

Cours 2006-2007: Quatrième Leçon

20 Novembre 2006

Condensats bimodaux (II): modèle du moment angulaire collectif

4A. Analogie entre condensats bimodaux, ensembles symétriques de spins et états cohérents d'un champ en présence d'effet Kerr.

4B. Effondrement et résurgence de la phase des condensats bimodaux: chats de Schrödinger en régime dynamique.

4A.

Analogie entre condensats bimodaux, ensembles symétriques de spins et états cohérents d'un champ en présence d'effet Kerr.

Rappel sur les états de Dicke, états propres du moment angulaire de N spins. États cohérents du moment angulaire et états comprimés. Relation entre compression de spin et « squeezing » de quadrature ou de nombre de photons en optique quantique. Lien entre la compression de spin et l'intrication. Comment réaliser des états comprimés en exploitant les collisions entre atomes dans un condensat bimodal. Création transitoire d'états à fluctuation gelée de la différence du nombre de particules.

Condensat bimodal à N particules, moment angulaire $S = N/2$ et états de Dicke

Un ensemble de N bosons à deux états, symétrique par échange des particules, est analogue à un moment angulaire $N/2$ avec les correspondances:

$$\left| \frac{N}{2} + l, \frac{N}{2} - l \right\rangle \quad \left| S = \frac{N}{2}; M_z = l \right\rangle \quad (4 \quad 1)$$

$$\frac{a^\dagger a - b^\dagger b}{2} \quad S_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1, N} \sigma_{z,j} \quad (4 \quad 2)$$

$$a^\dagger b \quad S_+ = S_x + iS_y = \sum_{j=1, N} \sigma_{+,j} \quad (4 \quad 3)$$

$$ab^\dagger \quad S_- = S_x - iS_y = \sum_{j=1, N} \sigma_{-,j} \quad (4 \quad 4)$$

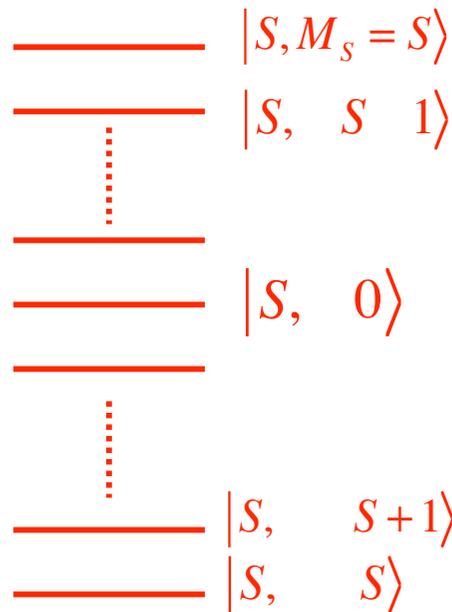
$$a^\dagger b, ab^\dagger = a^\dagger a - b^\dagger b \quad [S_+, S_-] = 2S_z \quad (4 \quad 5) \quad \text{Commutateurs d'un moment angulaire}$$

$$\frac{1}{2} (a^\dagger a - b^\dagger b), a^\dagger b = a^\dagger b \quad S_z, S_+ = S_+ \quad (4 \quad 6)$$

$$a^\dagger b |l\rangle = \sqrt{\frac{N}{2} - \frac{N}{2} + 1} \quad l(l+1) |l+1\rangle \quad S_+ |S, M\rangle = \sqrt{S(S+1) - M(M+1)} |S, M+1\rangle \quad (4 \quad 7)$$

Les états $|S, M\rangle$ sont les **états de Dicke**, superpositions symétriques des états des N spins avec $S+M$ particules dans un état et $S-M$ dans l'autre ($2S=N$).

Les états symétriques de Dicke et leur intrication



Appelons a et b (ou a, b) les deux états atomiques individuels qui sont soit des états internes de type spin, soit des états de positions spatiales différentes (expérience à deux puits). Les énergies de ces deux états diffèrent de $\hbar \omega$. Les $2N+1$ états du moment angulaire collectif forment une échelle de niveaux équidistants de $\hbar \omega$ (voir ci-contre pour N pair). Les états extrêmes sont des états produits non-intriqués des N particules:

$$|S, S\rangle = | \dots \rangle ; |S, S\rangle = | \dots \rangle \quad (4.8)$$

Le 1^{er} état excité est une superposition intriquée (partition distinguant une particule des $N-1$ autres, état W du cours 2005-2006):

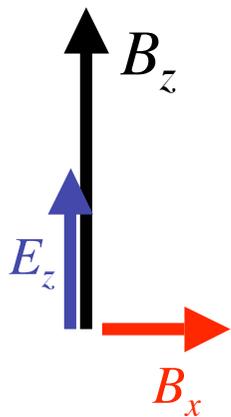
$$|S, S+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (| \dots \rangle + | \dots \rangle + \dots + | \dots \rangle) \quad (4.9)$$

Les autres états de Dicke $|S, M\rangle = |N_a=S+M, N_b=S-M\rangle$, et en particulier $|S, 0\rangle = |N/2, N/2\rangle$, sont intriqués dans le même sens (ils sont non-intriqués au sens d'une partition entre 2 modes - voir leçon précédente). Nous considérons dans cette leçon l'intrication associée à la partition entre particules. **En ce sens, tous les états de Dicke (sauf les 2 extrêmes) sont intriqués.**

Hamiltonien Bose-Hubbard à 2 puits équivalent à celui d'un moment angulaire dans champs magnétique et électrique

$$H_{J,g} = \frac{\hbar}{2} \left(a^\dagger a - b^\dagger b \right) - \frac{\hbar J}{2} (ab^\dagger + a^\dagger b) + \frac{\hbar g}{2} a^\dagger a (a^\dagger a - 1) + b^\dagger b (b^\dagger b - 1)$$

a une constante près $H_{J,g} / \hbar = S_z - J S_x + g S_z^2$ (4 10)



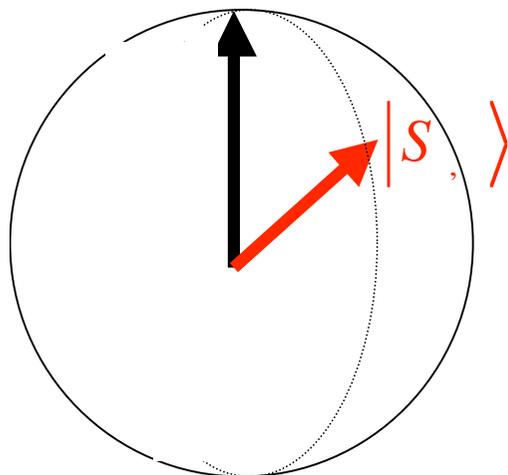
Pour un condensat bimodal à 2 puits, l'analogie du moment angulaire associe la différence d'énergie entre les puits à l'effet d'un champ magnétique B_z le long de O_z , l'effet tunnel à celui d'une composante transversale B_x du champ le long de O_x et l'effet des collisions dans chaque puits à un effet Stark quadratique produit par un champ électrique E_z le long de O_z . A résonance (énergies dans les puits égales), la composante B_z du champ magnétique est nulle, ce que nous supposerons dans la suite. Pour un condensat spinoriel (à 2 états internes atomiques différents) un modèle analogue s'applique si on établit entre les composantes un coupage par champ résonnant. L'effet tunnel (J) devient une oscillation de Rabi.

Effet tunnel vu comme précession de Larmor.

