

# **Cours 2006-2007: Troisième Leçon**

**13 Novembre 2006**

## **Condensats bimodaux (I)**

**3A. Etat fondamental d'un condensat bimodal: état cohérent, état à fluctuation gelées et état chat de Schrödinger**

**3B. Oscillations d'un condensat bimodal: l'effet Josephson des atomes froids**

## 3A.

# Etat fondamental d'un condensat bimodal: état cohérent, état à fluctuation gelées et état chat de Schrödinger

Rappel sur la seconde quantification des bosons. Description d'un condensat bimodal en seconde quantification. Etats cohérents d'un condensat bimodal en absence d'interactions. Fluctuations de la partition du nombre de bosons dans chaque état. Effet des interactions: gel des fluctuations quand l'interaction est répulsive, apparition d'un état fondamental de type chat de Schrödinger quand elle est attractive. Comment préparer ces chats. Comparaison des propriétés des états cohérents, des états à fluctuations gelées et des états de type chat.

# Rappels sur la seconde quantification des bosons (cours 2002-2003)

A tout état à une particule on associe un opérateur d'annihilation et de création:

$$| \rangle \quad \text{opérateurs} \quad a, a^\dagger \\ \text{d'annihilation/création}$$

Les  $a$  satisfont les relations de commutation:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (3.1)$$

L'état de Fock représentant  $n_0$  bosons dans l'état  $\phi_0$ ,  $n_1$  bosons dans l'état  $\phi_1$ , ...,  $n$  bosons dans l'état  $\phi_n$  est:

$$| n_0, n_1, \dots, n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_0! n_1! \dots n!}} (a_0^\dagger)^{n_0} (a_1^\dagger)^{n_1} \dots (a_n^\dagger)^{n_n} |0\rangle \quad (3.2)$$

où  $|0\rangle$  est le vide (état sans particule).

Les opérateurs à 1 particule (éléments de matrice  $O_{ij}$ ) et à 2 particules (éléments de matrice  $W_{ijkl}$ ) s'écrivent:

$$O = \sum_{ij} a_i^\dagger O_{ij} a_j \quad (3.3)$$

et

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger W_{ijkl} a_l a_k \quad (3.4)$$

Un changement de représentation dans l'espace à une particule entraîne une transformation linéaire des opérateurs d'annihilation et création:

$$| i' \rangle = U | i \rangle$$

$$a_{i'} = U a_i \quad (3.5)$$

## Seconde quantification des bosons (suite)

Un exemple important de changement de base: particule localisée au point  $r$ :

$$|\vec{r}\rangle = \int d^3r' \langle \vec{r}' | \vec{r} \rangle |\vec{r}'\rangle = \int d^3r' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) |\vec{r}'\rangle = |\vec{r}\rangle \quad (3 \quad 6)$$

*Relation de fermeture sur une base d'états*

On définit ainsi l'opérateur champ de bosons qui annihile une particule au point  $r$  et son adjoint qui crée une particule en ce point:

$$a(\vec{r}) = \int d^3r' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) a(\vec{r}') \quad ; \quad a^\dagger(\vec{r}) = \int d^3r' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) a^\dagger(\vec{r}') \quad (3 \quad 7)$$

Ces opérateurs obéissent à la relation de commutation:

$$[a(\vec{r}_1), a^\dagger(\vec{r}_2)] = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3 \quad 8)$$

En multipliant ces opérateurs dans l'ordre normal, on obtient l'opérateur densité à une particule:

$$n(\vec{r}) = a^\dagger(\vec{r}) a(\vec{r}) \quad (3 \quad 9)$$

Noter l'analogie avec la description d'un champ électromagnétique,  $a(\vec{r})$  jouant le rôle de l'opérateur champ électrique.

# Fonction d'onde macroscopique du condensat

La valeur moyenne de l'opérateur champ dans l'état  $|N\rangle$  ( $N$  bosons occupant la fonction d'onde spatiale  $\psi_0(\vec{r})$ ) est nulle, ce qui signifie qu'un condensat à nombre de particules défini n'a pas de phase absolue (voir plus loin). On peut cependant associer à cet état **une onde de matière macroscopique classique**:

$$\psi_0^{(N)}(\vec{r}) = \langle N-1 | \psi(\vec{r}) | N \rangle = \sqrt{N} \psi_0(\vec{r}) \quad (3-10)$$

Le module au carré de cette fonction décrit la densité de particules au point  $\vec{r}$  et son intégrale sur l'espace est égale à  $N$ . Noter l'analogie avec le traitement classique d'un champ optique où les opérateurs du champ sont remplacés par des nombres complexes. Si le champ a un nombre de photons bien défini, la quantité complexe qui le représente peut être considérée comme une variable classique à phase aléatoire. Il en est de même du champ bosonique décrit classiquement par l'équation (3-10).

La description quantique d'un état bosonique de phase définie peut se faire en introduisant des états cohérents, superpositions d'états à nombres de bosons différents. Dans toute expérience réelle, le nombre total d'atomes est fixé et les états cohérents ne sont pas des états «physiques». Ils peuvent cependant servir de base utile pour décrire, par superposition, les états du système.

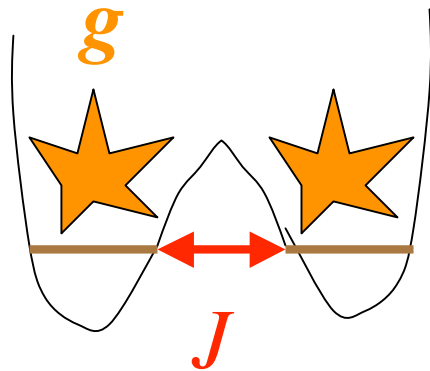
# Condensat bi-modal en 2<sup>nde</sup> quantification:

Considérons un condensat bimodal, avec répartition des atomes entre deux fonctions d'onde  $\psi_a$  et  $\psi_b$ . Il peut s'agir des 2 états fondamentaux de 2 puits de potentiel voisins, ou encore de 2 états électroniques différents de l'atome (condensat de type «spineur»). Dans le 1<sup>er</sup> cas, la séparation des deux modes est spatiale, dans le 2<sup>nd</sup>, il s'agit d'une séparation dans l'espace de Hilbert du système. On appelle  $a$  et  $b$  les opérateurs d'annihilation d'un boson dans  $\psi_a$  et  $\psi_b$ . Le Hamiltonien du système s'écrit en 2<sup>nde</sup> quantification (on choisit pour rester simple, la situation symétrique où les énergies des états dans les 2 modes sont égales, ainsi que les taux de collision):

$$H = \hbar \left( a^\dagger a + b^\dagger b \right) - \hbar \frac{J}{2} (a^\dagger b + ab^\dagger) + \hbar \frac{g}{2} a^\dagger a (a^\dagger a - 1) + b^\dagger b (b^\dagger b - 1) \quad (3.11)$$

La dynamique du système dépend de deux quantités:  $J$  est la fréquence d'échange entre les deux états (fréquence d'effet tunnel à travers la barrière qui sépare les puits dans le cas d'une séparation spatiale, fréquence de Rabi de l'oscillation induite par un champ électromagnétique résonnant sur la transition reliant les états dans le cas d'un condensat de type spineur). L'autre fréquence,  $g$ , mesure la force de l'interaction due aux collisions à l'intérieur de chaque mode (on néglige pour l'instant les collisions entre atomes dans des modes différents, ce qui est justifié dans le cas d'une séparation spatiale).

