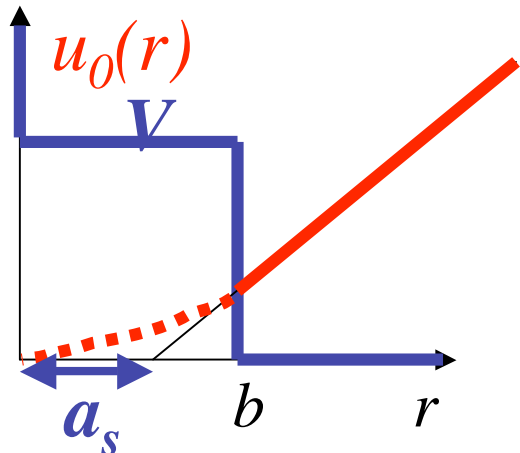
$$\frac{+}{k}(r) = \frac{u_0(r)}{r} \sim 1 - \frac{a_s}{r} \quad \text{soit} \quad u_0(r) \sim r - a_s \quad (2-10)$$

Cette expression conduit à une interprétation physique simple pour la longueur de diffusion (voir page suivante).

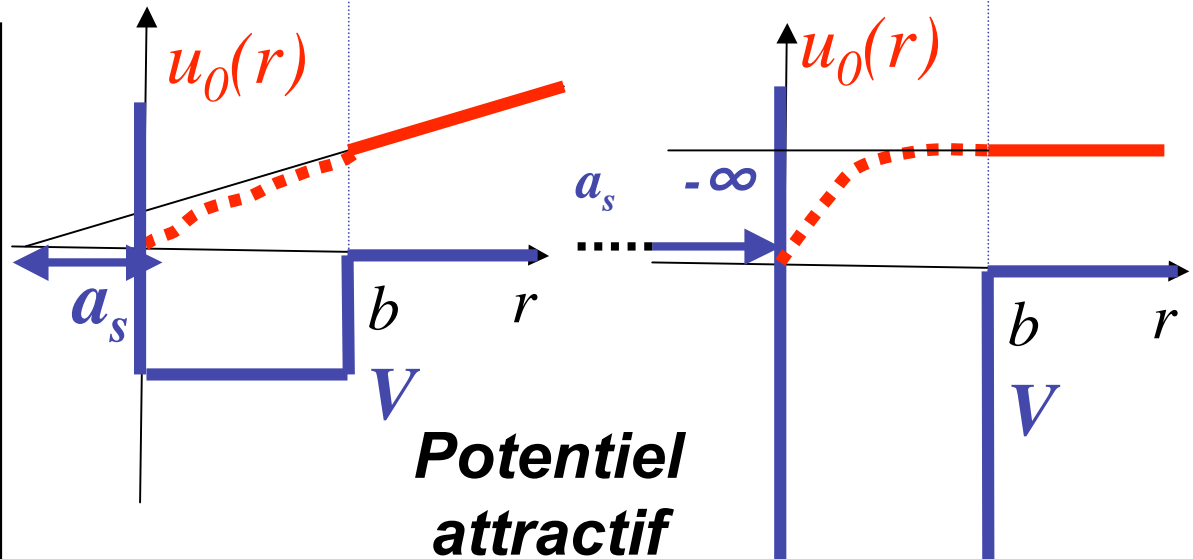
Fonction d'onde au voisinage de $r = 0$ et signe de la longueur de diffusion

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_0(r)}{dr^2} + V(r) = 0 \quad ; \quad u_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad u_0(r > b) \sim C(r - a_s)$$

Potentiel répulsif



V répulsif : $u''_0 > 0$ pour $r < b$. Le raccordement impose $0 < a_s < b$.



Potentiel attractif

V attractif sans état lié:
 $u''_0 < 0$ pour $r < b$
 $a_s < 0$

Apparition du
1^{er} état lié:
 $u'(r=b)=0$:
 a_s rejeté à $-\infty$

Lorsque $|V|$ croît, a_s tend vers $-\infty$, diverge à l'apparition de l'état lié, puis passe à $+\infty$ et décroît. Lorsqu'on augmente continûment V , une divergence similaire de a_s se produit à l'apparition de chaque nouvel état lié.