Etats cohérents du moment angulaire

Les états du moment angulaire obtenus par rotation de l'état $|S, S\rangle = |N, 0\rangle$ sont représentés par des vecteurs sur une hyper-sphère de Bloch. Ce sont des produits tensoriels d'états à une particule, qui se décomposent sur la base des états $|N_a\rangle, |N_b\rangle$ sous forme binomiale. L'état $|S, S\rangle$ obtenu par rotation de $|S, S\rangle$ dans la direction d'angles polaires θ, ϕ est:

$$|S, S\rangle = \sum_i \cos\frac{\theta}{2} |i\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |i\rangle \quad (4.11)$$



C'est une superposition d'états de Dicke, avec une fluctuation de M égale à $N(\sin\theta)/2$. Les $|S, S\rangle$ sont appelés *états cohérents du moment angulaire*. Sous l'effet du terme en JS_x du hamiltonien (rotation autour de Ox), l'angle θ précesse à la fréquence J et le système, initialement dans $|S, S\rangle$, reste un état cohérent dont le vecteur tourne dans un plan méridien de l'hypersphère de Bloch: c'est l'effet Josephson dans un gaz sans interactions. Les états cohérents de spin sont des états à N particules non-intriquées (au sens retenu page précédente).

Fluctuation des états cohérents du moment angulaire

Des relations de commutation de S :

$$S_i, S_j = i \epsilon_{ijk} S_k \quad (4 \quad 12)$$

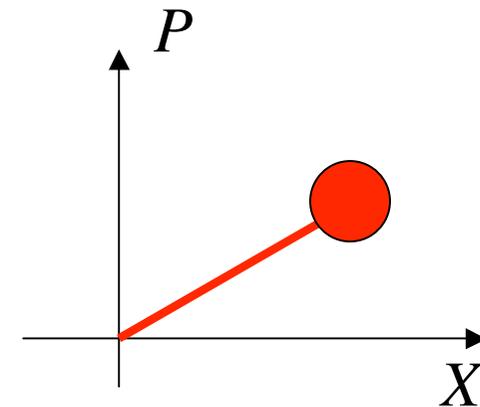
(i, j et k indices cartésiens et $\epsilon_{ijk} = \pm 1$ suivant la parité de la permutation ijk), on déduit les relations d'incertitude générales reliant les fluctuations de S_i et S_j à la valeur moyenne de S_k :

$$\Delta S_i \Delta S_j \geq \frac{|\langle S_k \rangle|}{2} \quad (4 \quad 13)$$

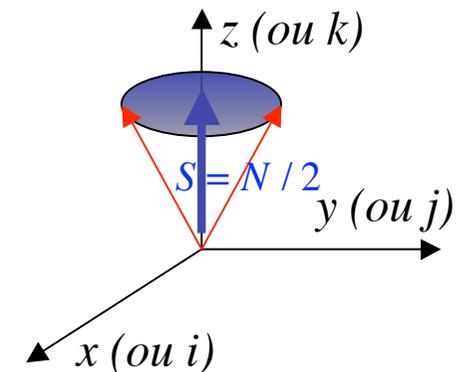
Si le système est dans l'état cohérent $|S, S\rangle$, les composantes transversales S_x et S_y ont des moyennes nulles. Leur fluctuation est simple à déterminer, en considérant le moment angulaire comme un ensemble de spins $1/2$. Chacun a une probabilité égale d'être $+1/2$ et $-1/2$ le long de Ox ou Oy . On en déduit immédiatement que $\Delta S_x^2 = \Delta S_y^2 = N/4$ (analogie avec une marche aléatoire). Les fluctuations transversales de S sont isotropes, et prennent la valeur minimale compatible avec les relations d'incertitude ($\langle S_z \rangle = N/2$ pour l'état $|S, S\rangle$). Ce résultat se généralise par rotation à un état cohérent $|S, S\rangle$ quelconque: les fluctuations transversales du moment angulaire collectif sont isotropes et minimales dans un état cohérent. L'analogie avec un état cohérent du rayonnement est présentée page suivante.

Analogie entre états cohérents du moment angulaire et états de Glauber d'un oscillateur

Un état cohérent d'un oscillateur harmonique (ou d'un mode du champ) présente des fluctuations de X et P (ou de deux quadratures conjuguées) égales à $1/2$ (avec normalisation appropriée) et l'état est représenté dans le plan de phase par le cercle d'incertitude correspondant.

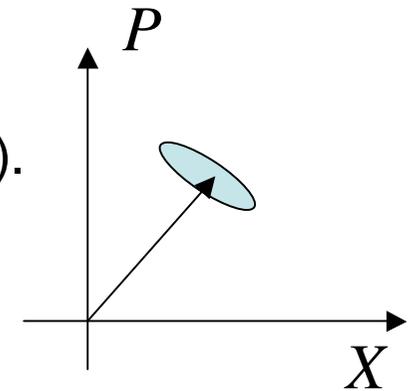


Un état cohérent du moment angulaire $S=N/2$ correspond à un ensemble non-intriqué de N spins $1/2$ pointant tous dans la même direction. Dans le plan orthogonal à cette direction, les composantes transversales des N spins peuvent être vues classiquement comme N vecteurs non corrélés, pointant dans des directions aléatoires. Le vecteur somme résultant divisé par N a une fluctuation isotrope égale à $1/2$ (représentée par un cercle d'incertitude). Les opérateurs S_x/N et S_y/N sont les analogues de X et P .



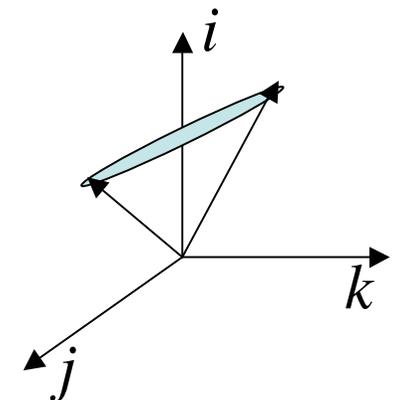
Etats comprimés du moment angulaire (*spin squeezing*)

Les états cohérents d'un oscillateur peuvent être transformés par un hamiltonien non-linéaire en états comprimés dont le produit des fluctuations est minimal (minimal squeezed states). Les relations d'incertitude imposent toujours au produit des fluctuations d'être $= 1/4$, mais ces fluctuations deviennent inégales. Une quadrature a des fluctuations supérieures à $1/2$ aux dépens de l'autre dont les fluctuations sont plus grandes. Nous rappelons plus loin comment cette compression peut être réalisée en optique.



Il existe de même des états comprimés du moment angulaire (*spin squeezed states*) qui ont des composantes de fluctuations inégales dans deux directions orthogonales normales à la direction du moment angulaire moyen. Le degré de compression (*squeezing*) est mesuré par le paramètre:

$$r^2 = \min \frac{N \langle S_i^2 \rangle}{\langle S_j \rangle^2 + \langle S_k \rangle^2} \quad (4 \quad 14)$$



égal à 1 pour un état cohérent et < 1 pour un état comprimé. Dans ce dernier cas, les spins $1/2$ constituants sont toujours **intriqués** (voir pages suivantes).

