

# 5.

4 Décembre 2006

## Condensat dans un réseau optique: de la simulation d'un solide à l'information quantique (I)

5A. Propriétés des condensats piégés dans un réseau  
optique

5B. Principe de la manipulation d'atomes dans un réseau  
optique

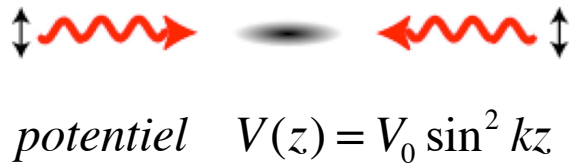
## 5A.

# Propriétés des condensats piégés dans un réseau optique avec atomes dans un seul état interne.

Etats de Bloch à une particule dans un réseau optique. Structure de bande. Première zone de Brillouin. Images du condensat après expansion et diffraction de Bragg. Visualisation de la première zone de Brillouin. Compétition entre effet tunnel entre puits et collisions dans chaque puits. Transition de Mott entre phase superfluide et phase isolante. Evolution de la visibilité des pics de diffraction de Bragg au passage de la transition de Mott. Effondrement et résurgence périodique de la phase d'un condensat porté soudainement dans la phase isolante.

# Réseaux de puits à une, deux ou trois dimensions formé par des ondes laser stationnaires

Chaîne à  
1D

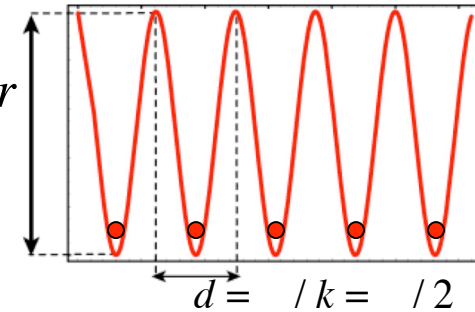


potentiel

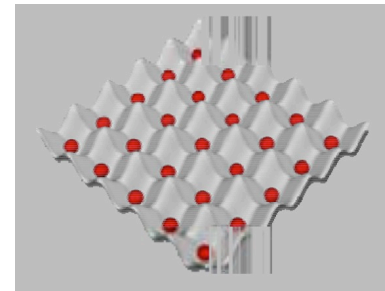
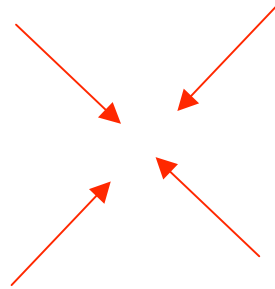
$$V(z) = V_0 \sin^2 kz$$

profondeur

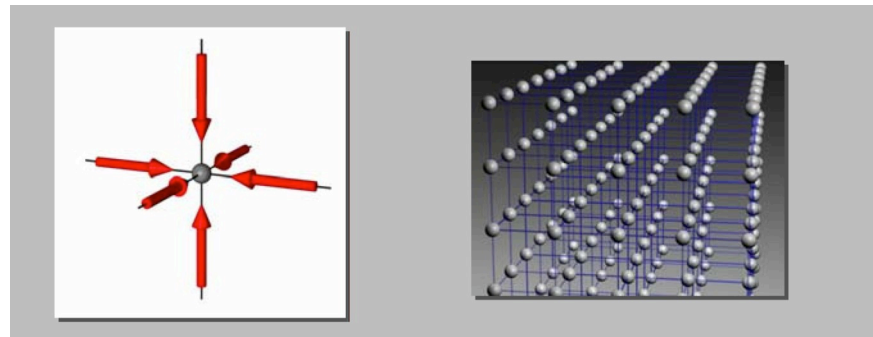
$V_0$



Réseau  
plan à  
2D



Cristal  
optique  
à 3D



Unité naturelle  
pour  $V_0$ : l'énergie  
de recul

$$E_r = \hbar^2 k^2 / 2M$$

# Le hamiltonien de Bose Hubbard (bosons dans le même état interne)

On généralise au cas de  $N_w$  puits le hamiltonien écrit dans les leçons précédentes pour 2 puits. On suppose que l'énergie de l'état fondamental dans chaque puits est  $E_0 = \hbar \omega_{oh}/2$ , indépendante du puits. On considère pour le moment tous les bosons dans le même état interne. Appelant  $a_i$  l'opérateur d'annihilation de bosons dans le puits  $i$ , on obtient le hamiltonien de la bande fondamentale:

$$H_{BH} = E_0 \sum_i a_i^\dagger a_i - \frac{\hbar J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger a_j + a_i a_j^\dagger) + \frac{\hbar g}{2} \sum_i a_i^\dagger a_i (a_i^\dagger a_i - 1) \quad (5.1)$$

Énergie cinétique (effet tunnel), la somme  $\langle i,j \rangle$  portant à 3D sur les 6 plus proches voisins de chaque site

Effet des interactions dans chaque puits

Le cas  $N_w=2$  nous donne l'intuition que l'effet tunnel tend à délocaliser les particules, alors que les interactions tendent à les geler dans chaque puits. Nous verrons que pour  $g/J=0$ , l'état fondamental est un état complètement délocalisé avec grandes fluctuations des populations des puits alors que pour  $g/J \gg 1$ , on a un état produit d'états de Fock où toutes les fluctuations sont gelées. Nous commençons par étudier en détail le cas limite  $g=0$ .

# Niveaux d'énergie dans un réseau périodique de puits en absence d'interaction

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où un condensat est piégé dans deux puits, conduisant à une compétition entre effet tunnel et interactions. Nous généralisons maintenant l'étude à un nombre  $N_w$  de puits formant un réseau périodique, en commençant par le cas  $1D$  (chaîne linéaire). En absence d'interaction, les atomes sautent d'un puits à l'autre par effet tunnel avec un taux  $J$ , d'où leur délocalisation dans des états stationnaires occupant spatialement l'ensemble du réseau. Pour  $N_w=2$ , il correspond aux états fondamentaux dans les 2 puits,  $\phi_0(z)$  et  $\phi_0(z+d)$ , les 2 fonctions propres:

$$\phi_{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi_0(z) \pm \phi_0(z+d) \right) \quad \text{d'énergies} \quad E_0 \pm \hbar J / 2 \quad (5 \quad 2)$$

Ce modèle à deux niveaux n'est valable que si on peut négliger le couplage vers les niveaux excités dans les puits, c-à-d tant qu'est satisfaite la condition:

$$\frac{J}{\hbar \omega} \ll 1 \quad (5 \quad 3)$$

En généralisant, nous montrons maintenant que les fonctions d'onde fondamentales de  $N_w$  puits  $\phi_0(z+jd)$  se combinent pour donner  $N_w$  états propres délocalisés, combinaisons linéaires des  $\phi_0(z+jd)$  avec des amplitudes complexes de module  $1/N_w$ , dont les phases sont des fonctions linéaires de  $j$ .