Propriétés générales de la longueur de diffusion à basse énergie

Les puits ou barrières carrés sont des cas simples (pour lesquels des expressions analytiques des fonctions d'onde à basse énergie existent et peuvent être calculées en exercice). Un certain nombre de résultats se généralisent au cas de potentiels de forme plus complexe, à portée finie (i.e. qui décroissent plus vite que $1/r^3$):

Un potentiel répulsif correspond à $a_s > 0$

Un potentiel attractif sans état lié correspond à $a_s < 0$

L'apparition d'un état lié lorsqu'on augmente la profondeur d'un potentiel attractif se manifeste par une divergence de a_s qui passe par $-\infty$, saute à $+\infty$ et décroît. Le signe de a_s pour un potentiel attractif peut donc être positif ou négatif, suivant la position de l'état lié le plus proche de la dissociation.

Potentiel effectif de contact décrivant la diffusion à basse énergie

Principe du potentiel effectif: remplacer le potentiel réel $V(r)$, dont le spectre d'états lié peut être compliqué, par un potentiel de contact, aussi proche que possible d'une fonction $V(r)$, qui admette dans tout l'espace $r > 0$ la même onde de diffusion S que le potentiel réel pour $r \gg b$.

L'état de diffusion se comporte en $1/r$ à l'origine, et l'action d'un potentiel de contact simple $C(r)$ sur cet état n'est pas définie. On choisit donc un **potentiel de contact régularisé** $V_e(r)$ dont l'action sur une fonction $u(r)$ (pouvant diverger en $1/r$) s'écrit:

$$V_e(\vec{r}) u(\vec{r}) = C(\vec{r}) \frac{d}{dr} \left(r u(\vec{r}) \right) \quad (2 \quad 11)$$

On obtient alors pour $u(r)/r$ l'équation de Schrödinger à une dimension:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{u(r)}{r} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{u(0)}{r} + C(r) \frac{du(0)}{dr} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{u(r)}{r} \quad (2 \quad 12)$$

soit :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2}{m} \frac{\hbar^2}{r} u(0) + C \frac{du(0)}{dr} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{u(r)}{r} \quad (2 \quad 13)$$

Potentiel effectif de contact (suite)

On a 2 équations séparées pour $u(r)$ et C . En introduisant le déphasage δ_0 :

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + k^2 u(r) = 0 \quad u(r) = A \sin(kr + \delta_0) \quad (2-14)$$

$$\frac{2 \hbar^2}{m} u(0) + C \frac{du(0)}{dr} = 0 \quad C = \frac{2 \hbar^2}{m} \frac{u(0)}{u'(0)} = \frac{2 \hbar^2}{km} \tan \delta_0 \quad (2-15)$$

A la limite $k \rightarrow 0$, on impose $\delta_0 = -ka_s$, d'où: $C = 2 \hbar^2 a_s / m$

et:

$$V_e(\vec{r}) = \frac{2 \hbar^2 a_s}{m} (\vec{r}) \frac{d}{dr} r \quad (2-16)$$

On obtient enfin l'amplitude de diffusion **exacte** du potentiel effectif dans l'onde S pour tout k en injectant dans l'expression (2-7) la valeur de δ_0 tirée de (2-15).

On trouve, après un peu de trigonométrie élémentaire:

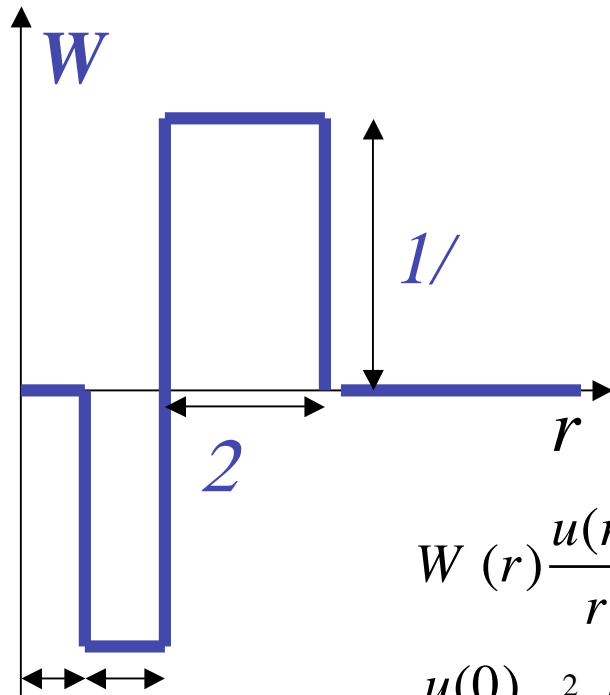
$$f_k^e = a_s / (1 + ika_s) \quad (2-17)$$