Degré de compression d'un ensemble non intriqué de N spins

Montrons que si N spins sont dans l'état non intriqué le plus général possible:

$$= \sum_k P_k \left(\begin{matrix} (1) \\ k \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (2) \\ k \end{matrix} \right) \cdots \left(\begin{matrix} (N) \\ k \end{matrix} \right) \quad \text{avec } P_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_k P_k = 1 \quad (4 \quad 15)$$

leur degré de compression est ≥ 1 . Corollaire: un degré de compression < 1 implique donc que les spins sont intriqués. Commençons par calculer la valeur moyenne de S_z^2 dans le terme k de la somme (4-15):

$$\langle S_z^2 \rangle_k = \sum_{i=1}^N \langle s_z^{(i)2} \rangle_k + \sum_{i \neq j} \langle s_z^{(i)} s_z^{(j)} \rangle_k = \sum_{i=1}^N \langle s_z^{(i)2} \rangle_k + \sum_{i \neq j} \langle s_z^{(i)} \rangle_k \langle s_z^{(j)} \rangle_k = \frac{N}{4} + \sum_{i \neq j} \langle s_z^{(i)} \rangle_k \langle s_z^{(j)} \rangle_k \quad (4 \quad 16)$$

Exprimons ensuite différemment la somme de produits de valeurs moyennes:

$$\sum_{i \neq j} \langle s_z^{(i)} \rangle_k \langle s_z^{(j)} \rangle_k = \left\langle \sum_i s_z^{(i)} \right\rangle_k^2 - \sum_i \langle s_z^{(i)} \rangle_k^2 = \langle S_z \rangle_k^2 - \sum_i \langle s_z^{(i)} \rangle_k^2 \quad (4 \quad 17)$$

et en pondérant sur k , on trouve:

$$\langle S_z^2 \rangle = \frac{N}{4} + \sum_k P_k \langle S_z \rangle_k^2 - \sum_k P_k \sum_i \langle s_z^{(i)} \rangle_k^2 \quad (4 \quad 18)$$

d'où la fluctuation de S_z :

$$\langle S_z^2 \rangle - \langle S_z \rangle^2 = \frac{N}{4} + \sum_k P_k \langle S_z \rangle_k^2 - \sum_k P_k \sum_i \langle s_z^{(i)} \rangle_k^2 - \langle S_z \rangle^2 \quad (4 \quad 19)$$

Degré de compression d'un ensemble non intriqué de N spins (suite)

Nous pouvons maintenant minorer (4-19). De l'inégalité de Cauchy-Schwarz(*):

$$\left(\sum_k \langle S_z \rangle_k \right)^2 \leq \sum_k P_k \langle S_z \rangle_k^2 \quad (4-20)$$

on déduit:

$$\left(\sum_k \langle S_z \rangle_k \right)^2 \leq \frac{N}{4} \sum_k P_k \langle s_z^{(i)} \rangle_k^2 \quad (4-21)$$

D'autre part, chaque spin (i) ayant un vecteur de Bloch de norme $1/2$:

$$\langle s_x^{(i)} \rangle_k^2 + \langle s_y^{(i)} \rangle_k^2 + \langle s_z^{(i)} \rangle_k^2 = \frac{1}{4} \quad \langle s_z^{(i)} \rangle_k^2 \leq \left(\langle s_x^{(i)} \rangle_k^2 + \langle s_y^{(i)} \rangle_k^2 \right) \frac{N}{4} \quad (4-22)$$

ce qui, compte tenu de (4-21) donne:

$$\left(\sum_k \langle S_z \rangle_k \right)^2 \leq \frac{N}{4} \sum_k P_k \left(\langle s_x^{(i)} \rangle_k^2 + \langle s_y^{(i)} \rangle_k^2 \right) \quad (4-23)$$

et en notant enfin (double utilisation de Cauchy-Schwarz) que:

$$P_k \langle s_{x/y}^{(i)} \rangle_k^2 \leq \langle S_{x/y} \rangle^2 / N \quad (4-24)$$

on obtient finalement l'inégalité annoncée pour tout état séparable (4-15):

$$\left(\sum_k \langle S_z \rangle_k \right)^2 / \left(\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 \right) \leq 1 \quad (4-25)$$

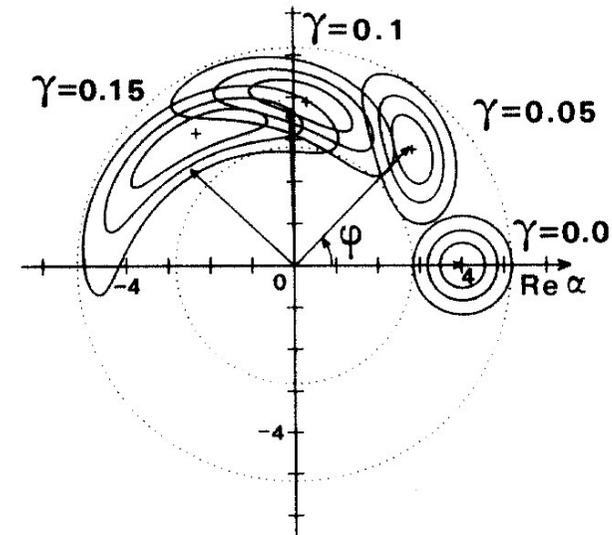
Tout état avec $\left(\sum_k \langle S_z \rangle_k \right)^2 / \left(\langle S_x \rangle^2 + \langle S_y \rangle^2 \right) < 1$ est donc **intriqué** (Sorensen et al, Nature, 409, 63 (2001)).

(*) a_i, b_i réels on a: $\left(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \right)^2 \leq \left(a_1^2 + \dots + a_n^2 \right) \left(b_1^2 + \dots + b_n^2 \right)$

Rappels sur la compression des états cohérents en optique

Pour comprimer un état cohérent, on peut utiliser un couplage non-linéaire qui réalise un Hamiltonien de la forme $h (a^2 + a^{\dagger 2})$ (squeezing de quadratures) ou un Hamiltonien de la forme $H_{Kerr} = h (a^{\dagger 2} a^2) = h a^{\dagger} a (a^{\dagger} a - 1)$ (squeezing de nombre de photons ou de phase). Nous nous limiterons à un rappel de ce dernier type de squeezing, très proche de celui produit par les effets collisionnels dans les condensats. Le hamiltonien Kerr décrit une auto-modulation de phase du champ se propageant dans un milieu dont l'indice dépend de l'intensité.

L'effet distord le cercle d'incertitude du champ qui, de circulaire, prend une forme de «banane». Les fluctuations (radiales dans l'espace des phases) du nombre de photons sont comprimées, au dépend de celles (angulaires) de la phase qui sont augmentées. D'autres effets apparaissent aux temps longs (voir plus loin).



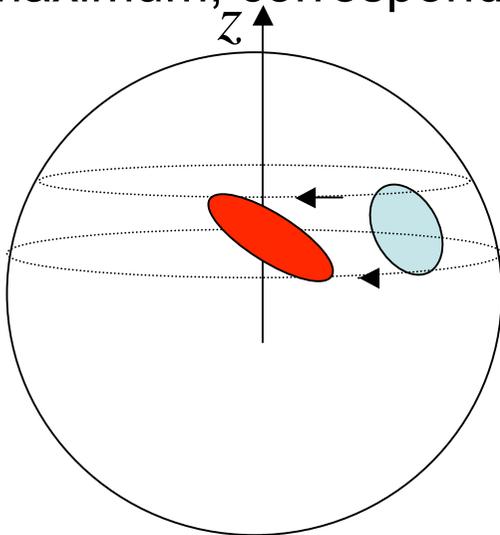
*Kitagawa et Yamamoto,
Phys.RevA, 34, 3974
(1986).*

Compression des états de spin par Hamiltonien en S_z^2

Exprimons la rotation de l'opérateur $S_+ = S_x + iS_y$ sous l'effet du Hamiltonien S_z^2 :

$$S_+(t) = \exp(i S_z^2 t) S_+(0) \exp(-i S_z^2 t) = S_+(0) e^{2i t(S_z + \frac{1}{2})} \quad (4-26)$$

La vitesse de rotation est linéaire en S_z : les composantes de S_z les plus grandes tournent plus vite sur la sphère de Bloch. Le cercle d'incertitude d'un état cohérent initial est déformé, d'où l'effet de compression d'une composante du moment angulaire collectif (squeezing). La compression atteint son maximum, correspondant à:



$$\Delta S_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{N} \right)^{2/3} \quad (4-27)$$

au bout d'un temps:

$$t_{\text{squeeze}} \sim 1 / \left(\frac{3}{N} \right)^{2/3} \quad (4-28)$$

On a une réduction des fluctuations (ΔS_i minimum) d'un facteur de l'ordre de **10** pour $N=1000$ atomes.