# Niveaux d'énergie dans un réseau périodique de puits en absence d'interactions (suite)

La structure périodique avec  $N_w \gg 1$  nous conduit à mettre les états stationnaires sous la forme (justifiée par le théorème de Bloch):

$$\psi_q(z) = \frac{1}{\sqrt{N_w}} \sum_{j=0, \pm 1, \pm 2, \dots} e^{ijqd/\hbar} \psi_0(z - jd) \quad (5 \quad 4)$$

Fonctions de Wannier

où  $q$  est une quasi-impulsion satisfaisant la condition cyclique (effets de bord négligeables pour  $N_w \gg 1$ ) :

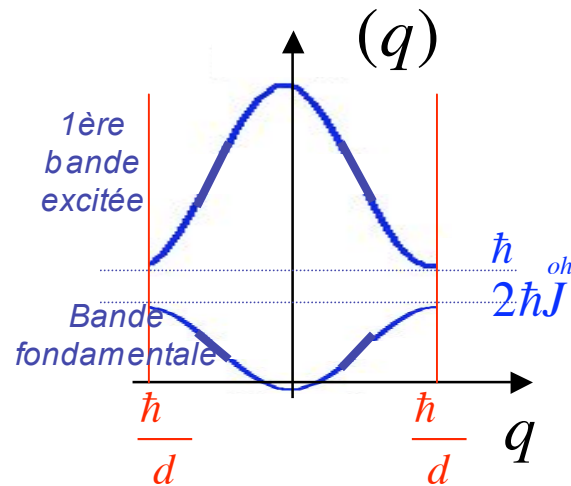
$$(N_w - 1)qd / \hbar = 2m\pi \quad q = m \frac{2\pi \hbar}{L} \quad \text{avec} \quad L = (N_w - 1)d \quad (\text{longueur de la chaîne}) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N_w - 1}{2})$$

*Les valeurs discrètes de  $q$  définissent le réseau réciproque* (5 \quad 5)

Reste à déterminer la relation de dispersion donnant l'énergie de l'état  $\psi_q$  en fonction de  $q$ . Le Hamiltonien  $H$  d'un atome dans le réseau a une expression simple dans la base des états localisés  $\psi_j$ . Ses éléments diagonaux sont tous égaux à l'énergie de l'état fondamental de chaque puits,  $E_0$ , et ses éléments non diagonaux (venant du terme d'énergie cinétique) ne connectent que les états associés à des puits voisins et sont égaux à  $\pm \hbar J/2$ . En projetant l'équation aux valeurs propres sur les états de la base localisée, on déduit alors de (5-4):

$$E(q) - E_0 = \hbar J \cos(qd / \hbar) \quad \text{soit} \quad E(q) - E(0) = 2\hbar J \sin^2 \frac{qd}{2\hbar} \quad (5 \quad 6)$$

# Niveaux d'énergie dans un réseau périodique de puits en absence d'interactions (suite)



L'état fondamental ( $q=0$ ) est la superposition symétrique des états fondamentaux associés à chaque puits. L'énergie des états  $q$  varie sinusoidalement avec  $q$ , sur une largeur de bande égale à  $2\hbar J$ , avec un départ parabolique qui permet de définir une masse effective  $M^*$  pour la propagation des atomes dans le réseau:

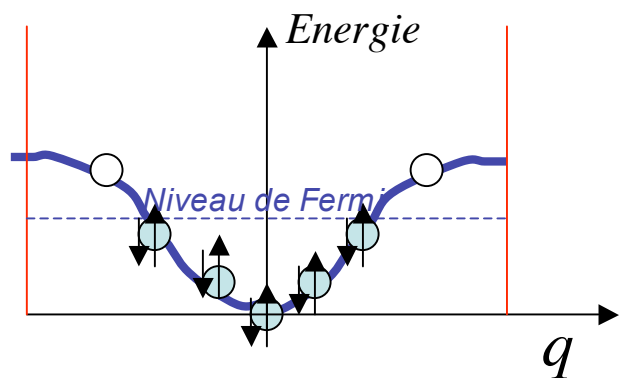
$$\lim_{q \rightarrow 0} E(q) = \frac{Jd^2 q^2}{2\hbar} = \frac{q^2}{2M^*} \quad M^* = \frac{\hbar}{Jd^2} \quad (5-7)$$

La périodicité spatiale fait que  $q$  varie entre les limites  $\pm \hbar/d$  (zone de Brillouin), une valeur de  $q$  à l'extérieur correspondant à la même solution qu'une valeur translatée d'un multiple de  $2 \hbar/d$  à l'intérieur de cette zone.

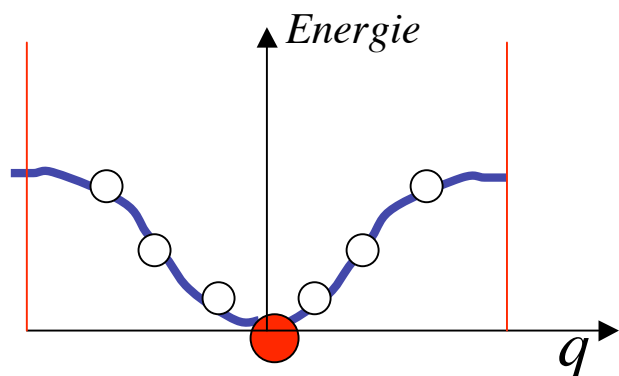
Le premier état excité des puits individuels produit une structure de bande analogue (avec signe de l'amplitude tunnel et de la masse effective inversé). Les bandes sont disjointes, avec un gap interdit, puisque la fréquence tunnel satisfait à la condition (5-3).

# Occupation des états: différence entre bosons et fermions

Des fermions dans un réseau obéissent au principe de Pauli. Dans le cas familier des électrons dans un solide, il y en a au maximum 2 (de spins opposés) par valeur de  $q$ . La bande est occupée par remplissage des états d'énergie croissante, jusqu'au niveau de Fermi. Si les sites mettent en commun chacun 2 électrons, les  $N_w$  états de  $q$  différents sont occupés et la bande fondamentale est pleine: le solide est isolant. S'il y a moins d'électrons, la bande n'est pas pleine et le solide est un métal.



Pour des bosons sans interaction dans un réseau, **toutes les particules** occupent dans l'état fondamental, l'état à une particule  $q = 0$ . La fonction d'onde macroscopique est la superposition symétrique des fonctions d'onde dans les puits. En appelant  $a_j$  l'opérateur d'annihilation dans le puits  $j$ , on a:



$$|N\rangle_{q=0} = \frac{1}{\sqrt{N_w^N (N!)}} \prod_j a_j^\dagger |0\rangle \quad (5 \quad 8)$$



# L'énergie de recul est l'unité d'énergie naturelle du problème

Il est commode d'exprimer le potentiel en unité de  $E_r$ . Il s'écrit (à 1D):

$$V = sE_r \sin^2 kz \quad (5 \quad 9)$$

où  $s$  est un paramètre sans dimension. Au voisinage du centre d'un puits, on peut l'approcher par un potentiel parabolique  $sE_r k^2 z^2$ , de fréquence d'oscillation donnée par:

$$sE_r k^2 z^2 = M \frac{\omega_{oh}^2 z^2}{2} \quad (5 \quad 10) \quad \text{d'où:} \quad \omega_{oh} = \frac{2E_r s^{1/2}}{\hbar} \quad (5 \quad 11)$$

Cette approximation implique qu'il y a plusieurs états liés dans le potentiel, ce qui suppose  $s > 4$ . L'extension de la fonction d'onde dans un puits est alors:

$$a_{oh} = \sqrt{\hbar / M \omega_{oh}} = \hbar s^{-1/4} / \sqrt{2ME_r} = s^{-1/4} / k = s^{-1/4} d \quad (5 \quad 12)$$

Le rapport  $E_r / \hbar \omega_{oh} = s^{-1/2} / 2$  n'est autre que le carré du paramètre de Lamb-Dicke introduit dans le cours 2005-2006 dans un autre contexte ( $s=1/4$ ). On ajuste  $\omega_{oh}$  et  $a_{oh}$  (qui varient comme  $s^{1/2}$  et  $s^{-1/4}$ ) en changeant l'intensité des lasers, donc  $s=V_0/E_r$ . La fréquence tunnel  $J$  augmente lorsque  $s$  diminue. Comme elle doit rester inférieure à  $\omega_{oh}$  qui est de l'ordre de  $E_r/\hbar$  pour  $s$  petit,  $J$  est bornée par une quantité de l'ordre de  $E_r/\hbar$ . **Pour un réseau optique d'atomes de Rubidium avec  $d= \lambda/2= 425 \text{ nm}$ , on a  $E_r/\hbar= 3.2 \times 10^4 \text{ kHz}$ .**