# Condensat bi-modal (suite)



Nous considérons ici, pour fixer les idées, le cas d'une séparation spatiale. Les résultats pourront se généraliser de façon évidente au condensat de type spineur. On peut varier indépendamment les deux paramètres  $J$  et  $g$  en jouant sur la hauteur de la barrière entre les puits ( $J$ ), en modifiant le confinement des bosons dans chaque puits ( $J$  et  $g$ ) ou encore en utilisant une résonance de Feshbach ( $g$ ). Suivant les valeurs relatives des deux fréquences, on aura des régimes stationnaires et dynamiques très différents. Nous allons d'abord décrire l'état fondamental du système dans les cas limites  $g=0$  et  $J=0$ , de façon à bien comprendre les propriétés intrinsèques des deux termes du hamiltonien. Nous étudierons ensuite les caractéristiques de l'état fondamental stationnaire du système lorsque l'effet tunnel et les collisions sont en compétition. Nous laisserons pour la section suivante (3-B) l'étude des régimes dynamiques, qui correspondent à l'évolution dans le temps d'un système initialement hors d'équilibre, abandonné au seul effet des processus décrits par le hamiltonien  $H$ .

# Etat fondamental d'un condensat bimodal sans interactions ( $g = 0$ )

Les états stationnaires du système sont les états propres du hamiltonien tunnel. En absence de collisions,  $H$  s'écrit comme une somme séparable:

$$H_{J,g=0} = \hbar \frac{J}{2} a_+^\dagger a_+ + \hbar \frac{J}{2} a^\dagger a \quad \text{avec} \quad a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a \pm b) \quad (3 \quad 12)$$

où les  $a_\pm$  sont les opérateurs d'annihilation de bosons dans les modes:

$$a_\pm(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(\vec{r}) \pm b(\vec{r})) \quad (3 \quad 13)$$

L'état fondamental de  $N$  bosons est donc:

$$| \begin{matrix} N \\ 0 \end{matrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} a_+^\dagger{}^N |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N N!}} (a^\dagger + b^\dagger)^N |0\rangle \quad (3 \quad 14)$$

Les  $N$  atomes sont dans l'état superposition symétrique de  $a$  et  $b$ . En développant suivant la loi du binôme, on obtient également:

$$| \begin{matrix} N \\ 0 \end{matrix} \rangle = \frac{1}{2^{N/2}} \sum_p \binom{N}{p}^{1/2} |n \ p\rangle_a |p\rangle_b \quad \text{avec} \quad \binom{N}{p} = \frac{N!}{(n-p)!p!} \quad (3 \quad 15)$$

Noter l'analogie avec la répartition de  $N$  photons entre les deux modes de sortie d'une lame séparatrice ayant une transmission de 50%.



# Fluctuations entre les deux modes ( $g = 0$ )

La loi binomiale symétrique a des propriétés statistiques bien connues. Le nombre moyen de photons et la fluctuation dans chaque modes sont:

$$N_a = N_b = \frac{N}{2} \quad ; \quad \Delta N_a = \Delta N_b = \sqrt{N} / 2 \quad (3 \quad 16)$$

A la limite  $N \gg 1$ , on peut approcher la distribution binomiale par une loi gaussienne, en utilisant la formule de Stirling. Un calcul simple donne:

$$\left| \begin{matrix} N \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{2^{1/4}}{N^{N/2}} e^{-l^2/N} \left| \begin{matrix} (N/2) + l \\ a \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} (N/2) - l \\ b \end{matrix} \right\rangle \quad (3 \quad 17)$$

La variable  $l$ , représentant l'écart au nombre moyen de bosons dans chaque mode, est gaussienne avec une moyenne nulle et un écart quadratique moyen  $l = (N)/2$ . Les fluctuations relatives du nombre de bosons sont en  $1/N$ .

L'existence de fluctuations (nombre de particules dans chaque puits non bien défini) entraîne une cohérence de phase entre les modes, qui s'exprime par le fait que la valeur moyenne  $\langle 0 | a^\dagger b | 0 \rangle$  est non nulle. Noter l'analogie avec un état cohérent d'un mode du rayonnement, où  $l$  serait l'écart à la moyenne du nombre de photons (la loi de Poisson du champ cohérent est voisine d'une gaussienne pour  $N$  grand). La cohérence du champ (valeur moyenne de  $a$  non nulle) est alors reliée au fait qu'il est une superposition d'états de Fock, à nombre de photons non précisément défini.

# Cohérence entre modes et interférences dans la densité à un corps (rappel)

Les deux états:  $|_{coh}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N N!}} (a^\dagger + b^\dagger)^N |0\rangle$  et  $|_{Fock}\rangle = \frac{1}{(N/2)!} (a^\dagger)^{N/2} (b^\dagger)^{N/2} |0\rangle$

ont même nombre moyen de particules dans les 2 modes, mais des propriétés de cohérence différentes:

$$\langle_{coh}|a^\dagger b|_{coh}\rangle = 0 \quad ; \quad \langle_{Fock}|a^\dagger b|_{Fock}\rangle = 0 \quad (3 \quad 18)$$

Ceci est lié à l'existence (pour  $|_{coh}\rangle$ ) ou à l'absence (pour  $|_{Fock}\rangle$ ) de fluctuations dans la répartition des particules. Il en résulte l'existence ( $|_{coh}\rangle$ ) ou l'absence ( $|_{Fock}\rangle$ ) de terme d'interférence dans *la densité moyenne à une particule*  $\langle n(\mathbf{r}) \rangle$ . Il s'agit là d'une propriété d'ensemble, l'interférence étant observée en moyennant les résultats d'un grand nombre d'expériences.

*Sur une seule observation*, l'interférence apparaît même pour l'état  $|_{Fock}\rangle$ . La détection successive des atomes crée alors les fluctuations du nombre de particules nécessaires à l'apparition de la cohérence (voir cours 2002-2003, sixième leçon). La phase des interférences est aléatoire d'une réalisation de l'expérience à la suivante. On retrouve ce résultat en décrivant classiquement les 2 sous ensembles par des fonctions macroscopiques  $\langle (N/2)-1 |_{a/b} | N/2 \rangle$  auxquelles on attribue une phase aléatoire. La différence de phase aléatoire entre les modes apparaît comme une brisure de symétrie.