Pour calculs précis, voir *Kitagawa et Ueda, Phys.RevA 47, 5138 (1993) et Sorensen et al, Nature, 409, 63 (2001).*

Intérêt spectroscopique de l'effet de compression de spin

Nous avons montré qu'un ensemble symétrique de N spins peut avoir, dans une des composantes de son moment angulaire collectif, des fluctuations beaucoup plus petites que les fluctuations standard d'un état cohérent, correspondant à des spins non-corrélés. Cette compression peut être créée par un Hamiltonien en S_z^2 , contenant des termes croisés d'interaction entre spins de la forme $s_{zi} \cdot s_{zj}$. Ces interactions corrélient les spins entre eux et créent de l'intrication, une condition nécessaire à l'existence de compression.

La compression des états de spin est intéressante en spectroscopie, pour réduire le bruit au dessous de sa valeur standard. Si l'on détecte dans une expérience de résonance magnétique ou électronique une composante du moment collectif d'un ensemble d'atomes à deux niveaux, on a intérêt à ce que cette composante soit comprimée pour réduire le bruit de mesure. Si une petite perturbation fait tourner cette composante, on détectera cette rotation avec une sensibilité d'autant plus grande que le bruit dans la direction normale à la rotation est plus petit. La méthode a été mise en œuvre dans des expériences sur des ensembles d'ions piégés (D.Wineland et al). De façon analogue, la compression des états cohérents a été proposée comme moyen d'augmentation de la sensibilité des mesures spectroscopiques en optique.

La compression de spin dans la physique des condensats bimodaux

Condensat dans 2 puits identiques séparés par une barrière:

fréquence de collision dans chaque puits: $g = \frac{4 \hbar a_s}{M} \left| \frac{d^3 \vec{r}}{d^3 \vec{r}} \right|$ (4 29)

Le hamiltonien de compression est alors: $\hbar g S_z^2 = \hbar g (a^\dagger a - b^\dagger b)^2 / 4$ (4 30)

Condensat spinoriel (deux états hyperfins d'un atome alcalin):

On définit les fréquences de collision g_1 et g_2 dans chaque état et la fréquence des collisions entre états, g_{12} , proportionnelles aux longueurs de diffusion associées aux trois types de collisions (a_{s1} , a_{s2} et a_{s12}). On pose comme plus haut $N_1 = (N/2) + l$ et $N_2 = (N/2) - l$ et on a:

$$W / \hbar = \frac{g_1}{2} N_1(N_1 - 1) + \frac{g_2}{2} N_2(N_2 - 1) + g_{12} N_1 N_2 \quad (4 31)$$

$$= (g_1 + g_2 + 2g_{12}) N^2 / 8 - (g_1 + g_2) N / 4 + (g_1 - g_2)(N - 1)l / 2 + (g_1 + g_2 - 2g_{12}) l^2 / 2$$

terme constant (pas d'effet) $(g_1 - g_2)(N - 1)S_z / 2$ $(g_1 + g_2 - 2g_{12})S_z^2 / 2$
renormalisation de la différence d'énergie entre les deux états (ne crée pas de corrélations) *terme créant compression et intrication*

La compression dépend du paramètre collisionnel = $(g_1 + g_2 - 2g_{12}) / 2$

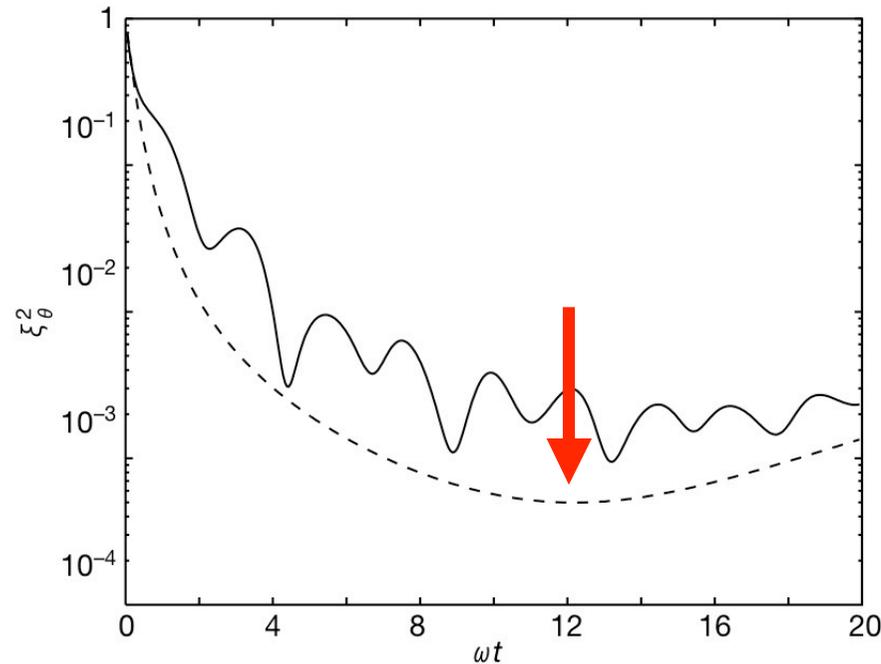
Comprimer N_1-N_2 dans un condensat bimodal

Appliquons une impulsion $\pi/2$ à un condensat bimodal initialement dans $|N,0\rangle$, ce qui porte le moment angulaire S le long de Ox . Puis laissons agir les collisions seules pendant le temps de compression maximale. Si $N \gg 1$, une composante de S (direction n) est presque totalement comprimée autour d'une valeur moyenne $\neq 0$ (facteur de compression proportionnel à $N^{-2/3}$ soit $(S_n)^2 \sim (1/4) N^{1/3}$). On applique ensuite une impulsion réalisant une rotation du moment angulaire (effet tunnel ou précession de Rabi) qui ramène n le long de Oz (l'opération agit indépendamment sur les atomes, sans changer l'intrication). On obtient un état comprimé de N_1-N_2 , («gel» transitoire des fluctuations). Pour $N \sim$ quelques dizaines, la fluctuation est ~ 1 . L'état obtenu est une superposition de 2 ou 3 états de Dicke de $M_z \sim 0$. Pour N impair, on a:

$$| \rangle = c_+ \left| \frac{N}{2} + \frac{1}{2}, \frac{N}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + c_- \left| \frac{N}{2} - \frac{1}{2}, \frac{N}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = c_+ \left| S = \frac{N}{2}, M_z = \frac{1}{2} \right\rangle + c_- \left| S = \frac{N}{2}, M_z = -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (4 \quad 32)$$

(Si N pair, on a une superposition d'états avec $M_z = 0, \pm 1$). En calculant $\langle S_{x/y} \rangle$ et $\langle S_{x/y}^2 \rangle$ dans $| \rangle$, on vérifie que suivant les phases des coefficients c_{\pm} , une composante transversale $S_x \cos + S_y \sin$ a une valeur moyenne non nulle, alors que la composante dans la direction $\pm \pi/2$ est de valeur moyenne nulle, avec des fluctuations «dilatées» (composante conjuguée de S_z). Rappelons que chaque état de Dicke, vu comme un état à N particules est fortement intriqué. Il en est donc de même de $| \rangle$.