# Interférence entre les puits d'un réseau optique: diffraction de Bragg pour $g$ petit

Considérons un réseau optique  $1D$ , branché lentement sur un nuage condensé d'atomes. Le système évolue adiabatiquement vers l'état  $q=0$  de la bande fondamentale, correspondant à une répartition symétrique des atomes dans les  $N_w$  pièges:

$$\psi_0(z) = \sum_j \psi_0(z - jd) \quad (5 \quad 13)$$

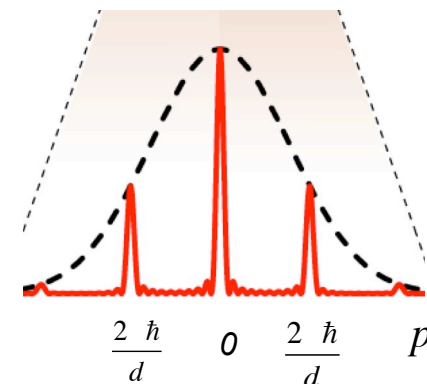
soit dans l'espace des impulsions:

$$\tilde{\psi}_0(p) = \sum_j \psi_0(z - jd) e^{ipz/\hbar} dz = \tilde{\psi}_0(p) \sum_j e^{ipjd/\hbar} \text{ avec } \tilde{\psi}_0(p) = \int \psi_0(z) e^{ipz/\hbar} dz \quad (5 \quad 14)$$

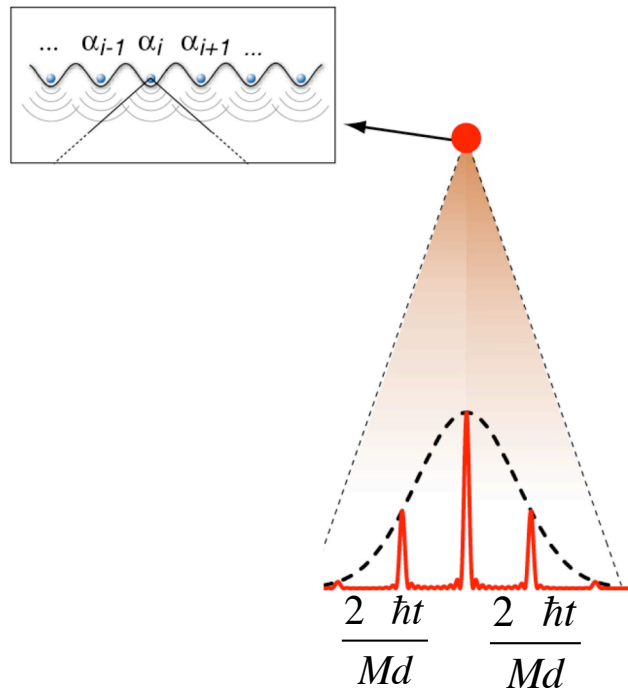
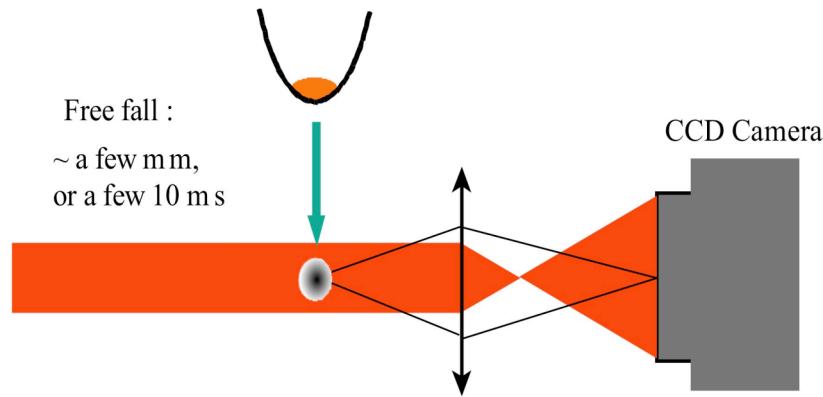
La somme sur  $j$  dans l'eqn.(5-14) n'est non-nulle que si  $pd/\hbar$  est un multiple de  $2\pi$  :

$$p = n \frac{2\pi\hbar}{d} = 2n\hbar k \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (5 \quad 15)$$

La distribution en impulsion de la fonction d'onde est donc un peigne de Dirac modulé par la transformée de Fourier de  $\psi_0(z)$  dont la largeur en  $p$  est  $\sim \hbar/a_{oh} \sim \text{quelques } \hbar/d$ .



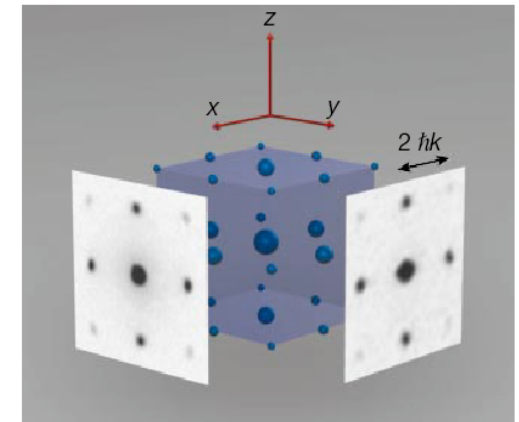
# Diffraction de Bragg pour $g$ petit (suite)



On libère les atomes brusquement en supprimant le réseau (et le piège magnétique). Les atomes s'éloignent les uns des autres (et tombent) avec une vitesse initiale dont la distribution correspond à celle de  $p$  dans le piège.

Cette distribution se reflète dans la distribution des positions à un instant  $t$  ultérieur, telle qu'elle est mesurée par absorption d'un faisceau laser.

Dans le cas d'un réseau à  $3D$ , on observe une figure de diffraction de Bragg, dont la taille croît linéairement avec le temps de chute.



*Images I. Bloch (Münich et Mayence)*

# Interférences d'un condensat libéré d'un réseau et cohérence entre sites ( $g$ petit)

L'image de diffraction est reproductible d'une réalisation à l'autre: la densité moyenne à 1 particule présente, dans le gaz après expansion, des interférences associées à des produits d'amplitudes venant de puits différents:

$$\langle n(\vec{r}) \rangle = \sum_{q=0} \langle N | \hat{n}(\vec{r}) | N \rangle_{q=0} = \sum_{i,j} \bar{v}_{j,i}^*(\vec{r}) \bar{v}_i(\vec{r}) \sum_{q=0} \langle N | a_j^\dagger a_i | N \rangle_{q=0} \quad (\bar{v}_i(\vec{r}) : \text{fonction du site } i)$$

Forme de la figure de diffraction
Visibilité
après expansion)

(5 16)

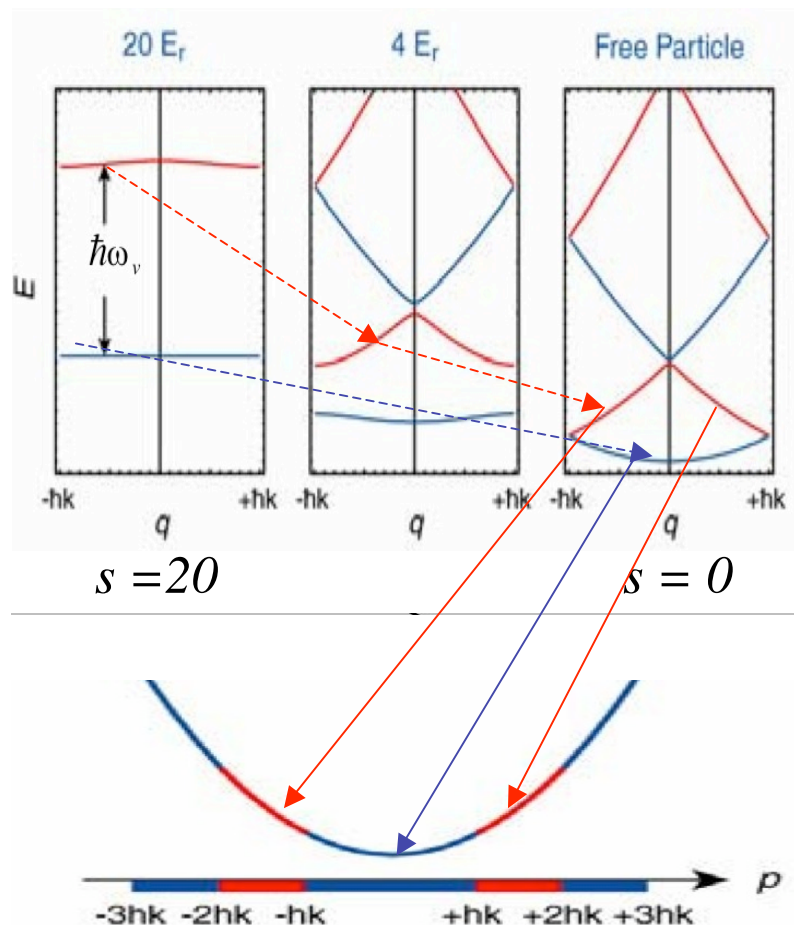
Dans l'état fondamental délocalisé, la cohérence entre sites est indépendante de la paire de sites et égale au nombre moyen d'atomes par sites:

$$\sum_{q=0} \langle N | a_j^\dagger a_i | N \rangle_{q=0} = \sum_{q=0} \langle N | a_i^\dagger a_i | N \rangle_{q=0} = \frac{N}{N_w} \quad (5 17)$$

L'interférence est liée à l'existence d'une fluctuation  $(N/N_w)^{1/2}$  dans le nombre de photons par site (voir cours 2002-2003). Lorsqu'on détecte un atome en  $r$ , il est impossible, même en principe, de déterminer de quel site il provient. Il y a ainsi un lien entre visibilité des interférences et fluctuations du nombre de particules entre les puits, ce que l'on peut voir encore comme une manifestation du principe de complémentarité.

# Débranchement adiabatique du réseau: observation directe de la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin

Considérons les deux cas limites  $s \gg 1$  (puits très profonds avec  $J=0$ ) et  $s=0$  (atomes libres). Les structures de bande correspondantes sont représentées sur les figures de gauche et de droite ci-dessous. Lorsqu'on débranche

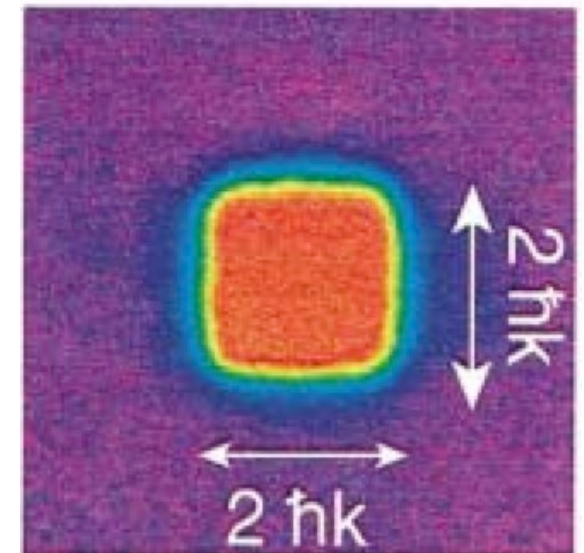


adiabatiquement le potentiel périodique, les bandes se déforment continûment et évoluent sans mélanger les états associés à des niveaux de vibration atomiques différents. La bande fondamentale se transforme en branche de parabole avec  $-\hbar/d < p < \hbar/d$ . La première bande excitée correspond aux deux arcs de parabole repliés (en rouge) et à des atomes libérés dont le module de l'impulsion est compris entre  $\hbar/d$  et  $2\hbar/d$ ....

# Observation directe de la 1<sup>ère</sup> zone de Brillouin

On interrompt quelques instants le piège magnétique qui suspend les atomes dans le champ de pesanteur. La perturbation chauffe le gaz et détruit les relations de phase entre les sites, ce qui revient à peupler quasi-uniformément tous les états  $q$  de la bande fondamentale. On constate ce brouillage par la disparition des pics de diffraction de Bragg.

Après cette phase de brouillage de phase, on débranche adiabatiquement le potentiel optique et on laisse tomber les atomes, avant d'en faire l'image par absorption laser. A une dimension, l'opération reviendrait à faire le «mapping» de la bande fondamentale, uniformément peuplée, sur la branche de parabole  $-\hbar^2/d^2 < p < \hbar^2/d^2$ . A deux dimensions, on obtient l'image d'un carré de côté proportionnel à  $2\hbar^2/d = 2\hbar k$ . On visualise ainsi directement la première zone de Brillouin! L'expérience montre que l'opération est bien adiabatique et ne peuple pas les états excités des puits de potentiel.



**(Greiner, Bloch, Mandel, Hänsch et Esslinger, PRL 87, 160405 (2001))**

# Effet des interactions: la transition de Mott

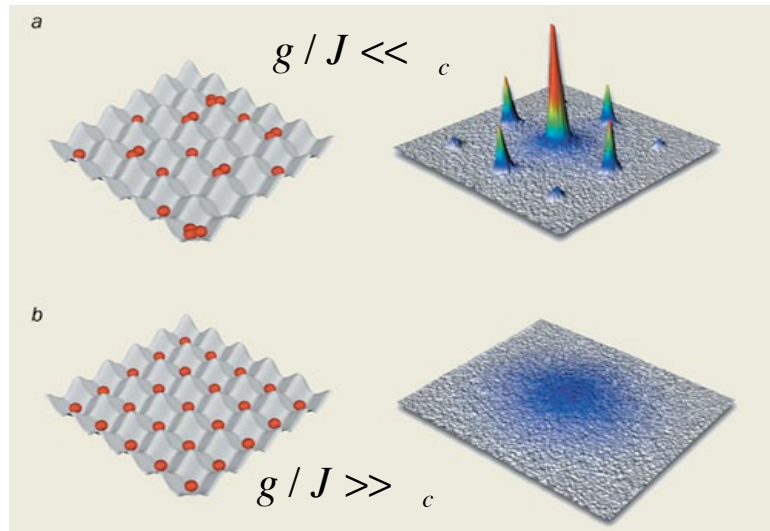
Partant d'un condensat dans lequel les bosons sont délocalisées entre les sites on augmente progressivement  $s$  (profondeur des puits) ce qui a pour effet d'augmenter le rapport  $g/J$ . L'effet des collisions, négligé jusqu'à présent, devient de plus en plus important. Comme dans le cas bimodal, il a pour effet de geler progressivement les fluctuations entre les puits, en favorisant énergétiquement (pour  $g > 0$ ) les états où le nombre de bosons est uniformément réparti et en rendant coûteux énergétiquement toute fluctuation du nombre de particules à partir de cet état d'énergie minimale.

On montre que l'ordre à grande distance de la fonction d'onde macroscopique dans un réseau à  $3D$  (qui se manifeste par l'existence d'une relation de phase entre sites éloignés) s'effondre brusquement pour une valeur critique  $g_c$  du rapport  $g/J$  égal à 35 pour  $N/N_w = 1$ . Il s'agit d'une transition de Mott entre un état dit superfluide pour  $g/J < g_c$  et un état dit isolant pour  $g/J > g_c$ .

La transition de Mott se manifeste sur les images du condensat après expansion par un effacement progressif, lorsque  $g/J$  traverse en croissant la valeur  $g_c$ , du contraste des pics de diffraction. Voir page suivante.