Seule l'onde S existe pour ce potentiel de contact, qui admet donc **comme onde de diffusion exacte:**

$$\frac{f_{\vec{k}}^{+,e}}{\bar{k}} = e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{a_s}{r} \frac{e^{ikr}}{1 + ika_s} = e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{C}{r} \frac{e^{ikr}}{(2 \hbar^2 / m) + ikC} \quad (2-18)$$

L'onde de diffusion $k \rightarrow 0$ coïncide avec l'approx. de Born (1^{er} ordre en C)

Représentation graphique du potentiel effectif



$$V_e(r) = \frac{2 \hbar^2 a_s}{m} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(r)$$

$$W = 0 \text{ si } 0 < r < 2 ; \quad W = \frac{1}{2} \text{ si } 2 < r < 4 ;$$

$$W = \frac{1}{2} \text{ si } 0 < r < 2 ; \quad W = 0 \text{ si } r > 4 \quad (2 \quad 19)$$

$$W(r) \frac{u(r)}{r} dr = W(r) \left[\frac{u(0)}{r} + u'(0) + \dots \right] dr =$$

$$\frac{u(0)}{2} \frac{dr}{r} + u'(0) + \frac{u(0)}{2} \frac{dr}{r} + 2u'(0) = u'(0) \quad (2 \quad 20)$$

Notons que l'action de ce potentiel de contact sur une fonction $f(r)$ régulière de r ($f(0)$ finie) est *identique* à celle d'une simple distribution delta de Dirac.

Il existe pour tout processus réel de collision élastique un potentiel effectif, localisé infiniment près de $r = 0$, qui a la même longueur de diffusion à basse énergie que le processus réel. L'onde de diffusion basse énergie dans ce potentiel effectif est exactement donnée par l'approximation de Born.

Collisions d'atomes identiques

Dans le référentiel du centre de masse, les impulsions des 2 particules sont opposées. Appelons $|1_+, 2_- \rangle_i$ l'état initial dans lequel la particule 1 va initialement de gauche à droite et $|1_-, 2_+ \rangle_f$ l'état de diffusion dans lequel la particule 1 émerge dans la direction (on suppose le potentiel central et l'état de collision indépendant de θ). Pour des *particules identiques*, le postulat de symétrisation impose d'écrire les états initial et final de la diffusion comme:

$$| \rangle_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_+, 2_- \rangle_i + |1_-, 2_+ \rangle_i) ; | \rangle_f = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_-, 2_+ \rangle_f + |1_+, 2_- \rangle_f)$$

$$\text{bosons} : \quad = +1 ; \quad \text{fermions} : \quad = -1 \quad (2 \quad 21)$$

L'amplitude de diffusion entre $| \rangle_i$ et $| \rangle_f$ est l'élément de matrice d'un opérateur d'évolution U symétrique par échange 1 2 satisfaisant les identités:

$${}_f \langle 1_-, 2_+ | U | 1_+, 2_- \rangle_i = {}_f \langle 1_+, 2_- | U | 1_-, 2_+ \rangle_i ; {}_f \langle 1_-, 2_+ | U | 1_+, 2_- \rangle_i = {}_f \langle 1_+, 2_- | U | 1_-, 2_+ \rangle_i$$

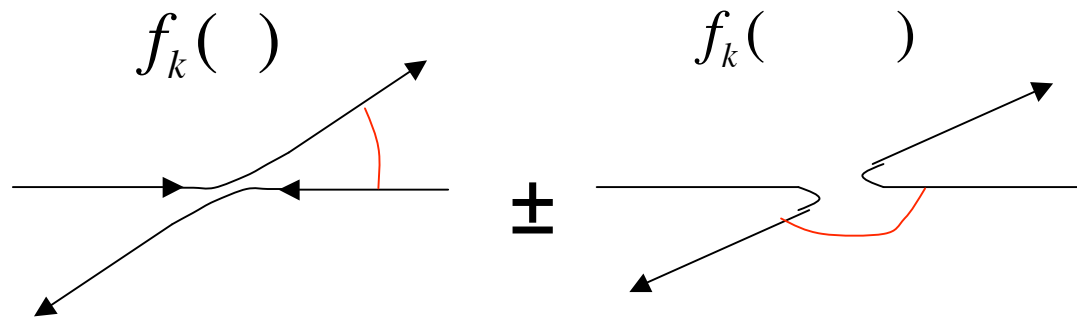
Les 4 termes du développement de ${}_f \langle | U | \rangle_i$ sont donc égaux 2 à 2 et:

$${}_f \langle | U | \rangle_i = {}_f \langle 1_-, 2_+ | U | 1_+, 2_- \rangle_i + {}_f \langle 1_+, 2_- | U | 1_+, 2_- \rangle_i \quad (2 \quad 22)$$