Compression en fonction du temps: modèle du spin et corrections



Simulation de l'évolution temporelle du paramètre de compression pour un condensat bimodal de type spineur avec $N=10^5$.

En pointillé: modèle simple avec hamiltonien de compression S_z^2 . Le maximum de compression (flèche) est atteint au bout d'un temps $t_{squeeze} \sim 1/N^{2/3} \sim 1/2000$ (correspondant à quelques oscillations dans le potentiel piégeant).

En traits plein: calcul prenant en compte le couplage entre les degrés de liberté internes et le mouvement des atomes (suivant l'état de spin des atomes, l'interaction change la fonction d'onde spatiale, créant ainsi une intrication entre l'état interne de spin et l'état externe spatial du condensat). Ces effets de couplage «spin-orbite» sont négligeables pour N petit.

(A.Sorensen, L-M.Duan, J.I.Cirac et P.Zoller, Nature, 409, 63 (2001)).

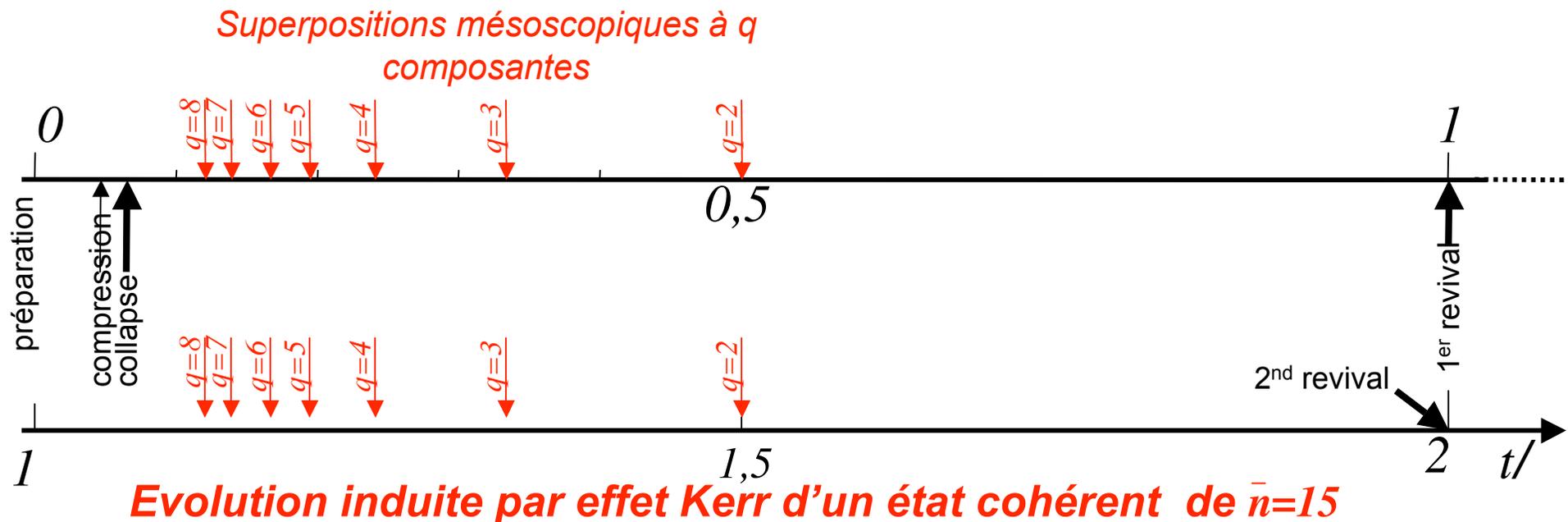
4B.

Effondrement et résurgence de la phase de condensats bimodaux: chats de Schrödinger en régime dynamique.

Chats de Schrödinger à deux ou plusieurs composantes en optique quantique. Comment préparer en principe ces états par effet Kerr. Préparation analogue de chats bosoniques dans un condensat bi-modal. Comment détecter ces états non-classiques. Analogie avec les états GHZ dans des chaînes d'ions piégés.

Evolution aux temps longs d'un condensat bimodal préparé dans un état cohérent

La phase de compression étudiée au §4A est le début d'une évolution complexe du condensat bimodal à partir d'un état cohérent initial. Avant d'étudier ce phénomène sur les condensats, nous allons rappeler les effets analogues sur les états d'un champ cohérent en optique quantique, en présence d'effet Kerr. Après le squeezing, il y a, au bout d'un temps $t_{collapse} \sim 14 \bar{n}^{1/2}$, un déphasage complet de l'état suivi, aux instants $t = l/q$ (q entier), par les apparitions transitoires de superpositions mésoscopiques d'états à q composantes. Un état cohérent renaît au temps $t_{revival} = 1$, puis des états mésoscopiques se reforment aux instants $(q+1)/q$, avant une nouvelle résurgence de l'état cohérent au temps 2 . Le processus se reproduit ensuite périodiquement.



Zoologie des chats de Schrödinger en optique

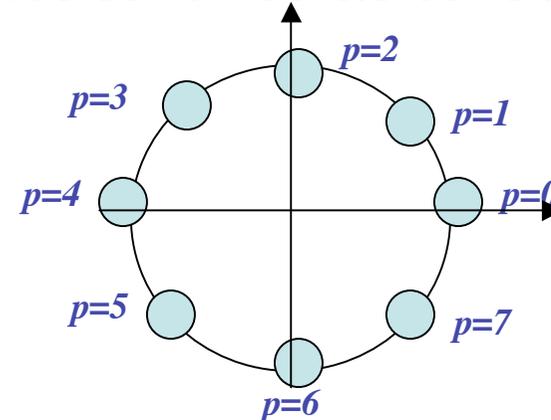
Les états de type «chat» sont des superpositions cohérentes d'états de Glauber de même amplitude régulièrement répartis sur un cercle dans le plan de phase:

$$\left| \begin{matrix} k \\ q \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{p=0}^{q-1} e^{2ipk/q} \left| e^{2ip/q} \right\rangle ; \quad \left| \begin{matrix} k \\ q \end{matrix} \right\rangle^2 = 2q$$

($k = 0, 1, 2, \dots, q-1$) (4-33)

Les q états de k différents sont quasi-orthogonaux:

$$\left\langle \begin{matrix} k' \\ q \end{matrix} \middle| \begin{matrix} k \\ q \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{q} \sum_{p=0}^{q-1} e^{2ip(k-k')/q} = \delta_{k,k'} \quad (4-34)$$

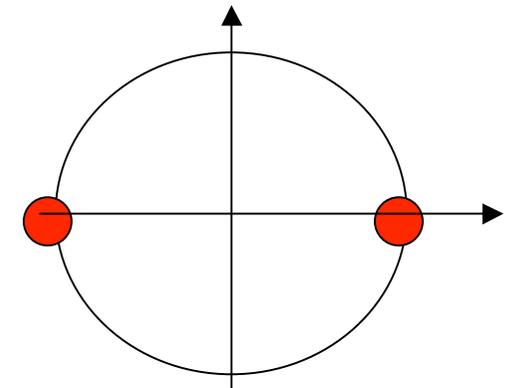


Chats $q = 8$: huit états quasi-orthogonaux, différant par leurs phases quantiques, de fonction Q quasi-identique

Généralisation du cas $q=2$:

$$\left| \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \rangle + | \rangle) : \text{chat de phase pair à 2 composantes (n pair)}$$

$$\left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \rangle - | \rangle) : \text{chat de phase impair à 2 composantes (n impair)}$$



(4-35)

Zoologie des chats de Schrödinger (suite)

Amplitude de probabilité d'avoir n photons dans le chat $| \frac{k}{q} \rangle$:

$$\langle n | \frac{k}{q} \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{n-k}}{\sqrt{q(n!)}} e^{2ip(n-k)/q} \quad (4 \quad 36)$$

Cette expression n'est non-nulle que si $n-k$ est multiple de q $n=k+sq$ (s entier)

Ainsi, le chat $| \frac{k}{q} \rangle$ se développe sur les états de Fock tels que n est égal à k modulo q . Pour $q=2$, on retrouve la propriété de parité des chats de phase à 2 composantes.