# Transition de Mott d'un condensat dans un réseau optique

M.Greiner, O.Mandel, T.Esslinger, T.Hänsch et I.Bloch, *Nature*, 415, 39 (2002)



## Les images dans les deux cas limite

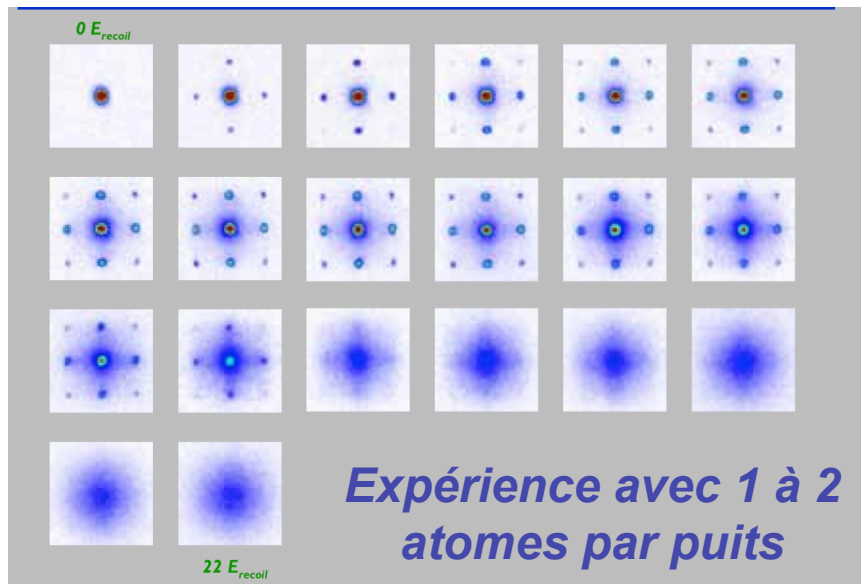
$$| \rangle_{sf} = |N\rangle_{q=0} \prod_i a_i^\dagger |0\rangle \quad \langle |a_i^\dagger a_j| \rangle_{sf} = N / N_w \quad 0$$

$$| \rangle_{is} = \prod_i (a_i^\dagger)^{n_0} |0\rangle \quad \langle |a_i^\dagger a_j| \rangle_{is} = n_0 \quad ij$$

(cas  $n_0 = N / N_w$  entier)

**Evolution des images du condensat pour des valeurs croissantes de  $s$ . La transition entre le régime superfluide (interférences visibles) et le régime isolant (image diffuse) est clairement observée**

Dans la phase isolante, chaque plan donne une image (speckle) de phase aléatoire d'une réalisation à l'autre. La visibilité des interférences dans l'image globale est nulle à cause du brouillage de phase entre plans, voir Z. Hadzibabic et al, *P.R.L.* 93, 180403 (2004).





# Décroissance de la visibilité des pics de diffraction au passage de la transition de Mott

Pour augmenter  $g/J$ , il suffit d'augmenter l'amplitude du potentiel sinusoïdal, mesurée par le paramètre  $s$ . La valeur de  $g$  peut être estimée de façon assez précise, en assimilant les fonctions localisées dans chaque puits à l'état fondamental d'un oscillateur harmonique. Compte tenu de (2-25) et (5-11), on a:

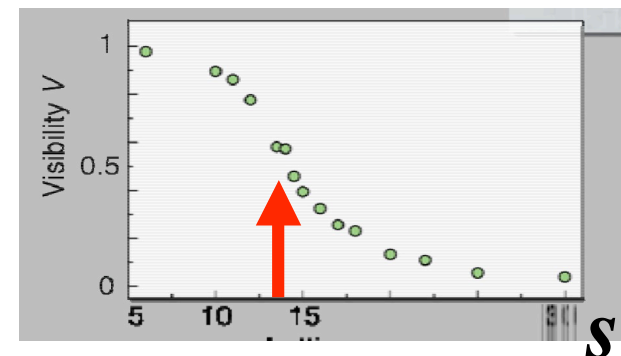
$$g = \sqrt{\frac{2}{a_{oh}}} \frac{a_s}{a_{oh}} = 2\sqrt{2} \frac{E_r}{\hbar} \frac{a_s}{d} s^{3/4} \quad (5 \quad 18)$$

soit avec les valeurs de  $a_s = 5 \text{ nm}$  et  $d = \lambda/2 = 425 \text{ nm}$ :

$$g / 2 = 0.059 s^{3/4} E_r / 2 \hbar = 0.19 s^{3/4} \text{ kHz} \quad (5 \quad 19)$$

La fréquence tunnel  $J$ , de l'ordre du kHz pour  $s$  de l'ordre de 1 décroît exponentiellement quand  $s$  augmente. Les quantités  $J$  (décroissante) et  $g/c$  (croissante) se croisent pour  $s = 13$ , qui correspond à la transition de Mott.

La visibilité de l'image de diffraction de Bragg diminue lorsque  $s$  augmente et passe par la valeur 0.5 pour la valeur de  $s$  correspondant à la transition de Mott. La variation de la visibilité est progressive.



# Effondrement et résurgence de la cohérence entre puits dans un réseau optique

La transition de Mott est observée en augmentant lentement  $s$  pour laisser l'état du système s'ajuster à la valeur instantanée du potentiel optique. On peut également partir d'un état de  $s$  petit (phase superfluide) et porter soudainement  $s$  à l'instant  $t=0$  à une valeur  $> s_c$ . On réalise ainsi une situation où un système dans lequel il y a initialement des cohérences de phase entre les puits est soumis à un pur hamiltonien de collision, avec un effet tunnel négligeable. La situation rappelle celle que nous avons étudiée dans la leçon 3 dans le cas de 2 puits: l'état initial peut être décomposé sur un produit d'états de Fock « isolants » qui sont les nouveaux états propres du système, chacun de ces états étant déphasé par l'effet des collisions. Comme dans le cas bimodal, on s'attend à un effondrement de la phase, suivi d'une résurgence, puis d'un nouvel effondrement etc...

Nous allons montrer que la période des résurgences est:

$$T_{revival} = \frac{2}{g} \quad (5 \quad 20)$$

alors qu'elle est deux fois plus petite ( $1/g$ ) dans le cas bimodal (voir leçon 4)

# Effondrement et résurgence de la cohérence entre puits dans un réseau optique (suite)

L'évolution de l'état initial sous l'effet des interactions s'écrit:

$$| (0) \rangle = c_{\{n_i\}} | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots \rangle \quad | (t) \rangle = c_{\{n_i\}} e^{i \frac{gt}{2} (n_i^2 - n_j^2)} | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots \rangle \quad (5 \quad 21)$$

d'où la valeur moyenne de la cohérence entre 2 sites  $i$  et  $j$ :

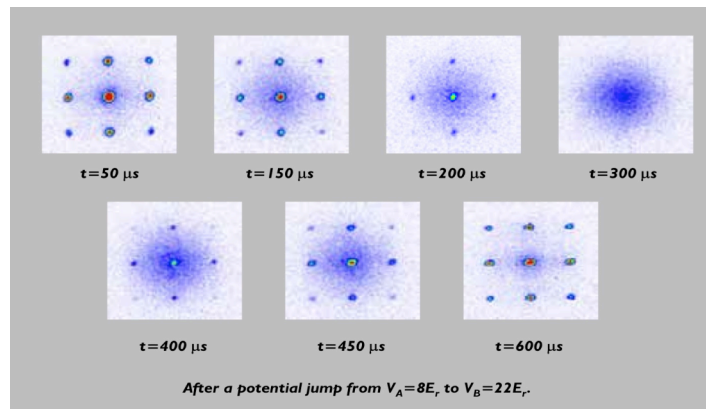
$$\langle (t) | a_i^\dagger a_j | (t) \rangle = \sqrt{n_j (n_i + 1)} c_{\{n_i, n_j\}}^* c_{\{n_i+1, n_j-1\}} e^{igt(n_i - n_j + 1)} \quad (5 \quad 22)$$

La somme porte sur toutes les partitions des atomes entre les sites. La quantité  $n_i - n_j + 1$  étant un entier, l'exponentielle dans (5-22) reprend sa valeur initiale pour  $gt=2m$  avec  $m$  entier. Pour  $gt=(2m+1)$ , les contributions des termes de la somme pour lesquels  $n_i - n_j$  est pair sont en opposition de phase avec celles pour lesquelles  $n_i - n_j$  est impair. La cohérence entre les puits (et la structure de Bragg qui lui est associée) revit ainsi pour les temps multiples de  $2/g$  (et non pour les multiples impairs de  $1/g$ ). Dans le cas de deux sites seulement,  $n_1 - n_2$  a une parité bien définie, celle du nombre total d'atomes  $N = n_1 + n_2$ . Cette contrainte correspond à une corrélation évidente des fluctuations entre les sites, qui n'existe pas entre sites quelconques pour  $N_w \gg 2$ . Ainsi pour  $N_w = 2$ , la somme (5-22) a une période  $1/g$  et non  $2/g$ .