# Condensat bimodal: intrication ou non?

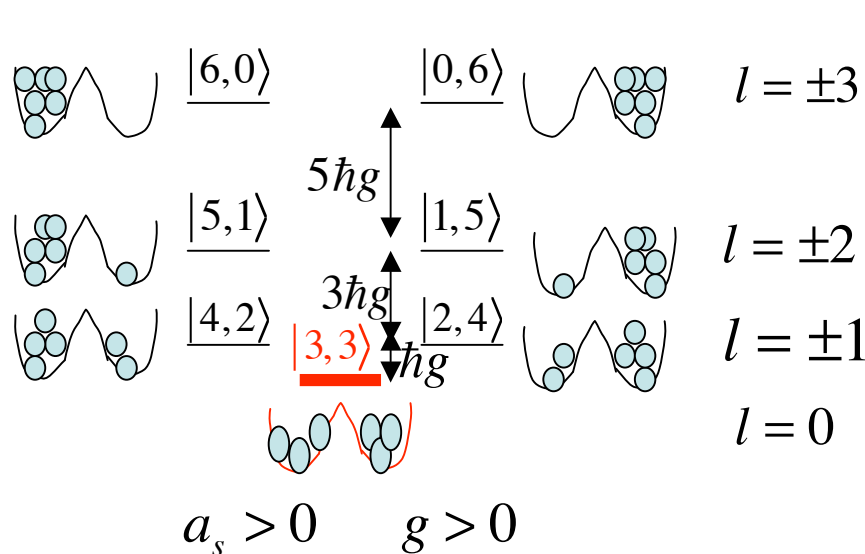
L'état  $|_{coh}\rangle = (a^\dagger + b^\dagger)^N |0\rangle$  est-il intriqué? Cette question n'a un sens que si on imagine une séparation virtuelle du système en deux parties sur lesquelles on peut (au moins théoriquement) faire des mesures indépendantes (pour tester des inégalités de type Bell, par exemple). Si on considère le condensat comme étant constitué de  $N$  particules toutes dans l'état  $|_{a+b}\rangle$ , l'état  $|_{coh}\rangle$  est un produit tensoriel de  $N$  états à une particule, dont la fonction d'onde est de la forme  $(|_{a+b}\rangle)^N$ . L'état de chaque atome apparaît dans un produit avec celui des  $N-1$  autres. Si les mesures séparées sont effectuées sur une particule d'une part et les  $N-1$  autres d'autre part, il n'y a pas d'intrication.

Si on définit par contre les deux sous-systèmes comme les deux modes ( $a$ ) et ( $b$ ), sur lesquels des mesures indépendantes peuvent être effectuées, alors la répartition binomiale des particules entre eux correspond à un état non séparable. L'état de l'un des modes, obtenu en traçant sur l'autre, est décrit non par une fonction d'onde, mais par une matrice densité diagonale en nombres de particules. L'entropie d'intrication pour  $N$  grand est  $(1/2) \text{Log}N$ , i.e. la moitié de la valeur maximale possible. La même situation se rencontre en optique, lorsqu'une lame sépare en deux un faisceau lumineux. L'intrication subsiste alors même pour  $N=1$ . ***Un seul photon, préparé dans l'état superposé  $|1,0\rangle + |0,1\rangle$  peut conduire à des tests d'inégalités de Bell si on effectue des mesures indépendantes appropriées dans les deux modes.***

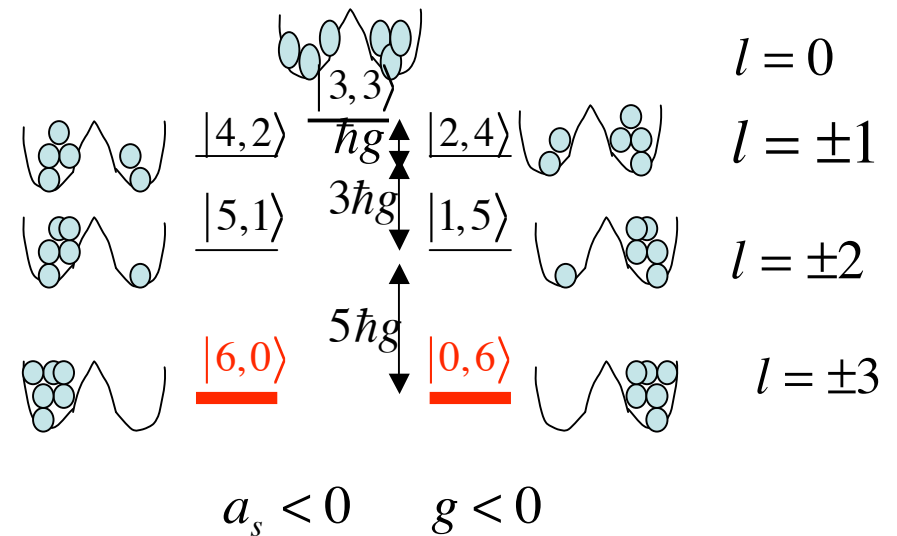
# Condensat bimodal sans couplage entre les modes ( $J = 0, g = 0$ )

Considérons maintenant la situation où  $J=0$  et  $g = 0$  (modes découplés avec atomes en interaction dans chaque mode). L'interaction est diagonale dans la base produit tensoriel des états de Fock  $|N_1\rangle_a |N_2\rangle_b$ . On a:

$$H_{J=0,g} |(N/2) + l\rangle_a |(N/2) - l\rangle_b = N\hbar \left[ \frac{\hbar g N(N-2)}{4} + \hbar g l^2 \right] |(N/2) + l\rangle_a |(N/2) - l\rangle_b \quad (3-19)$$



Les interactions répulsives correspondent à un état fondamental de Fock symétrique  $|N/2, N/2\rangle$  où les fluctuations sont gelées ( $N$  pair).



Les interactions attractives localisent toutes les particules ensemble. Deux états de Fock dégénérés  $|N, 0\rangle$  et  $|0, N\rangle$ .

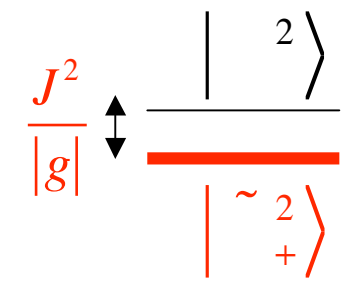
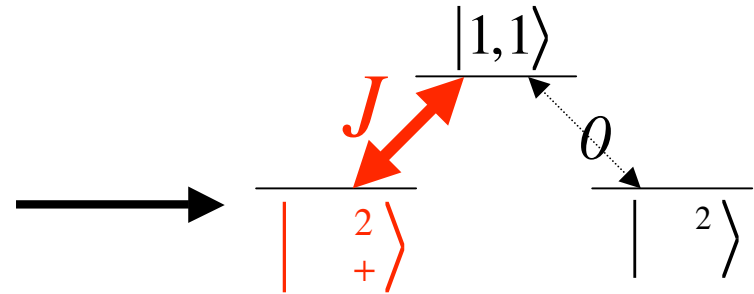
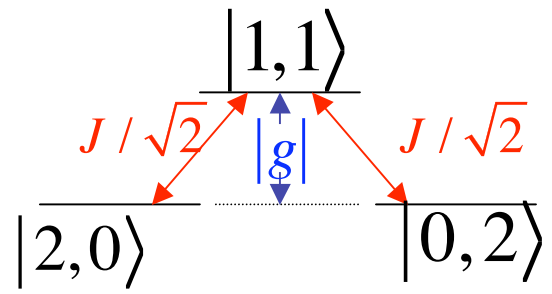
# Influence du signe de la longueur de diffusion sur les condensats bi-modaux

Une longueur de diffusion positive (champ moyen répulsif) donne la plus faible énergie aux états de densité minimale (atomes symétriquement répartis entre les deux modes). Le nombre d'atomes dans chaque puits est gelé et il n'y a pas de fluctuation ni de cohérence entre les modes.

Une longueur de diffusion négative (champ moyen attractif) favorise au contraire énergétiquement les états de densité maximale, correspondant à la situation où tous les atomes se condensent dans le même puits. Les fluctuations dans les deux états dégénérés de même énergie  $|N,0\rangle$  et  $|0,N\rangle$  sont gelées. Nous verrons qu'un effet tunnel très faible a pour effet de coupler les deux états et de lever la dégénérescence en donnant une énergie minimale à la superposition symétrique  $|N,0\rangle + |0,N\rangle$ , conduisant à un état fondamental de la forme «chat de Schrödinger». Il existe des fluctuations dans cet état, mais elles sont de nature différentes de celles de la loi binomiale.