Soit en identifiant les amplitudes à celles calculées en supposant les particules discernables:

$${}_f \langle | U | \rangle_i = f_k() + f_k() \quad (2 \quad 23)$$

Collisions d'atomes identiques (suite)



Interférence de deux amplitudes décrivant la collision de bosons (signe+) et fermions (signe-)

Collision dans l'onde S isotrope: $f_k^{l=0}(\theta) = f_k^{l=0}(\pi - \theta) = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \theta a_s$
 $f_{k=0}^{Bosons} = 2a_s$; $f_{k=0}^{Fermions} = 0$

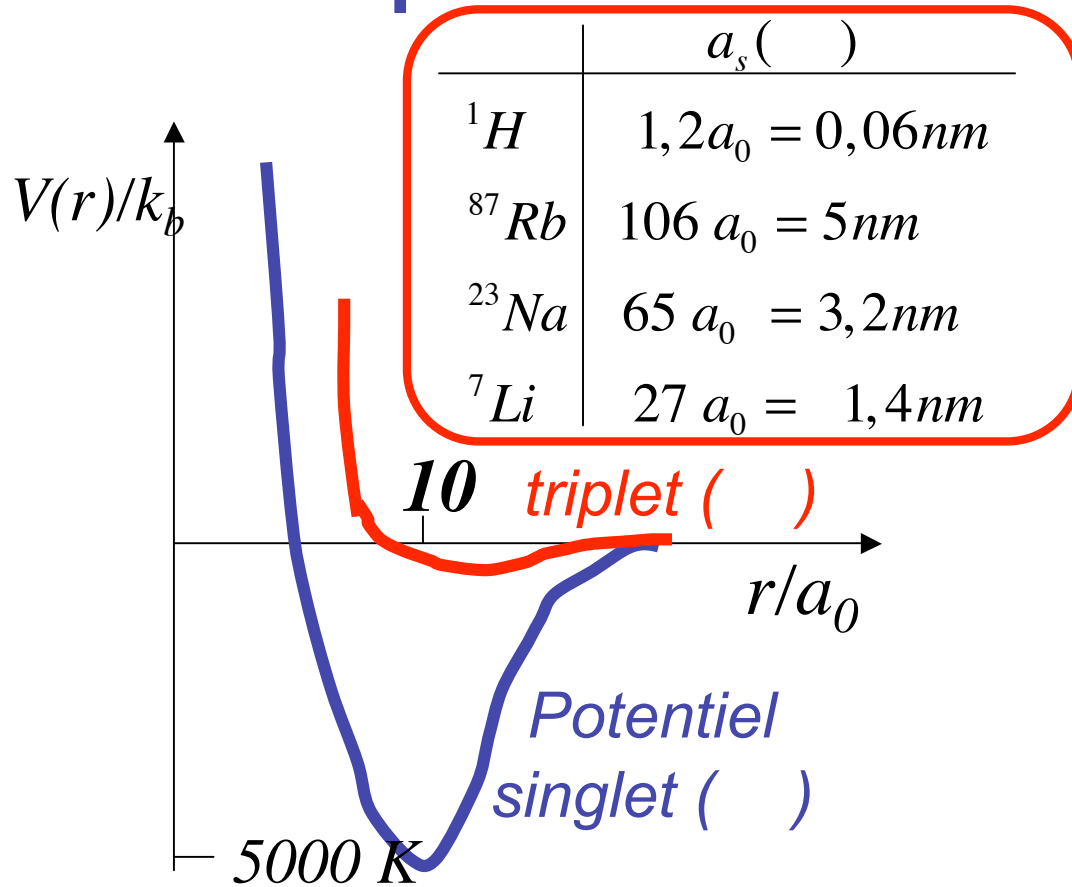
Section efficace de diffusion dans l'onde S : $\sigma_{T,l=0}^{Bosons} = 8 a_s^2$; $\sigma_{T,l=0}^{Fermions} = 0$

Les fermions (dans le même état de spin) n'interagissent pas quand leur énergie tend vers zéro, alors que les bosons ont une section efficace deux fois plus grande que des particules discernables (facteur 2 et non 4 car l'intégration sur θ porte entre 0 et $\pi/2$ seulement puisque les angles θ et $\pi - \theta$ ne sont pas physiquement distincts). Cela explique que les bosons sont beaucoup plus faciles à refroidir par évaporation que les fermions.