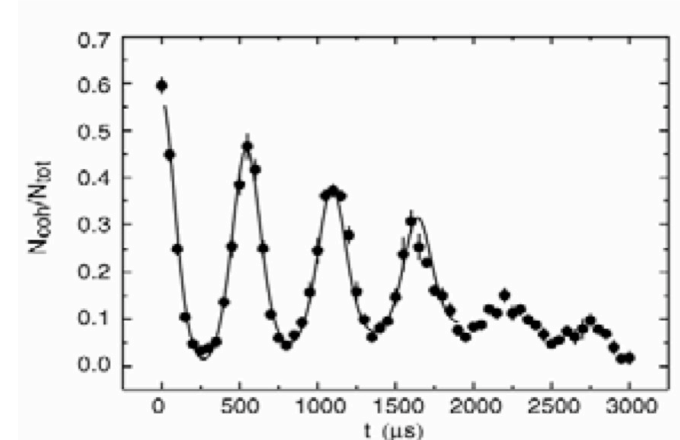
# Effondrement et résurgence de la cohérence entre puits dans un réseau optique: une oscillation qui permet de mesurer $g$

*M.Greiner, O.Mandel, T.Esslinger, T.Hänsch et I.Bloch, Nature 419, 51 (2002)*

Après l'augmentation soudaine de  $s$  jusqu'à  $s=22$ , on laisse les collisions agir pendant un temps  $t$ , puis on libère le condensat et on en fait l'image. En fonction de  $t$ , on observe une évolution périodique du contraste de la figure de diffraction. La période donne directement la fréquence  $g$ : manifestation d'un effet réversible d'oscillation lié aux collisions des atomes froids dans les puits.



Images du condensat après délais croissants



Visibilité de l'interférence en fonction du délai

On mesure  $g/2 \sim 1.8\text{kHz}$   
en accord avec (5-19)  
pour  $s=22$

Nature de l'intrication dans le système entre deux résurgences? Y-a-t-il des chats (ou des chatons de Schrödinger)?

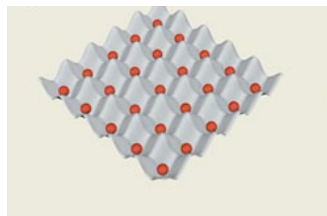
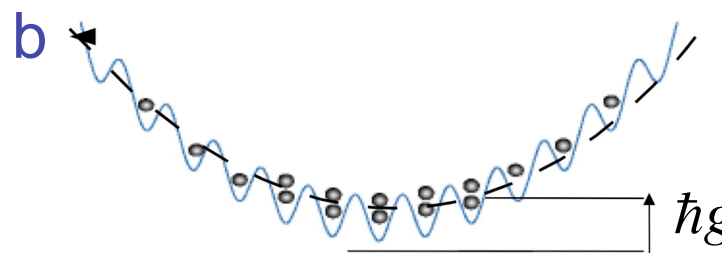
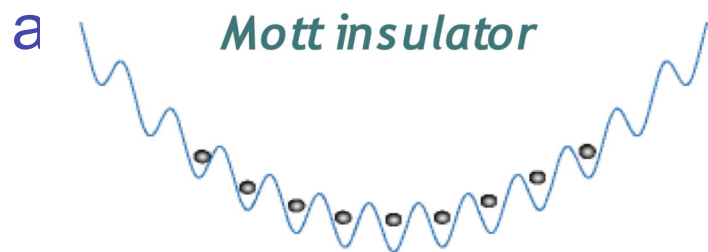
## 5B

# Manipulation d'un condensat d'atomes à deux états dans un réseau: préparation à l'information quantique

Comment utiliser la phase isolante de Mott pour réaliser un registre d'atomes froids. Déplacement indépendant de deux réseaux optiques piégeant deux états de spin différent des atomes. Utilisation de ce dispositif pour séparer et recombinaer les fonctions d'onde atomiques et réaliser «en parallèle» des expériences d'interférence à une particule.

# Utiliser la phase isolante de Mott pour réaliser un boulier quantique

Considérons un réseau optique superposé à un piège magnétique créant un potentiel parabolique. Si le nombre  $N$  d'atomes est très inférieur au nombre de sites, l'état fondamental correspond à un peuplement uniforme, avec exactement un atome par site, de la partie centrale du réseau (Fig a). Au delà d'un certain nombre d'atomes, il devient énergétiquement avantageux de mettre au centre, deux atomes par site: la distribution atomique s'organise en une zone centrale avec deux atomes par site, entourée d'une couche à un atome par puits (Fig b) (voir séminaire de F.Gerbier du 20 Novembre 2006).

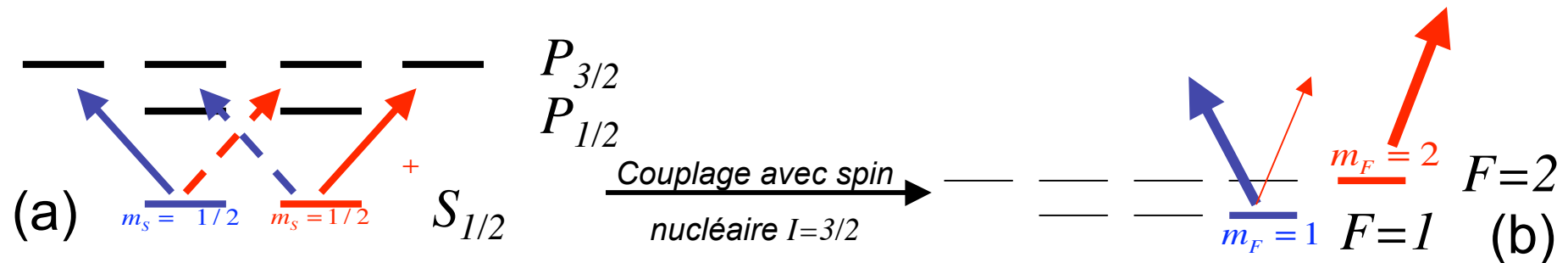


*Images Bloch et Gerbier.*

Dans la situation (a) à un atome par site au centre, on réalise un réseau régulier d'atomes. Si chacun peut être manipulé dans une superposition de 2 états internes, codant pour un qubit, on dispose d'un boulier quantique se prêtant à des expériences d'intrication massive.

# Réseaux indépendants pour 2 états internes

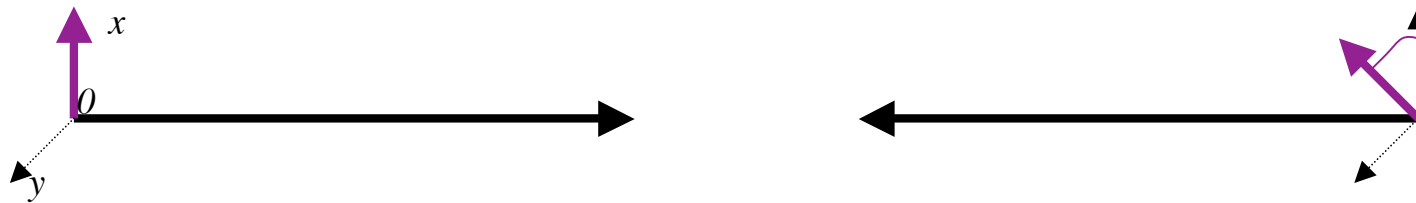
Un alcalin dans l'état fondamental  $S_{1/2}$  possède 2 états de spin électronique  $\pm 1/2$ . Le laser réalisant le potentiel optique exerce une force sur l'atome dépendant de sa polarisation, de ses désaccords de fréquence avec les transitions atomiques, et de l'état de spin. Il existe un désaccord (fréquence laser entre les raies de structure fine) pour lequel la polarisabilité de l'état  $-1/2$  s'annule en polarisation circulaire  $+$  et celle de l'état  $+1/2$  en polarisation  $-$ . Dans ces conditions, le laser en  $+$  exerce une force seulement sur un atome dans l'état  $+1/2$  et en polarisation  $-$  seulement dans l'état  $-1/2$  (voir Fig a).