Noter les rôles antagonistes de  $J$  et  $g$ : alors que l'effet tunnel crée des fluctuations et favorise la cohérence entre les modes, l'effet des collisions conduit au contraire pour  $|g| \gg J$  à un blocage des fluctuations. Le cas des interactions faiblement attractives est particulier (voir plus loin).

# Etude d'un petit condensat attractif bi-modal ( $N=2$ )



	$ 1,1\rangle$	$ 2,0\rangle$	$ 0,2\rangle$
$ 1,1\rangle$	0	$\frac{J}{\sqrt{2}}$	$\frac{J}{\sqrt{2}}$
$ 2,0\rangle$	$\frac{J}{\sqrt{2}}$	$ g $	0
$ 0,2\rangle$	$\frac{J}{\sqrt{2}}$	0	$ g $

	$ 1,1\rangle$	$ ^2_+\rangle$	$ ^2_-\rangle$
$ 1,1\rangle$	0	$J$	0
$ ^2_+\rangle$	$J$	$ g $	0
$ ^2_-\rangle$	0	0	$ g $

$$|^2_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,0\rangle \pm |0,2\rangle)$$

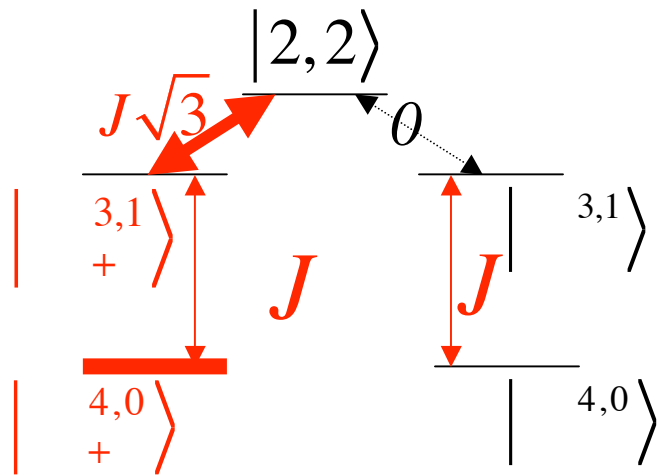
$$E^2 = |g|$$

L'état  $|2,0\rangle - |0,2\rangle$  est non couplé.  
 L'état  $|2,0\rangle + |0,2\rangle$ , couplé par effet tunnel à  $|1,1\rangle$ , est l'état fondamental (contaminé par  $|1,1\rangle$ )

$$\tilde{E}_+^2 = \frac{|g|}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4J^2/g^2} \right) = |g| \frac{J^2}{|g|} + \dots$$

$$|\tilde{^2_+}\rangle = |^2_+\rangle + \frac{J}{|g|} |1,1\rangle + \dots$$

# Petit condensat attractif bi-modal ( $N = 4$ )



$$| \begin{smallmatrix} 3,1 \\ \pm \end{smallmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|3,1\rangle \pm |1,3\rangle)$$

$$| \begin{smallmatrix} 4,0 \\ \pm \end{smallmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|4,0\rangle \pm |0,4\rangle)$$

L'espace à 5 états se décompose en un espace de 3 états symétriques par échange des 2 modes ( $|2,2\rangle, | \begin{smallmatrix} 3,1 \\ + \end{smallmatrix} \rangle, | \begin{smallmatrix} 4,0 \\ + \end{smallmatrix} \rangle$ ) et un espace à 2 états antisymétriques ( $| \begin{smallmatrix} 3,1 \\ - \end{smallmatrix} \rangle, | \begin{smallmatrix} 4,0 \\ - \end{smallmatrix} \rangle$ ). Le couplage tunnel ne couple pas ces deux sous-espaces entre eux. L'état fondamental symétrique est couplé au deuxième ordre à l'état le plus excité  $|2,2\rangle$ , alors que l'état fondamental antisymétrique ne l'est pas: l'énergie de l'état  $| \begin{smallmatrix} 4,0 \\ + \end{smallmatrix} \rangle$  est légèrement plus basse: c'est l'état fondamental du système.

Sous-espace symétrique		
0	$J\sqrt{3}$	0
$J\sqrt{3}$	$ g $	$J$
0	$J$	$4 g $
$\tilde{E}_+^{4,0} = 4 g $	$\frac{J^2}{3 g }$	$\frac{J^4}{9 g ^3} + \dots$

Sous-espace antisymétrique	
$ g $	$J$
$J$	$4 g $
$\tilde{E}^{4,0} = \frac{5 g }{2}$	$\frac{3 g \sqrt{1+4J^2/9g^2}}{2}$
$= 4 g $	$\frac{J^2}{3 g } + \frac{1}{27} \frac{J^4}{ g ^3} + \dots$

Généralisation:  
A la limite  $J/|g| \ll 1$ , l'état fondamental est  $|N,0\rangle + |0,N\rangle$ , séparé de  $|0,N\rangle - |N,0\rangle$  par un gap en  $J^N/|g|^{(N-1)}$ .

# Compétition entre effet tunnel et collisions dans les condensats ( $N \gg 1$ )

L'état du condensat bimodal le plus général s'écrit:

$$| \rangle = c_l |(N/2) + l\rangle_a |(N/2) - l\rangle_b = c_l |l\rangle_{a,b} \quad (3 \quad 20)$$

où on appelle  $c_l$  l'amplitude associée à un déséquilibre  $l$  entre les modes (on considère pour simplifier  $N$  pair et  $l$  entier). L'action de  $H$  sur  $| \rangle$  donne:

$$\frac{H}{\hbar} | \rangle = \frac{J}{2} c_l \sqrt{\frac{N}{2} - \frac{N}{2} + 1} l(l+1) |l+1\rangle + c_l \sqrt{\frac{N}{2} - \frac{N}{2} + 1} l(l-1) |l-1\rangle + g c_l l^2 |l\rangle \quad (3 \quad 21)$$

et l'équation aux valeurs propres s'écrit:

$$\frac{E}{\hbar} c_l = \frac{J}{2} [T(l-1) c_{l-1} + T(l) c_{l+1}] + g l^2 c_l ; \quad T(l) = \sqrt{\frac{N}{2} - \frac{N}{2} + 1} l(l+1) \quad (3 \quad 22)$$

Si  $g > 0$ , ou  $g < 0$  et  $|g|N < J$ , seules les amplitudes telles que  $|l|$  reste très petit devant  $N/2$  sont non négligeables dans l'état fondamental. On pose alors:

$$l = xN/2 ; \quad |x| \ll 1 \quad c_l = \binom{x}{N} T(l) = T(x) \frac{N+1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \quad (3 \quad 23)$$

et on traite l'équation aux valeurs propres comme décrivant une variable continue  $x$ , en développant les fonctions de  $x$  au voisinage de  $x=0$ :

$$\frac{E}{\hbar} \binom{x}{N} = \frac{J}{2} T\left(x - \frac{2}{N}\right) \binom{x - \frac{2}{N}}{N} + T\left(x + \frac{2}{N}\right) \binom{x + \frac{2}{N}}{N} + \frac{gN^2}{4} x^2 \binom{x}{N} \quad (3 \quad 24)$$



# Compétition entre effet tunnel et collisions (suite)

En développant  $(x \pm 2/N)$  en série de Taylor et en négligeant des petits termes:

$$\frac{E}{\hbar} + J \frac{N+1}{2} \quad (x) \quad \frac{JN + gN^2}{4} x^2 \quad (x) \quad \frac{J}{N} \frac{d^2}{dx^2} (x) \quad (3 \quad 25)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique fictif de «masse»  $m$  et de fréquence angulaire  $\omega_0$  en posant:

$$m = \frac{\hbar N}{2J} ; \quad \omega_0^2 = J^2 + gJN \quad (3 \quad 26)$$

(noter que  $m$  est homogène à une masse multipliée par le carré d'une longueur car  $x$  est ici sans dimension et non une longueur, comme dans l'équation canonique d'un oscillateur). Ce changement de notation conduit à:

$$E + \hbar J \frac{N+1}{2} \quad (x) = \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 \quad (x) \quad \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} (x) \quad (3 \quad 27)$$

Pour  $\omega_0^2 > 0$ , cette équation d'oscillateur admet comme état fondamental une gaussienne centrée en  $x=0$ . La superposition d'états  $|l\rangle$  correspondants est également centrée en  $l=0$ .