Ondes partielles de $l > 0$: On note que $P_l(\cos \theta) = (-1)^l P_l[\cos(\pi - \theta)]$

On en déduit qu'à énergie $\rightarrow 0$, les bosons diffusent dans les ondes partielles de l pair (S, D etc), les fermions dans les ondes partielles de l impair ($P, F \dots$).

Ordre de grandeur des paramètres de collision pour des atomes alcalins ultra-froids



Pour des atomes avec spins électroniques opposés (dans un état singlet) le potentiel est fortement attractif (liaison covalente avec énergie de plusieurs milliers de K). Des atomes de spins parallèles (état triplet), s'attirent beaucoup plus faiblement par interaction de van der Waals décroissant en $1/r^6$. Les atomes froids piégés correspondent plutôt au cas triplet (profondeur de puits de quelques centaines de K). **La portée b du potentiel est de l'ordre de 10 nanomètres.** Il existe un grand nombre d'états liés dans ce potentiel, dont le spectre précis dépend des alcalins choisis. La longueur de diffusion et son signe varient suivant les cas (tableau).

$$d_B = \sqrt{\frac{2 \hbar^2}{m k_B T}} \sim 200 \text{ nm} \gg b$$

($m = 100 u m_a$ et $T = 1 \text{ K}$)

Condition de diffusion dans l'onde S remplie

Collisions dans un condensat à l'approximation de champ moyen

En remplaçant le potentiel réel d'une collision de deux particules par le potentiel effectif, on reproduit pour $r \gg b$ les états de diffusion de basse énergie du potentiel réel. Ces états de diffusion sont donnés, pour $ka_s \ll 1$, par un traitement au premier ordre du potentiel effectif (approximation de Born). Cette solution au premier ordre apparaît pour $r > a_s$ comme une petite correction de la solution à l'ordre zéro (onde plane non perturbée).

On en déduit que si dans un gaz présentant une distance inter-particulaire moyenne r_{int} les conditions suivantes sont remplies:

$$ka_s \ll 1 ; r_{int} \gg |a_s|, b$$

les interactions entre les atomes sont convenablement décrites par la somme sur toutes les paires d'atomes de potentiels effectifs de contact, et un traitement au premier ordre de l'effet de ce potentiel est suffisant. Ces conditions sont généralement satisfaites dans les condensats d'atomes froids. On a en effet dans un condensat typique:

$$r_{int} \sim (N/V)^{1/3} \sim 100nm \quad |a_s|/r_{int} \sim 0,01 \quad 0,05$$

Tout se passe comme si chaque atome interagissait indépendamment avec les $N-1$ autres, chaque couplage étant traitable au 1er ordre. Les corrélations d'ordre supérieur sont négligées. **C'est le modèle du champ moyen.**

Approximation du champ moyen (suite)

Pour un condensat de N bosons occupant l'état fondamental $\psi_0(\mathbf{r})$ dans un potentiel $V_{trap}(\mathbf{r})$, la correction à l'énergie due aux collisions est:

$$\langle E_c \rangle = \frac{N(N-1)}{2} \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \psi_0^*(\vec{r}_1) \psi_0^*(\vec{r}_2) V_e(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi_0(\vec{r}_1) \psi_0(\vec{r}_2) = \frac{N(N-1)}{2} \frac{4\hbar^2 a_s}{M} \int d^3\vec{r} |\psi_0(\vec{r})|^4 \quad (2-24)$$

Cette énergie a le signe de a_s : interaction répulsive si $a_s > 0$, attractive si $a_s < 0$. L'effet n'est pas directement lié au signe du potentiel inter-atomique. Un puits attractif peut correspondre à $a_s > 0$, avec effet quantique net de répulsion.