Le couplage avec le spin nucléaire  $I$  ( $=3/2$  pour  $^{87}\text{Rb}$ ) induit la structure hyperfine (niveaux  $F=2$  et  $F=1$ , Fig b). L'état  $|F=2, m_F=2\rangle$  est  $m_s=1/2$  pur et n'est couplé qu'à  $+$ .  $|F=1, m_F=1\rangle$  est une superposition de  $|m_s=-1/2, m_I=3/2\rangle$  et  $|m_s=1/2, m_I=1/2\rangle$  avec des poids tels que le couplage avec  $-$  est 3 fois plus fort qu'avec  $+$ . Nous posons  $|0\rangle = |F=2, m_F=2\rangle$  et  $|1\rangle = |F=1, m_F=1\rangle$ . L'état  $|0\rangle$  ne se couple qu'à la polarisation  $+$  et l'état  $|1\rangle$ , de façon prépondérante, à la polarisation  $-$ . Nous négligeons dans la suite le couplage résiduel de  $|1\rangle$  à  $+$ .

# Réseaux optiques indépendants pour 2 états internes (suite)

Soit une onde stationnaire formée de deux ondes progressives de vecteurs d'onde opposés avec des polarisations linéaires faisant l'angle  $\theta$ .



Le champ électrique résultant est, en notation complexe ( $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ : vecteurs unitaires le long de  $Ox$  et  $Oy$ , l'onde stationnaire est alignée sur  $Oz$ ):

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x e^{ikz} + E_0 (\vec{u}_x \cos \theta + \vec{u}_y \sin \theta) e^{-ikz} =$$

$$E_0 e^{i\theta/2} (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) \cos(kz + \theta/2) + E_0 e^{-i\theta/2} (\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \cos(kz - \theta/2) \quad (5 \quad 23)$$

Somme de deux ondes stationnaires polarisées en  $+$  et  $-$ .

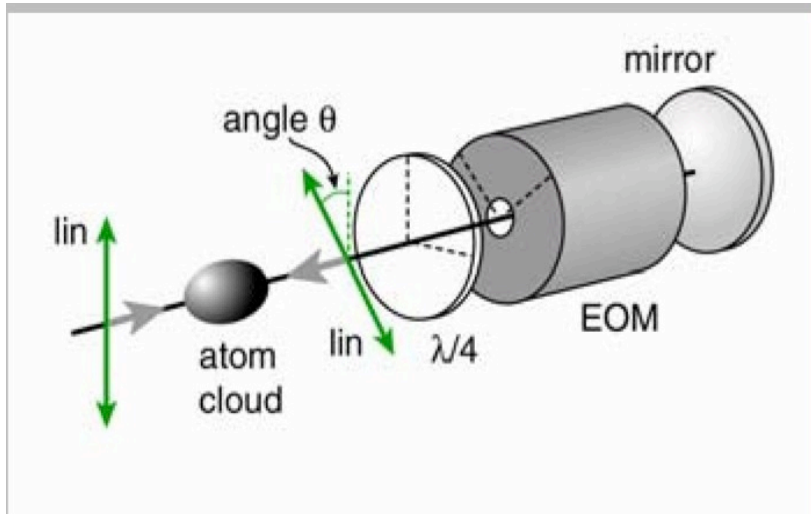
Le potentiel résultant forme deux réseaux optiques:

$$V_+(z) = E_0^2 \cos^2(kz + \theta/2) \text{ agissant (principalement) sur } |F = 2, m_F = 2\rangle = |0\rangle$$

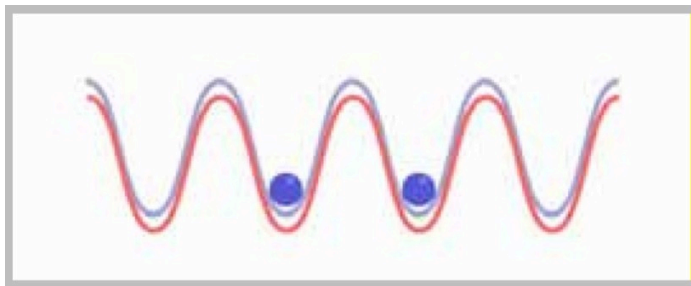
$$V_-(z) = E_0^2 \cos^2(kz - \theta/2) \text{ agissant (exclusivement) sur } |F = 1, m_F = 1\rangle = |1\rangle$$



# Réseaux de potentiel optique indépendants pour 2 états internes (suite)

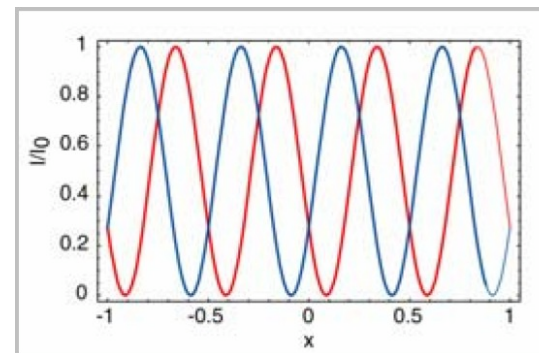


Réalisation expérimentale du faisceau réfléchi polarisé dans la direction  $\hat{u}_x$  à partir d'un faisceau incident polarisé verticalement ( $\hat{u}_z$ ). Le dispositif utilise un modulateur électro-optique (EOM) et une lame quart d'onde. L'angle  $\theta$  est varié en changeant la tension appliquée à l'EOM.



Les deux potentiels coïncident pour  $\theta = m\pi$  ( $m$  entier)