# Compétition entre effet tunnel et collisions (suite)

L'équation (3-27) ne décrit correctement l'état fondamental du condensat bimodal que si  $J^2 + gJN > 0$ , soit  $gN > -J$ . En d'autres termes, le condensat doit être soit répulsif ou sans interactions ( $g \geq 0$ ) soit faiblement attractif ( $g < 0$  avec  $|g| < J/N$ ). Nous supposons d'abord l'une de ces conditions remplies et traiterons plus loin le cas fortement attractif ( $|g| > J/N$ ). L'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique donne la valeur de l'énergie de l'état fondamental:

$$E + \hbar J \frac{N+1}{2} = \frac{\hbar}{2} \omega_0 \quad E = \frac{\hbar J}{2} \sqrt{1 + gN/J} \quad (N+1) \quad (3 \quad 28)$$

**Retour sur le cas  $g = 0$  (gaz sans interactions):** L'oscillateur fictif a alors la fréquence  $J$  et l'énergie  $E$  est égale à  $-N\hbar J/2$ . On retrouve le résultat établi plus haut: l'état fondamental correspond à  $N$  bosons dans l'état symétrique  $(\psi_a + \psi_b) / \sqrt{2}$ . L'énergie de chaque particule est  $-\hbar J/2$ , et l'énergie totale  $-N\hbar J/2$ .

L'expression de la gaussienne est: soit avec le changement  $x = l = Nx/2$ :

$$\psi(x) = \frac{N^{1/4}}{2} e^{-Nx^2/4} \quad (3 \quad 29)$$

$$c_l = \frac{2^{1/4}}{N} e^{-l^2/N} \quad (3 \quad 30)$$

On retrouve bien le résultat déjà obtenu plus haut (eqn. (3-17)).

# Compétition entre effet tunnel et interactions dans le cas répulsif: gel des fluctuations

Pour un condensat répulsif ( $g > 0$ ), la gaussienne décrivant l'état fondamental devient:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{N^{1/4}}{2 \sqrt{1 + \frac{gN}{J}}} \exp\left[-\frac{Nx^2}{4 \sqrt{1 + \frac{gN}{J}}}\right] \\ c_l &= \frac{2^{1/4}}{N} \sqrt{1 + \frac{gN}{J}} \exp\left[-\frac{l^2}{N \sqrt{1 + \frac{gN}{J}}}\right] \end{aligned} \quad (3 \quad 31)$$

Les collisions ont pour effet de diminuer les fluctuations par rapport à celles du condensat sans interaction. La fluctuation de  $l$  devient:

$$l(g/J) = \frac{\sqrt{N}}{2 \sqrt{1 + \frac{gN}{J}}} \quad (3 \quad 32)$$

Les fluctuations sont complètement gelées lorsque  $l < 1$ , soit:  $\frac{g}{J} > \frac{N}{16}$

Pour  $N=100$ , cette condition correspond à  $g > 6J$ . L'état du système est alors à une bonne approximation  $|N/2\rangle_a |N/2\rangle_b$ . Les fluctuations et la cohérence entre les deux modes sont gelées par les interactions répulsives entre atomes.

# Interactions attractives dans les condensats: amplification des fluctuations pour $|g|$ petit

Dans le cas attractif, le modèle précédent reste valable tant que  $\sigma^2 > 0$ , soit  $|g|N/J < 1$ . L'état fondamental correspond alors à une gaussienne élargie par rapport au cas sans interaction:

$$l(g/J) = \frac{\sqrt{N}}{2 \sqrt{1 - \frac{|g|N}{J}}} \quad (3-33)$$

Lorsque  $|g|N/J$  tend vers 1 ( $gN/J$  vers -1), la largeur de la gaussienne diverge et le traitement qui considère  $l/N \ll 1$  cesse d'être valable. Lorsque  $|g|$  augmente au delà de cette valeur critique, la «raideur» de l'oscillateur fictif devient négative (potentiel parabolique inversé) et  $x$  prend des valeurs loin de l'origine. L'augmentation de  $|l|$  décrit le phénomène déjà analysé plus haut pour  $J = 0$ : les collisions, lorsque leur effet est dominant favorisent les états de grand  $|l|$ .

Pour décrire le système dans ce régime, il faut résoudre numériquement l'équation aux valeurs propres (3-22). Pour  $|g|N/J > 1$ , la distribution des valeurs de  $l$  se scinde en deux composantes gaussiennes centrées en deux valeurs symétriques  $\pm A$ , la quantité  $A$  tendant vers  $N/2$  pour  $|g|N/J \sim 10$  (page suivante).

*Voir T.L.Ho et C.V.Ciobanu, Journal of Low Temperature Physics, 135, 257 (2004)*

# Brisure de symétrie du condensat bi-modal pour $|g| N/J > 1$ : chats de Schrödinger

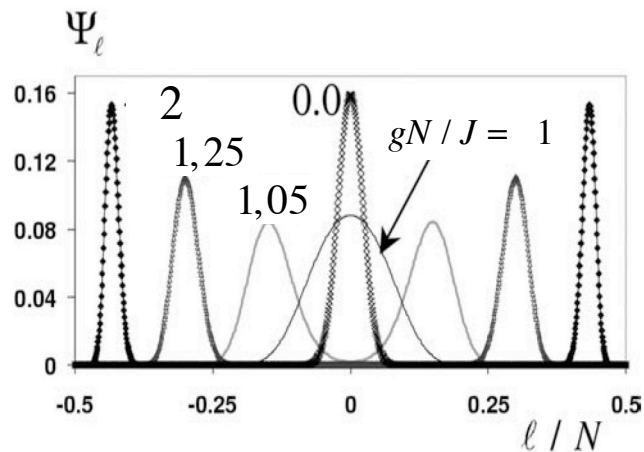


Figure tirée de T.L.Ho et C.V.Ciobanu, *Journal of Low Temp. Physics*, 135, 257 (2004)

La résolution numérique montre que l'état fondamental est de la forme:

$$| \rangle_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i(l-A)^2/2} |l\rangle + e^{i(l+A)^2/2} |l\rangle) \quad (3 \quad 34)$$

superposition de deux sommes gaussiennes d'états centrées autour de  $l = \pm A$ , de largeur  $\propto 1/\sqrt{N}$ . Les paramètres  $2A/N$  (compris entre 0 et 1) et  $l/N$  ne dépendent que de  $|g|N/J$ . La distribution des valeurs de  $l$  se scinde lorsque