L'intégrale de l'eqn.(2-24) se calcule analytiquement pour $\psi_0(\mathbf{r})$ gaussienne (état fondamental du potentiel harmonique isotrope V_{trap} à 3D):

$$\langle E_c \rangle = \hbar g \frac{N(N-1)}{2} \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\hbar a_s}{M} \int d^3\vec{r} |\psi_0(\vec{r})|^4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_s}{a_{oh}} \quad ; \quad (g / a_{oh} \sim 10^{-2} \text{ à } 10^{-3}) \quad (2-25)$$

La modification de l'énergie entraîne un réajustement de la fonction d'onde, qui minimise l'énergie totale du système. On montre par un calcul de variation que la nouvelle fonction macroscopique $\psi(\mathbf{r})$ satisfait une équation de Schrödinger non linéaire indépendante du temps (**équation de Gross-Pitaevskii ou G.P.**):

$$\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V_{trap}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) + (N-1) \frac{4\hbar^2 a_s}{M} |\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (2-26)$$

Comparaison des différents termes de l'énergie: petits et grands condensats

Sous l'effet des interactions, la fonction d'onde de champ moyen $\psi(r)$ est différente de celle, $\psi_0(r)$, de l'état fondamental du puits de confinement des atomes qui s'étalent ($a_s > 0$) ou se concentrent ($a_s < 0$). Estimons cet effet d'ajustement de taille. Commençons par supposer que le nuage garde un profil de densité gaussien, de «rayon» R et évaluons les énergies potentielle (E_P), cinétique (E_K) et de collision (E_C) du condensat:

$$E_P \sim N \frac{M \omega_0^2}{2} R^2 \quad ; \quad E_K \sim N \frac{\hbar^2}{2MR^2} \quad ; \quad E_C \sim \frac{N^2}{\sqrt{2}} \frac{\hbar^2 a_s}{MR^3} \quad (2 \quad 27)$$

Le rayon R_0 d'équilibre est donné par l'extremum de l'énergie totale $E_T(R)$:

$$\frac{dE_T}{dR} = NM \omega_0^2 R - \frac{N\hbar^2}{MR^3} - \frac{3N^2}{\sqrt{2}} \frac{\hbar^2 a_s}{MR^4} = 0 \quad \text{dont la solution (implicite) est:} \quad R_0 = a_{oh} \left(1 + \frac{3Na_s}{\sqrt{2} R_0} \right)^{1/4}$$

Pour des interactions faibles ($N|a_s|/a_{oh} \ll 1$), on a une variation relative de rayon:

$$\frac{R}{a_{oh}} \sim \frac{3N}{4\sqrt{2}} \frac{a_s}{a_{oh}}$$

Comparaison des différents termes de l'énergie: petits et grands condensats (suite)

Le paramètre sans dimension Na_s/a_{oh} mesure l'importance relative du terme d'énergie de collision par rapport au terme d'énergie cinétique. Si $Na_s/a_{oh} < 1$, il est légitime de traiter les interactions comme une perturbation et le profil de densité du gaz est peu affecté par la répulsion (ou l'attraction) des atomes. Avec les ordres de grandeur habituels de a_s , cette condition correspond à $N < 1000$ environ (*petits condensats*).

Pour $Na_s/a_{oh} > 1$, l'effet des interactions devient important. Les condensats attractifs ($a_s < 0$) implosent. Les *grands condensats* répulsifs ($a_s > 0$) sont stables, mais leur taille est augmentée de façon notable, d'où une diminution de E_k qui, pour $Na_s/a_{oh} \gg 1$, devient petit devant E_c . E_T est alors essentiellement la somme d'un terme en R^2 (énergie potentielle) et d'un terme en $1/R^3$ (interactions). Le rayon d'équilibre correspond au minimum de cette somme. Les valeurs de R_0 et de l'énergie par particule E sont alors:

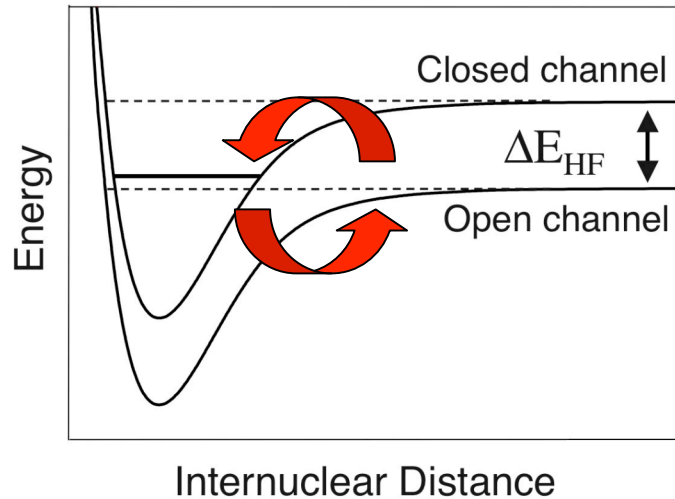
$$R_0 \sim a_{oh} \frac{Na_s}{a_{oh}}^{1/5}, \quad E = \frac{E_T}{N} \sim \hbar \frac{Na_s}{a_{oh}}^{2/5} \quad (2 \quad 28)$$