En introduisant les opérateurs de « *parité modulo q* » (non-hermitiques si $q > 2$):

$$P_q = e^{2i a^\dagger a/q} \quad (4 \quad 37)$$

on déduit que les $| \frac{k}{q} \rangle$ sont états propres de ces opérateurs:

$$P_q | \frac{k}{q} \rangle = e^{2ik/q} | \frac{k}{q} \rangle \quad (4 \quad 38)$$

Finalement, on peut développer l'état cohérent sur les $| \frac{k}{q} \rangle$ suivant:

$$| \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_k | \frac{k}{q} \rangle \quad (4 \quad 39)$$

Evolution aux temps longs d'un état cohérent induite par effet Kerr

Considérons l'évolution d'un état cohérent initial sous l'effet du Hamiltonien Kerr. Nous avons vu au §4.A qu'aux temps courts, on obtient un état comprimé (en fait jusqu'à $t \sim n^{-2/3}$). Voyons ce qu'il advient aux temps plus longs.

L'évolution du champ, initialement dans l'état cohérent $|\alpha\rangle$, est décrite par:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{i(a^\dagger a)^2 t} |\alpha\rangle = e^{i|\alpha|^2 t/2} \sum_n \frac{e^{i n^2 t}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (4.40)$$

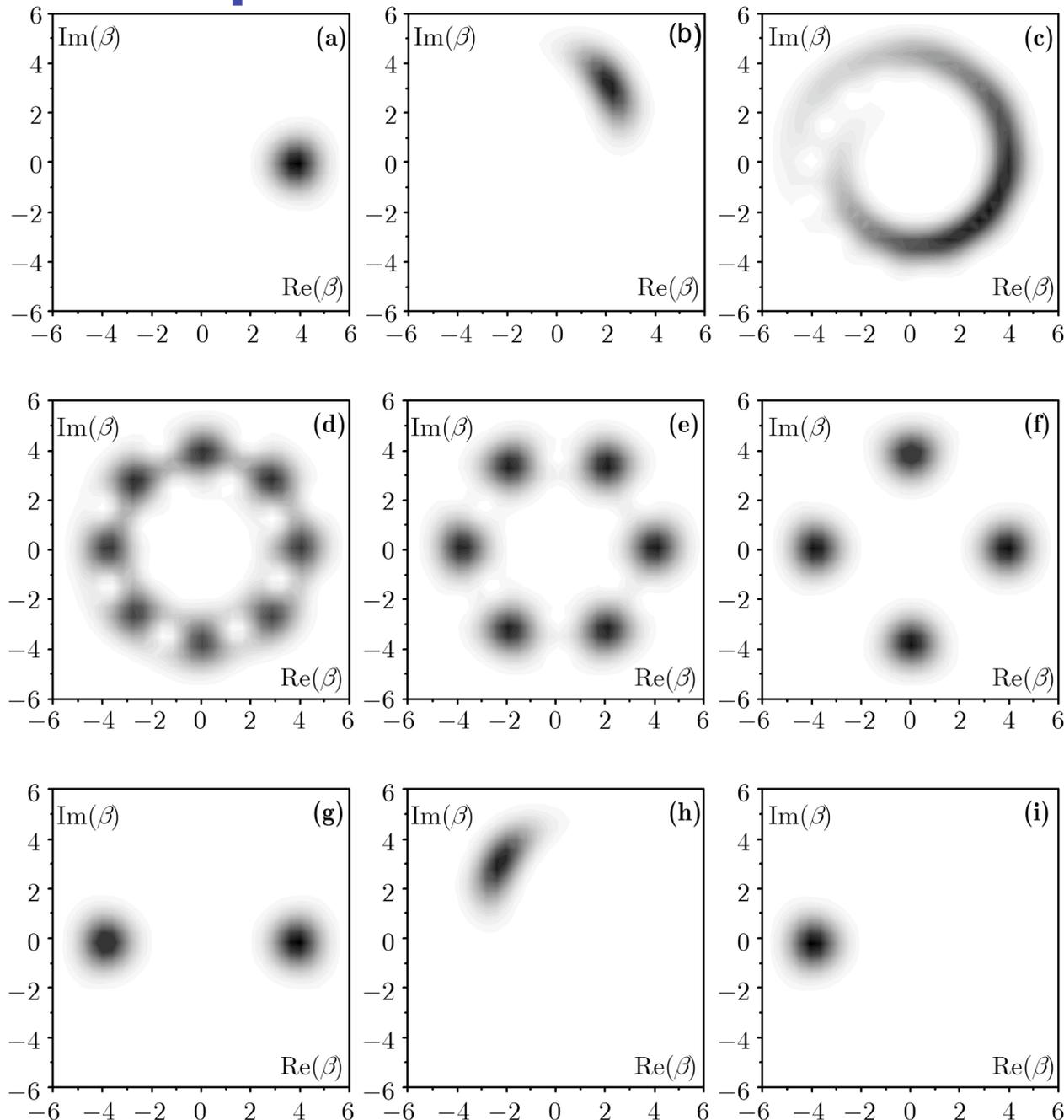
Distorsion non-linéaire de la phase quantique

Nous commençons par donner page suivante une représentation de cet état à différents instants, en adoptant le point de vue de la distribution Q . On rappelle la définition:

$$Q(\alpha, t) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \quad (4.41)$$

$Q(\alpha)$ mesure le recouvrement de l'état $|\alpha\rangle$ avec un état cohérent $|\alpha\rangle$. Cette distribution est représentée pour un nombre moyen de photons $\langle n \rangle = 15$.

Champ cohérent évoluant dans un milieu Kerr



Compression (cadre b), suivie d'un étalement de la phase (c), puis apparitions successives (d,e,f,g...) de chats multiples transitoires, avec refocalisation d'un état cohérent de phase opposée à l'état initial à $t = \pi/2$ (i). Puis le champ repasse par les états chats multiples et revient à l'état initial à $t = 2\pi$. Le phénomène se reproduit ensuite périodiquement.

Effondrement (collapse) de la phase de l'état cohérent

Evaluons la valeur moyenne de l'opérateur a dans l'état $|n\rangle$:

$$\langle n | a | n \rangle = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{i n^2 - (n-1)^2} = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{i(2n-1)} \quad (4-42)$$

La dispersion de la phase sur la largeur de l'état cohérent (Δn) est égale à $4n$. La phase est complètement étalée lorsque cette dispersion devient de l'ordre de 2π , soit au bout d'un temps:

$$t_{collapse} = \frac{2\pi}{4\sqrt{\bar{n}}} \quad (4-43)$$

Noter que ce temps est (un peu) plus long que le temps de compression optimale (2nd cadre de la page précédente), qui varie en $n^{-2/3}$. L'instant $t_{collapse}$ correspond au troisième cadre de la figure (équidistribution de la phase). A cet instant la fonction Q est complètement étalée et sa «microstructure» devient compliquée. De ce chaos apparent, des structures régulières émergent à des instants précis $t_q = \pi/q$. Nous allons maintenant expliquer ces effets de résurgences de phases multiples.