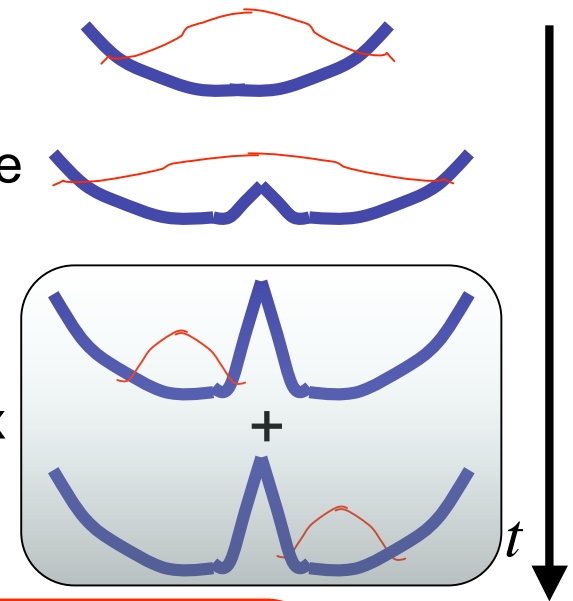
$|g|N/J$  traverse en croissant la valeur 1 en 2 paquets symétriques, dont les centres tendent vers  $\pm N/2$  et les largeurs vers 0. Pour  $|g|N/J \ll 1$ , l'état est très voisin du «chat de Schrödinger»:

$$| \text{chat} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N,0\rangle + |0,N\rangle) \quad (3 \quad 35)$$

La condition  $|g|N > J$  signifie que le gap entre les multiplicités  $(|N,0\rangle, |0,N\rangle)$  et  $(|N-1,1\rangle, |1,N-1\rangle)$  est supérieur à la fréquence tunnel. Le couplage  $J$  fixe la phase du chat en favorisant les superpositions symétriques (voir plus haut).

# Vers l'étude de petits chats de Schrödinger bosoniques

**Une préparation possible:** Créer dans un piège unique un condensat de  $a_s < 0$  (par exemple  ${}^7\text{Li}$ , ou  $\text{Rb}$  avec  $a_s$  accordé à une valeur négative en ajustant le champ magnétique à une valeur proche d'une résonance de Feshbach). Puis déformer continûment le piège en deux puits. Le condensat reste adiabatiquement dans l'état fondamental et aboutît à l'état  $|0, N\rangle + |N, 0\rangle$



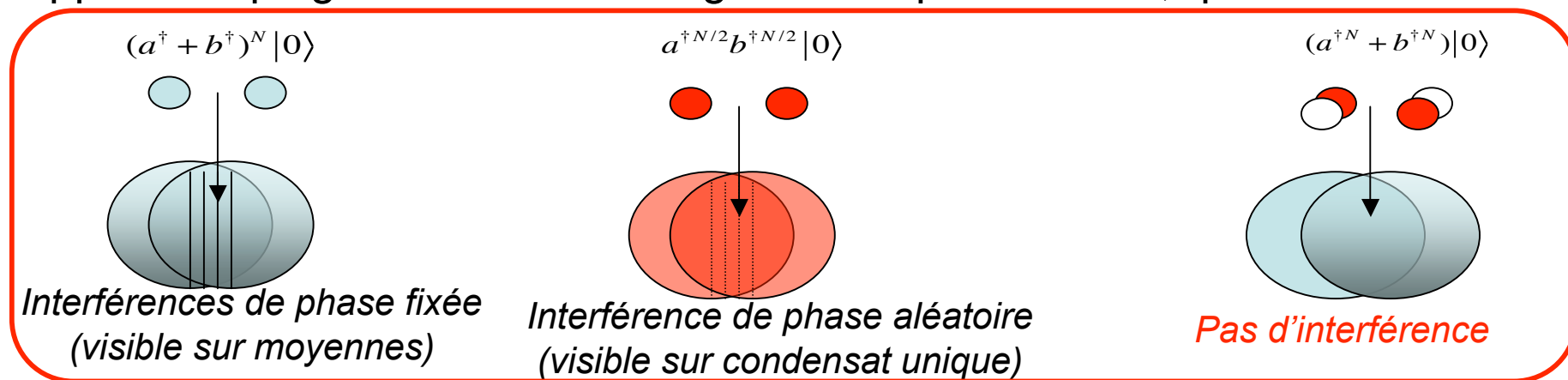
## Nature de l'intrication dans différents états bimodaux:

	$(a^\dagger + b^\dagger)^N  0\rangle$	$a^{\dagger N/2} b^{\dagger N/2}  0\rangle$	$(a^{\dagger N} + b^{\dagger N})  0\rangle$
<i>intrication des deux modes</i>	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>
<i>intrication des <math>N</math> bosons</i>	<i>non</i>	<i>oui</i>	<i>oui</i>

Le chat (dernière colonne) est intriqué **à la fois** comme système bimodal et comme ensemble de  $N$  particules. Il est **moins classique** que l'état cohérent (1<sup>ère</sup> colonne) qui est intriqué comme système bimodal (et pas comme état à  $N$  bosons) et que l'état à fluctuations gelées (2<sup>ème</sup> colonne), intriqué comme ensemble de  $N$  particules (voir 4<sup>ème</sup> leçon) et pas comme système bimodal.

# Comment détecter le chat de Schrödinger?

On a préparé dans un double puits l'un des états du tableau de la page précédente (état cohérent bimodal, état à fluctuations gelées ou chat). Si on supprime le piège et laisse les nuages atomiques s'étaler, qu'observe-t-on?



Dans le cas du chat, la détection du 1<sup>er</sup> atome en un point projette le condensat dans un état  $| (N-1)_a, 0_b \rangle + | 0_a, (N-1)_b \rangle$ . La valeur moyenne dans cet état de  $a^\dagger b$  est nulle, et il en est de même après détection des atomes successifs. Il n'apparaît pas d'interférence. L'observation de la cohérence du chat demande des expériences multi-atomiques plus subtiles (voir leçon 4).

Par ailleurs, les états «chat» sont très sensibles à la **décohérence**. Si on «perd» un atome, les  $N-1$  atomes restants sont décrits par l'opérateur densité:

$$= \frac{1}{2} ( | (N-1)_a, 0_b \rangle \langle (N-1)_a, 0_b | + | 0_a, (N-1)_b \rangle \langle 0_a, (N-1)_b | ) \quad (3.36)$$

**Toute intrication a disparu dans cet état. Il faut donc pour observer un chat ne perdre aucun boson, ce qui devient très difficile pour  $N \gg 1$ .**

## 3B.

### **Oscillations d'un condensat bimodal: l'effet Josephson des atomes froids**

Courant de probabilité à travers la barrière qui sépare les deux puits. Calcul microscopique et macroscopique de la fréquence d'oscillation. Hamiltonien Josephson associant comme variables conjuguées la différence de phase et la différence de population entre les puits. Solutions dans le cas des petites oscillations (fréquence plasma). Self trapping des populations pour un grand déséquilibre initial. Observation expérimentale de ces oscillations et de leur blocage.