A cette limite (dite de *Thomas-Fermi*), le profil de densité n'est en fait pas gaussien. On peut résoudre l'éqn. de G.P. en négligeant d'emblée le terme d'énergie cinétique:

$$V_{trap}(\vec{r}) + (N-1) \frac{4\hbar^2 a_s}{M} |\psi(\vec{r})|^2 = E \psi(\vec{r}) \quad |\psi(\vec{r})|^2 = E - V_{trap}(\vec{r}) \quad (2 \quad 29)$$

La densité a *un profil parabolique*, reproduisant au signe près la forme du potentiel. La surface du nuage correspond à la condition $V_{trap}(r) = E$. *Les calculs variationnels effectués avec des densités gaussiennes donnent cependant une bonne approximation.*

Comment accorder la longueur de diffusion: les résonances de Feshbach

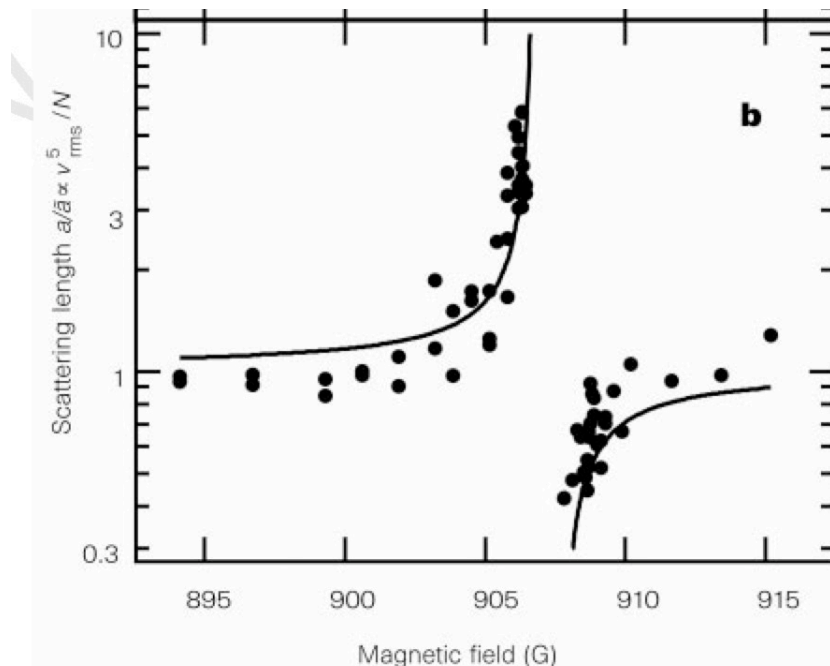
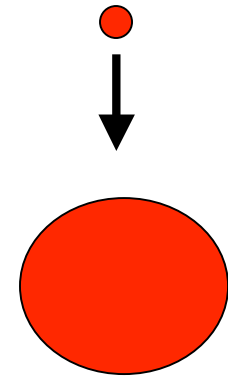


Nous avons considéré jusqu'ici des collisions n'impliquant qu'un état d'énergie fondamental des atomes, correspondant à un processus purement élastique. La physique des collisions entre atomes alcalins est en fait plus riche. Des effets remarquables se produisent lorsque un état moléculaire lié associé à un état atomique plus excité a une énergie quasi nulle, coïncidant avec l'énergie de collision des

atomes dans l'état fondamental, le hamiltonien d'interaction contenant un **couplage** entre l'état de collision et l'état lié. Les énergies de l'état lié et de l'état de collision (qui ont des moments magnétiques différents) peuvent être accordées en variant un champ magnétique. Pour la valeur du champ qui fait coïncider ces énergies, la longueur de diffusion subit une divergence, changeant de signe à la résonance. Qualitativement, les deux atomes dans le canal « libre » forment de façon transitoire un état moléculaire, ce qui a pour effet de faire varier considérablement la «force» de leur interaction (voir page suivante).