Apparitions transitoires de chats à plusieurs composantes

A l'instant $t = t_0$, l'état du champ s'écrit:

$$|(\alpha)_q\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i n^2/q} |n\rangle \quad (4-44)$$

En divisant n par q et en appelant s le quotient et k le reste, on peut écrire le nombre de photons n sous la forme:

$$n = k + sq \quad (4-45)$$

et:

$$\frac{n^2}{q} = \frac{k^2}{q} + (s^2q + 2sk) \quad (4-46)$$

Si q est pair, on a $n^2/q = k^2/q$ (modulo 2). Reprenons alors la décomposition (4-39) de l'état cohérent, sur les états $|k\rangle_q$ ne comprenant chacun que des nombres n égaux à k (modulo q). Chacun de ces états composants est affecté au temps t_0 d'un terme de phase k^2/q et on a donc:

$$|(\alpha)_q\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_k e^{ik^2/q} |k\rangle_q = \frac{1}{q} \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} e^{ik(k-2p)/q} |e^{2ip/q}\rangle \quad (4-47)$$

Apparitions transitoires de chats à plusieurs composantes (suite)

L'état $|\psi_q\rangle$ est une somme de q états cohérents de même amplitude et de phases différentes que l'on peut écrire sous la forme:

$$|\psi_q\rangle = \sum_{p=0}^{q-1} c_p |e^{2ip/q}\rangle \quad \text{avec} \quad c_p = \frac{1}{\sqrt{q}} e^{ik(k-2p)/q} \quad (4-48)$$

On montre que les c_p ont même module. Les composantes des chats transitoires ont même probabilité $1/q$ et ne diffèrent que par les phases ϕ_p de leurs amplitudes de probabilité:

$$|\psi_q\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{p=0}^{q-1} e^{i\phi_p} |e^{2ip/q}\rangle \quad (4-49)$$

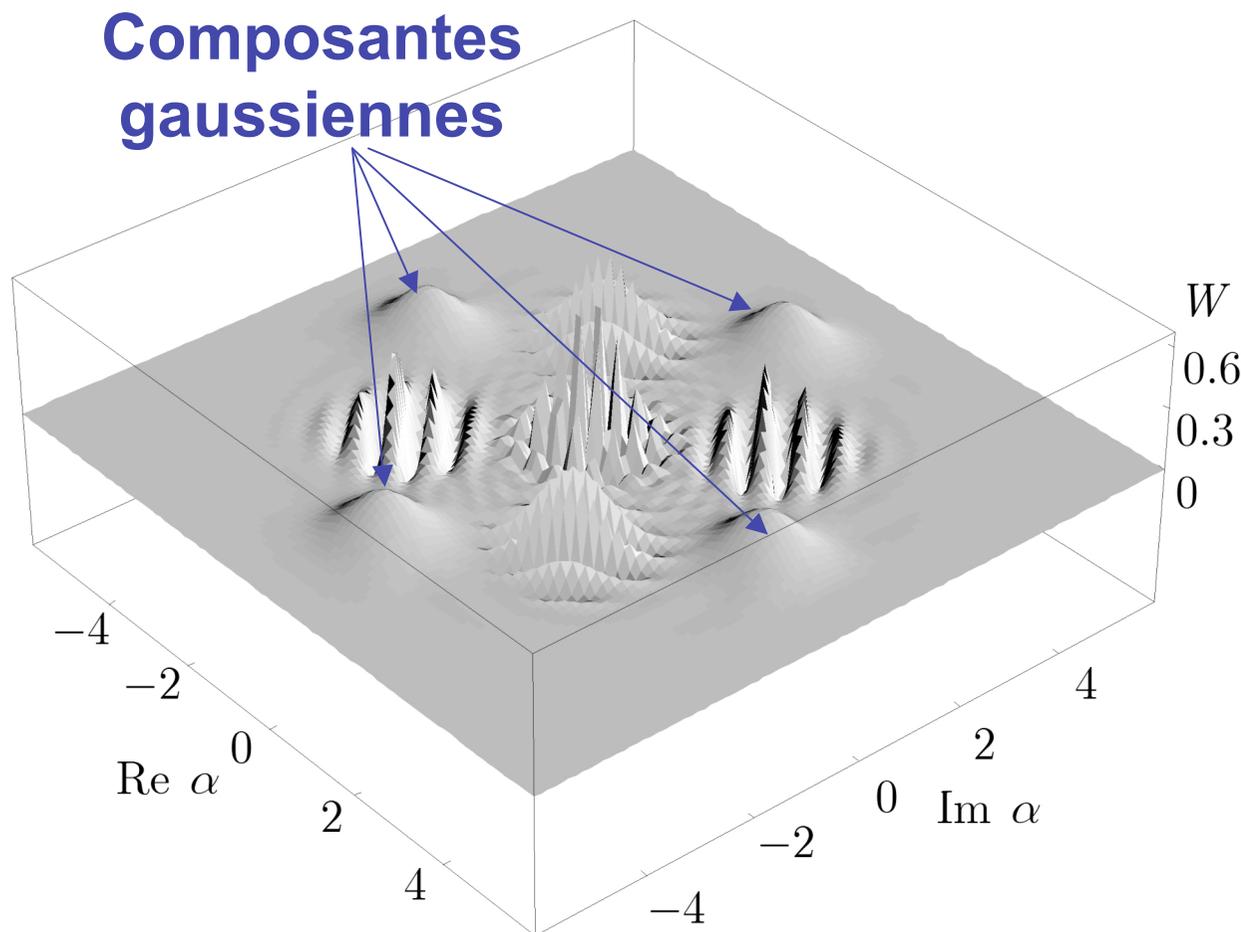
Aux instants $t_4 = \pi/4$ et $t_2 = \pi/2$ apparaissent les chats à 4 et 2 composantes:

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2} (e^{i\pi/4} |0\rangle + |i\rangle + e^{i\pi/4} |1\rangle + |i\rangle) \quad (4-50)$$

$$\text{et} \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\pi/4} |0\rangle + e^{-i\pi/4} |1\rangle) \quad (4-51)$$

Des chats à nombre impair d'états (non montrés sur la figure) se forment aux temps $t_{q'} = \pi/q'$ (q' impair). Enfin, au temps $t_1 = \pi$, un état cohérent unique se reforme avec une phase opposée à celle du champ initial (résurgence de la phase - dernier cadre de la figure).

Fonctions de Wigner du chat à 4 composantes apparaissant à l'instant /4



La fonction de Wigner $W(\alpha)$ est plus parlante que $Q(\alpha)$ car elle montre de façon claire la cohérence entre les différentes composantes (termes d'interférence au centre et entre les pics gaussiens associés aux quatre composantes). Voir cours 2002-2003.

Chats à plusieurs composantes en optique (fin)

Au delà de t_1 , aux instants $t = t_1 + q \cdot \frac{2\pi}{\omega} = (q+1) \cdot \frac{2\pi}{\omega}$, les chats à q composantes se reforment transitoirement avec un nombre décroissant de composantes, jusqu'à l'instant $2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ où l'état cohérent initial réapparaît. Le phénomène se poursuit ensuite de façon périodique. Noter que le nombre maximum de composantes distinctes est de l'ordre de la moitié du nombre moyen de photons dans le champ (8 composantes au plus pour 15 photons).