# Condensat bi-modal en régime dynamique: effet Josephson

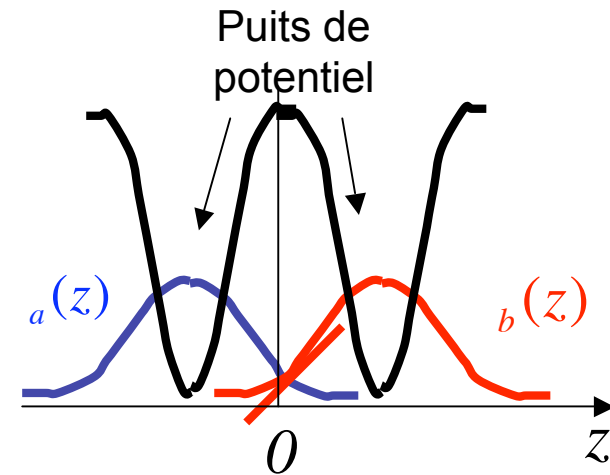
Le passage par effet tunnel des atomes à travers la barrière qui sépare les deux puits s'apparente à l'effet Josephson (passage de paires de Cooper à travers une jonction). Pour l'étudier, il nous faut aborder le comportement dynamique du condensat, alors que nous nous sommes intéressés jusqu'à présent aux états stationnaires du système. En principe, l'évolution dynamique peut se calculer en projetant un état initial non stationnaire sur une base d'états propres de l'énergie et en affectant chaque composante de cette décomposition par le facteur de Bohr correspondant. En d'autres termes, la connaissance de tous les états propres de l'énergie ( et non seulement celle de l'état fondamental) sont nécessaires. Le calcul est vite intractable sous cette forme, en présence d'interaction. Il est bien plus pratique de traiter le problème en introduisant des variables familières de la physique de la matière condensée, le courant de particules et la différence de phase de la fonction d'onde macroscopique entre les deux puits. Nous nous proposons de justifier brièvement cette approche à partir d'une analyse microscopique du problème, sans doute plus familière aux physiciens atomistes. Nous établirons ainsi les équations générales qui régissent le comportement d'un condensat bimodal hors d'équilibre, en présence d'interactions.

# Courant de probabilité entre deux puits

Soit un état non-stationnaire à une particule:

$$|\vec{r}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \psi_a(\vec{r}) + e^{i\phi_0} \psi_b(\vec{r}) \right) \quad (3.37)$$

où  $\psi_a(\vec{r})$  et  $\psi_b(\vec{r})$  sont les fonctions d'onde (réelles) des états fondamentaux dans les deux puits et  $\phi_0$  est une phase quelconque. Le courant de probabilité associée est:



$$I(t) = \frac{\hbar}{2mi} \int dx dy \left( \psi_a^* \frac{d\psi_b}{dz} - \psi_b \frac{d\psi_a}{dz} \right)_{z=0} = I_0 \sin \phi_0 \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{\hbar}{2m} \int dx dy \left( \psi_a \frac{d\psi_b}{dz} - \psi_b \frac{d\psi_a}{dz} \right)_{z=0} \quad (3.38)$$

Le courant de probabilité dépend des fonctions d'onde et de leur dérivée dans la barrière en  $z=0$ . Il est proportionnel à  $\sin \phi_0$  (effet Josephson) et s'annule pour  $\phi_0 = 0$  et  $\pi$ , valeurs pour lesquelles  $|\psi\rangle$  est fonction propre de l'énergie, donc stationnaire. Nous allons montrer que la quantité  $I_0$ , homogène à l'inverse d'un temps, n'est autre que la fréquence d'échange  $J$  entre les deux puits, en absence d'interactions. Pour cela, nous allons calculer de deux façons différentes l'évolution dans le temps du courant de particules, en envisageant d'abord le cas  $g = 0$  (pas d'interactions).

# Approche microscopique de l'effet Josephson en absence d'interactions

Décomposons l'état initial sur les états propres du Hamiltonien des deux puits:

$$| (0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| a \rangle + e^{i\phi_0} | b \rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + e^{i\phi_0}) | + \rangle + (1 - e^{i\phi_0}) | - \rangle$$

$$\begin{aligned} | (t) \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + e^{i\phi_0}) e^{iJt/2} | + \rangle + (1 - e^{i\phi_0}) e^{-iJt/2} | - \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(Jt/2) + i e^{i\phi_0} \sin(Jt/2) | a \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi_0} \cos(Jt/2) + i \sin(Jt/2) | b \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1 - \sin \phi_0 \sin(Jt)]^{1/2} | a \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + \sin \phi_0 \sin(Jt)]^{1/2} e^{i\phi(t)} | b \rangle \end{aligned} \quad (3-39)$$

$$\text{avec } \tan \phi(t) = \tan \phi_0 \cos(Jt) \quad (3-40)$$

On en déduit le courant de particules:

$$I(t) = \frac{d\langle N_a \rangle}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle N_a - N_b \rangle = \frac{d\langle l \rangle}{dt} = J \frac{N}{2} \cos(Jt) \sin \phi_0 \quad \langle l(t) \rangle = \frac{N}{2} \sin \phi_0 \sin(Jt) \quad (3-41)$$

L'amplitude de l'oscillation du courant varie en  $\sin \phi_0$  (nulle pour  $\phi_0 = 0$  et  $\pi$ , maximale pour  $\phi_0 = \pi/2$ ). On note aussi que la différence de phase quantique  $\phi(t)$  entre les deux puits oscille en même temps que le courant (eqn (3-40)).

# Approche macroscopique de l'effet Josephson en absence d'interactions:

Associons aux deux puits les fonctions d'onde macroscopiques:

$$\psi_a(\vec{r}) = \sqrt{N_a(t)} \psi_a(\vec{r}) \quad \text{et} \quad \psi_b(\vec{r}) = \sqrt{N_b(t)} \psi_b(\vec{r}) e^{i\phi(t)} \quad (3 \quad 42)$$

On en déduit, à partir de (3-38), l'expression du courant à l'instant  $t$ :

$$I(t) = I_0 \sqrt{N_a N_b} \sin \phi = \frac{I_0}{2} \sqrt{N^2 - 4l^2} \sin \phi = \frac{dl}{dt} \quad (3 \quad 43)$$

Cette relation apparaît comme une équation d'évolution canonique régie par un Hamiltonien, fonction des variables conjuguées  $l$  et  $\phi$  :

$$H(l, \phi) / \hbar = \frac{I_0}{2} \sqrt{N^2 - 4l^2} \cos \phi \quad (3 \quad 44)$$

On a en effet à partir de  $H(l, \phi)$  les équations de Hamilton couplées:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{I_0}{2} \sqrt{N^2 - 4l^2} \sin \phi \quad \text{et} \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{2I_0 l}{\sqrt{N^2 - 4l^2}} \cos \phi \quad (3 \quad 45)$$

Ces équations redonnent bien l'évolution microscopique. L'évolution de  $l$  s'obtient en dérivant une seconde fois, ce qui élimine  $\phi$ . On trouve :

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -I_0^2 l \quad (3 \quad 46)$$

et on voit que  $l$  oscille à la fréquence  $I_0$  qu'il faut donc identifier à  $J$ . On montre de même que l'évolution de  $\phi$  est bien identique à celle donnée par (3 - 40).