Mesure de la longueur de diffusion autour d'une résonance de Feshbach

Expansion du condensat lâché à $t=0$: l'énergie de l'«explosion», dans le régime de Thomas-Fermi, est essentiellement égale à l'énergie d'interaction. En mesurant par absorption laser la taille du nuage après un temps d'expansion (et de chute) donné, on remonte à la vitesse initiale des atomes, donc à l'énergie d'interaction et à la longueur de diffusion a_s . L'expérience est réalisée pour différentes valeurs du champ magnétique autour de la résonance de Feshbach.



$$\frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \hbar \frac{Na_s}{a_{oh}} \quad \text{with } a_s = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{a_{oh}}{N} \frac{\bar{v}}{a_{oh}}^5$$

mesure de \bar{v} et N donne $a_s(B)$

Expérience réalisée avec un condensat anisotrope (cigare), ce qui ne change pas les formules de façon essentielle.

S.Inouye, M.Andrews, J.Stenger, H.Miesner, D.Stamper-Kurn et W.Ketterle, Nature, 392, 151, 1998.

Importance des résonances de Feshbach dans la physique des atomes ultra-froids

- 1. Augmentation artificielle des interactions dans un condensat:** en ajustant le champ magnétique à une valeur proche de la résonance, on peut rendre la longueur de diffusion plus grande qu'en champ nul et favoriser ainsi le refroidissement par évaporation et le processus de condensation.
- 2. Changement rapide du signe de l'interaction:** en passant brusquement de $a_s > 0$ à $a_s < 0$, on rend le condensat instable et on observe un effondrement du gaz analogue à l'effondrement gravitationnel d'une super-nova. Etudes intéressantes de la dynamique des condensats.
- 3. Passage adiabatique à travers la résonance et formation réversible de molécules:** La résonance de Feshbach résulte du couplage d'une voie de diffusion ouverte (états stationnaires de diffusion) et d'une voie fermée (état moléculaire). En balayant adiabatiquement le champ à travers la résonance on peut suivre continûment un état qui évolue d'une forme à l'autre, c-à-d associer les atomes en paires pour former des molécules froides ou, à l'inverse, dissocier les molécules pour reformer un gaz d'atomes dégénérés. C'est une véritable *chimie cohérente*, très féconde pour former et étudier des molécules ultra-froides de Bosons ou de Fermions.
- 4. Application à l'information quantique:** Les interactions entre atomes sont nécessaires à la réalisation d'intrication et de portes logiques. L'exploitation des résonances de Feshbach pour varier à volonté la force des interactions peut jouer un rôle important dans le contexte de l'information quantique.

Conclusion de la deuxième leçon

Les collisions entre atomes ultra-froids correspondent à une interaction entre atomes $hgN(N-1)/2$, avec un terme quadratique en nombre de particules. En seconde quantification, ce couplage, en $(a^\dagger a)^2$ où a est l'opérateur de création de bosons dans l'état du condensat, est équivalent à ce que serait une interaction non-linéaire photon-photon en optique quantique.

Alors que ce type d'interaction est négligeable en optique, la non-linéarité entre les ondes de matière joue un rôle important dans l'évolution dynamique des condensats. La fréquence $g \sim \hbar a_s/a_{oh}$ est en général petite devant les fréquences d'oscillation des atomes dans le piège (sauf au voisinage d'une résonance de Feshbach). Dans le cas de condensats multimodes (confinés dans plusieurs puits par exemple), g peut cependant être comparable ou même plus grand que les fréquences d'effet tunnel entre puits (ou que la fréquence de Rabi couplant deux états de spins différents). Nous verrons dans les leçons suivantes que les effets combinés de l'effet tunnel (ou d'oscillation de Rabi) et des collisions donnent alors des possibilités variées pour intriquer des atomes et réaliser des superpositions mésoscopiques d'états ou des portes quantiques.

On a ainsi, dans la physique des ondes de matière, à la fois de fortes séparatrices (effet tunnel ou oscillation de Rabi) et des fortes non-linéarités de type Kerr au niveau de la particule unique, ce dernier élément étant, comme nous l'avons vu dans la 1^{ère} leçon, absent dans le domaine optique.