L'analyse précédente néglige les termes non-linéaires d'ordre supérieur du couplage entre le champ et le milieu transparent dans lequel il se propage. Elle néglige surtout les effets dissipatifs (absorption et diffusion de photons) qui détruisent très vite la cohérence de ces chats. L'expérience en optique n'a jamais pu être faite. Noter cependant l'analogie avec les chats en CQED décrits dans les années précédentes et avec les états mésoscopiques préparés avec des ions piégés (voir rappel plus loin).

La proposition de préparation de ce type de chats a été faite par B. Yurke et D. Stoler (Phys.Rev.Lett. 57, 13 (1986)).

Chats transitoires des condensats bimodaux

Considérons un condensat bimodal initialement préparé dans un état de spin cohérent par une impulsion $\pi/2$ et laissons agir le terme de collision à partir de l'instant $t=0$. La situation est analogue au cas optique. On remarque que pour $N \gg 1$ la distribution des états en $l = N = (N_1 - N_2)/2$ est gaussienne autour de $l=0$, tout comme la distribution des états de Fock dans un état de Glauber autour de la moyenne \bar{n} . Comparons enfin la valeur propre du Hamiltonien de collision (avec son terme en S_z^2) dans un état de N donné à celle du Hamiltonien Kerr $(a^\dagger a)^2$ dans un état de Fock $n = \bar{n} + n$:

$$\left\langle \frac{N}{2} + N, \frac{N}{2} \middle| W \middle| \frac{N}{2} + N, \frac{N}{2} \right\rangle = \text{terme constant} + \text{terme linéaire en } N + N^2$$

$$\langle \bar{n} + n | (a^\dagger a)^2 | \bar{n} + n \rangle = (\bar{n} + n)^2 = \underbrace{\bar{n}^2}_{\text{terme constant}} + \underbrace{2 \bar{n} n}_{\text{terme linéaire en } n} + n^2 \quad (4 \quad 52)$$

Les termes constants ajoutent une phase globale sans importance et les termes linéaires un déphasage qui peut être éliminé en ajustant la différence d'énergie des états du condensat bimodal. Reste le terme non-linéaire identique, qui conduit donc à la création de chats similaires dans les deux cas.

Comment observer ces chats bosoniques?

Récapitulons les opérations conduisant (à $t = \pi/2$) à un chat d'un condensat bimodal à 2 composantes (on ajoute à la fin une impulsion $\pi/2$ qui transforme le chat de moment angulaire transversal en superposition d'états d'énergie):

$$\begin{aligned}
 a^{\dagger N} |0\rangle &= |S_z = N/2\rangle \xrightarrow{\text{pulse } \pi/2} |S_x = N/2\rangle = (a^\dagger + b^\dagger)^N |0\rangle \\
 &\xrightarrow{\text{collisions pendant } \pi/2} e^{i\pi/4} |S_x = N/2\rangle + e^{-i\pi/4} |S_x = -N/2\rangle \\
 &\xrightarrow{\text{pulse } \pi/2} e^{i\pi/4} |S_z = N/2\rangle + e^{-i\pi/4} |S_z = -N/2\rangle = (e^{i\pi/4} a^{\dagger N} + e^{-i\pi/4} b^{\dagger N}) |0\rangle \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

Noter l'analogie avec la génération d'états GHZ de N ions (l'interaction due aux collisions est alors remplacée par une porte réalisant sur les N ions l'opération d'intrication $\exp(i J_z^2/2)$ - voir cours 2005-2006). Ceci suggère de détecter le chat par **interférométrie à N particules**. On change de $\hbar \omega_0$ pendant un temps t la différence d'énergie entre les états (déphasage $= \omega_0 t$ par atome) et on applique à nouveau la même séquence d'opérations. On attend, par analogie avec les ions, l'état final:

$$|f\rangle = \cos(\pi N/2) e^{i\pi N/2} a^{\dagger N} |0\rangle + \sin(\pi N/2) e^{i\pi N/2} b^{\dagger N} |0\rangle \quad (4.53)$$

($\pi N/2 = 0$ si N pair, $\pi N/2 = \pi/2$ si N impair - voir *Exploring the quantum - Chapitre 8, p.511*). La probabilité de trouver tous les atomes dans un mode doit présenter des franges en $1/N$ lorsque la phase est balayée. La difficulté supplémentaire par rapport à l'expérience ionique est qu'il est moins aisé de connaître la parité du nombre d'atomes (la phase des franges en dépend).

Comment détecter (sur condensats ou ions) des chats à q composantes ($q > 2$)?

Conclusion de la quatrième leçon

La physique des condensats bi-modaux présente une grande analogie avec celle d'un ensemble de N spins en superposition symétrique d'états. Les états de Dicke et les états cohérents du moment angulaire global jouent un rôle important dans cette physique. La compression de spin et l'intrication des N bosons sont intimement reliées. Partant d'un état cohérent du condensat bimodal, les interactions font évoluer successivement le système vers un état comprimé, un état complètement déphasé et des états chats de Schrödinger transitoires à nombre variable de composantes, avant une refocalisation de l'état dans un état cohérent. L'observation de ces phénomènes, analogues à ceux que l'on peut observer en CQED ou en physique des ions piégés, sera difficile, car le système est très sensible à la décohérence. Les deux dernières leçons seront consacrées aux condensats piégés dans un réseau présentant un nombre de puits $N_w \gg 1$ (généralisation de la situation traitée jusqu'ici qui correspond à $N_w = 2$).

Références en complément des leçons 3 et 4

En plus des références données dans le texte, voir:

Sur l'effet Josephson dans les condensats:

L.P.Pitaevskii et S.Stringari, *Bose Einstein Condensation*, OUP, Oxford (2003).

Sur les états comprimés de N Bosons:

L.-M.Duan, J.I.Cirac et P.Zoller, Phys Rev A 65, 033619 (2002)

A.Micheli, D.Jaksch, J.I.Cirac et P.Zoller, Phys Rev A 67, 013607 (2003).

Sur les superpositions mésoscopiques, l'effondrement et la résurgence de phase:

J.I.Cirac, M.Lewenstein, K.Molmer et P.Zoller, Phys.Rev.A 57, 1208 (1998).

D.Gordon et C.M.Savage, Phys. Rev.A 59, 4623 (1999).

A.Montina et F.T.Arecchi Phys.Rev.A 66, 013605 (2002).

E.M.Wright, D.F.Walls et J.C.Garrison, Phys.Rev.Lett, 77, 2158 (1996).

A.Sinatra et Y.Castin, Eur.Phys.J.D. 4, 247 (1998).

D.A.Dalvit, J.Dziarmaga et W.Zurek, Phys Rev A 62, 013607 (2000)

Sur l'intrication dans les systèmes à deux modes (condensat ou optique):

A.Hines, R.H.McKenzie et G.J.Milburn, Phys Rev A 67, 013609 (2003).

C.C.Gerry, Phys.Rev.A 53, 4583 (1996).

Sur les interférences entre condensats:

J.Javanainen and S.M. Yoo, Phys.Rev.Lett, 76, 161 (1996).

Y.Castin et J.Dalibard, Phys.Rev.A. 55, 4330 (1997).

Z. Hadzibabic, S.Stock, B.Battelier, V.Bretin et J.Dalibard, P.R.L. 93, 180403 (2004).