# Hamiltonien Josephson avec interactions

Comment modifier  $H(l, \varphi)$  pour tenir compte des collisions? Donnons un argument heuristique simple. Les fonctions macroscopiques  $N_a$  et  $N_b$  sont les éléments de matrice entre les états  $|N_a\rangle$  et  $|N_a-1\rangle$  d'une part,  $|N_b\rangle$  et  $|N_b-1\rangle$  d'autre part de l'opérateur d'annihilation d'un boson au point  $r$ . Leur phase évolue donc respectivement comme  $\exp[-i(E_{n_a}-E_{(n_a-1)})t/\hbar]$  et  $\exp[-i(E_{n_b}-E_{(n_b-1)})t/\hbar]$ . Pour  $N_a$  et  $N_b$  grands, les différences d'énergie sont assimilables à des dérivées. On a donc un terme supplémentaire de différence de phase entre les deux puits:

$$\varphi_c(t) = \left( \frac{E_{N_b}}{N_b} - \frac{E_{N_a}}{N_a} \right) t / \hbar \quad (3 \quad 47)$$

d'où, en dérivant par rapport au temps:

$$\frac{d\varphi_c}{dt} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{E_{N_a}}{N_a} - \frac{E_{N_b}}{N_b} \right) = g(N_a, N_b) = 2gl \quad (3 \quad 48)$$

Cette vitesse de variation de la phase provient d'un terme supplémentaire  $hgl^2$  du Hamiltonien canonique de l'effet Josephson qui devient:

$$H(l, \varphi) / \hbar = gl^2 - \frac{J}{2} \sqrt{N^2 - 4l^2} \cos \varphi \quad (3 \quad 49)$$

avec les équations d'évolution couplées:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2gl + \frac{2Jl \cos \varphi}{\sqrt{N^2 - 4l^2}} \quad ; \quad \frac{dl}{dt} = \frac{J}{2} \sqrt{N^2 - 4l^2} \sin \varphi \quad (3 \quad 50)$$

# Effet Josephson au voisinage de l'équilibre

Considérons d'abord le cas de petites oscillations au voisinage de l'équilibre. On peut alors développer  $H(l, \dot{l})$  au voisinage de  $l = 0$ :

$$H(l, \dot{l}) \approx g + \frac{J}{N} l^2 + \frac{JN}{4} \dot{l}^2 \quad (\text{à une constante près}) \quad (3-51)$$

Le système a la dynamique d'un oscillateur harmonique dans lequel les termes en  $l^2$  et  $\dot{l}^2$  jouent respectivement les rôles d'énergie potentielle et cinétique.

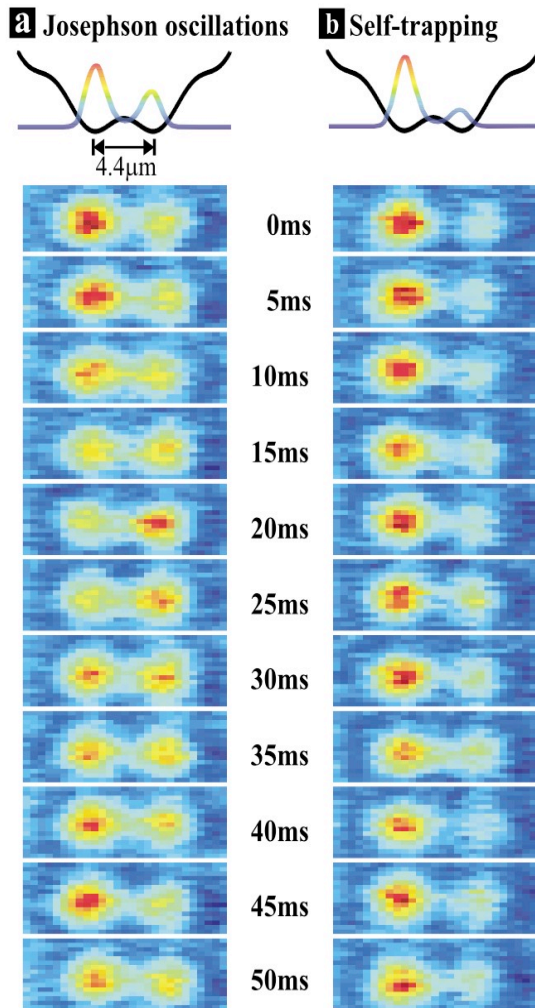
On retrouve dans un contexte différent le Hamiltonien rencontré dans l'étude du régime stationnaire. Les collisions, qui dans le cas répulsif diminuent les fluctuations de l'état stationnaire, ont pour effet de rendre l'oscillateur décrivant les écarts à l'équilibre plus «rigide», ce qui se traduit par une augmentation de la fréquence de l'oscillation entre les puits. Dans le cas attractif, au contraire, l'oscillateur devient plus «mou» et la fréquence des oscillations autour de l'équilibre diminue et s'annule pour la valeur critique  $g = -J/N$  correspondant à la transition vers les «chats de Schrödinger». Pour  $g < -J/N$ , le système n'oscille plus et s'éloigne de  $l=0$ . La linéarisation n'est plus valable.

La fréquence de l'oscillateur (pour  $g > -J/N$ ) est:

$$\omega_{J,g} = J \sqrt{1 + Ng / J} \quad (3-52),$$

identique à l'expression (3-26). Cette fréquence est égale à  $J$  en absence d'interactions et tend vers  $(NgJ)^{1/2}$  pour  $Ng \gg J$ . On l'appelle **fréquence plasma**.

# Effet tunnel et self-trapping dans une jonction Josephson bosonique



Le comportement d'un condensat bi-modal de  $Rb$  ( $g > 0$ ) obéissant aux équations couplées:

$$\frac{d}{dt} = 2gl + \frac{2Jl \cos}{\sqrt{N^2 - 4l^2}} \quad ; \quad \frac{dl}{dt} = \frac{J}{2} \sqrt{N^2 - 4l^2} \sin$$

a été testé récemment ([Albiez et al, PRL 95, 010402 \(2005\)](#)). L'évolution des populations entre les 2 puits est observée par imagerie d'absorption. Pour  $\psi(0) = 0$  et une différence de population initiale faible entre les puits, on a une oscillation à la fréquence plasma. Au dessus d'un seuil de différence de population initiale, l'oscillation est bloquée et les atomes restent piégés dans leurs puits respectifs. Dans ce régime de « self-trapping »,  $\psi$  croît quasi-linéairement, sans osciller. Comme sa dérivée change rapidement de signe,  $l$  reste quasi-stationnaire, avec de petites oscillations rapides (et indécélables) autour de sa valeur initiale.

Dans cette expérience, l'évolution de la phase  $\phi(t)$  a aussi été observée par interférométrie atomique.

## Conclusion de la troisième leçon

Nous avons décrit différents types d'états bimodaux d'un condensat atomique réparti entre deux puits de potentiel: états cohérents à fluctuations gaussiennes de la partition du nombre de bosons entre les deux puits, états à fluctuation gelées et états de type chat de Schrödinger. Les propriétés de ces états résultent de la compétition entre l'effet tunnel et les interactions entre atomes. Dans un régime dynamique, cette compétition conduit à un blocage de l'oscillation Josephson entre les puits lorsque leur différence de population initiale dépasse un certain seuil. Des effets analogues se produisent lorsque le condensat bimodal est de type spineur. L'effet tunnel entre les puits est alors remplacé par l'oscillation de Rabi induite par un champ classique entre les deux états de spin. Dans la 4<sup>ème</sup> leçon, nous approfondirons cette étude en adoptant un modèle de moment angulaire collectif pour décrire le système et nous donnerons des références plus complètes traitant de chats et de différents états non-classiques de condensats bimodaux.