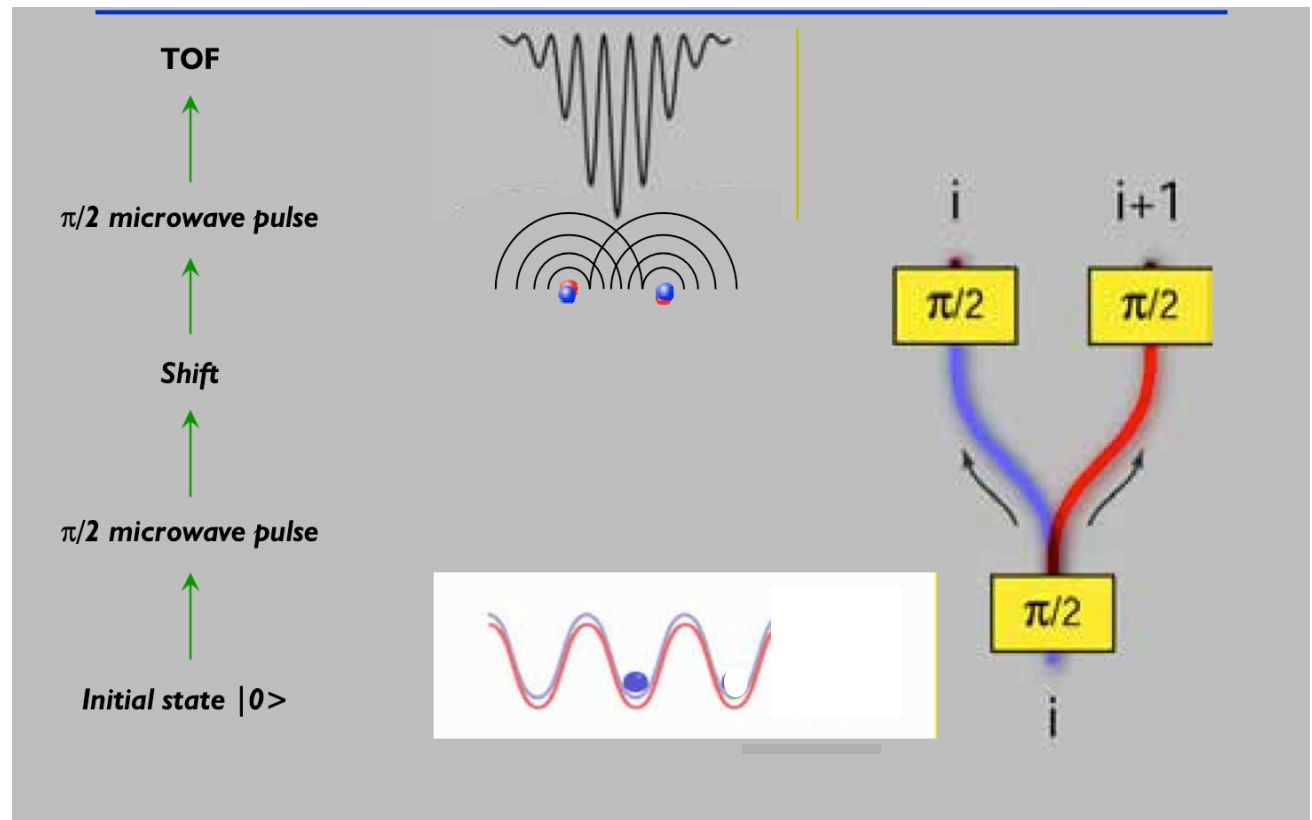
Images I. Bloch



Lorsque  $\theta$  varie entre  $0$  et  $\pi$ , les potentiels, initialement superposés, se translatent en directions opposées pour revenir coïncider lorsque deux puits voisins se rencontrent.

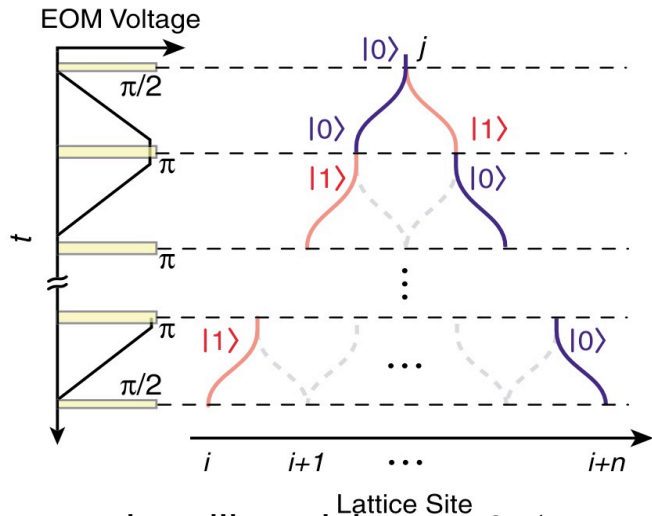
# Démonstration de l'opération du double réseau de puits: séparation d'une fonction d'onde en deux parties qui interfèrent

Une 1<sup>ère</sup> impulsion micro-onde  $\pi/2$  crée une superposition de  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Les deux parties de l'état se déplacent en direction opposées sous l'effet du potentiel optique  $+,-$ , jusqu'à une séparation  $\lambda/2$ . On relâche alors les atomes pour faire interférer les deux amplitudes. Les deux chemins sont associés à des états internes orthogonaux. Pour observer des interférences, il faut les rendre indiscernables en appliquant, avant de supprimer le piège, une 2<sup>de</sup> impulsion  $\pi/2$  couplant  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . C'est une expérience à une particule, réalisée en parallèle sur un grand nombre d'atomes (chaque atome interfère avec lui-même).

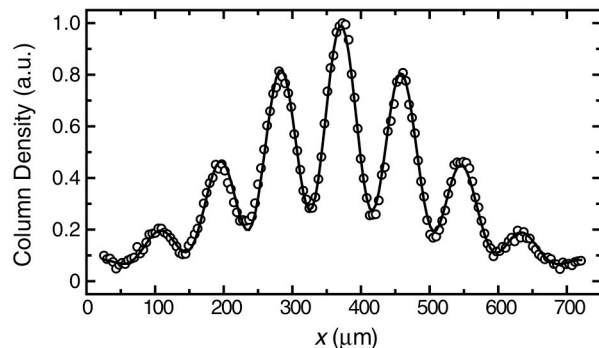


*Images I. Bloch*

# Séparation, transport cohérent et recombinaison de fonction d'onde atomique

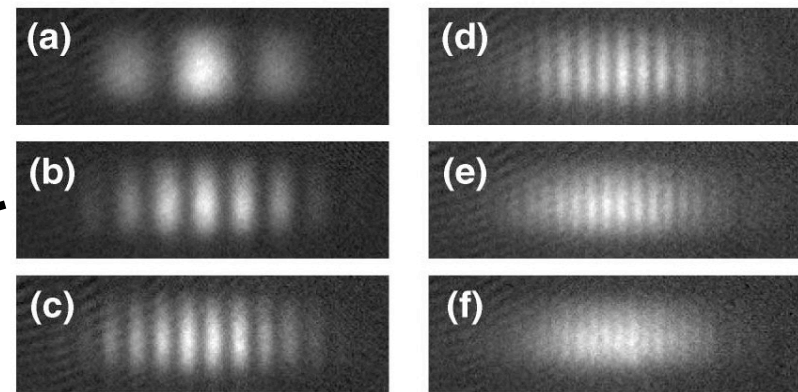


Succession d'impulsions  $\pi/2$  et  $\pi$  avec rampes de voltage intercalées sur l'EOM translatant les 2 réseaux de puits de  $\pm \pi/2$ : la fonction d'onde de chaque atome est délocalisée sur des sites séparés de  $m \lambda/2$  ( $m=1,2,3,4,5,6$ )



Profil des franges obtenu pour  $m=2$

Après délocalisation, une dernière impulsion  $\pi/2$  «efface» l'information sur le chemin codée dans l'état atomique. Le potentiel est supprimé et l'image d'interférence obtenue en mesurant, après expansion la densité des atomes dans le niveau  $|1\rangle$ . Les images (a) à (f) correspondent à une séparation  $m \lambda/2$  avec  $m$  variant de 1 à 6. C'est une expérience de type Young. Noter la décroissance en  $1/m$  de l'interfrange



*Mandel, Greiner, Widera, Rom, Hänsch et Bloch, Phys.Rev.Lett.,91, 010407 (2003)*

# Conclusion de la cinquième leçon

Des atomes bosoniques condensés placés dans un réseau de puits de potentiels optiques se comportent-, aux effets statistiques près- comme des électrons dans un cristal solide. Les états propres à une particule sont des états de Bloch dont les quasi-impulsions appartiennent à un réseau réciproque du réseau optique. Il correspond une bande d'états à chaque état lié dans les puits individuels. L'état fondamental de l'ensemble des  $N$  bosons est celui où tous les atomes sont condensés dans l'état de quasi-impulsion nulle (une situation très différente du cas des électrons qui occupent tous les états excités de la bande jusqu'au niveau de Fermi). Les images du condensat après suppression du piège et expansion présentent des pics de diffraction typiques des interférences des ondes de matière partielles associées à chaque puits. Ces interférences disparaissent progressivement lorsqu'on augmente adiabatiquement la profondeur des puits au delà d'une valeur du rapport  $g/J$  correspondant à la transition de Mott entre le régime superfluide et le régime isolant. En passant soudainement de la phase superfluide à la phase isolante, on excite des oscillations périodiques de la phase du condensat, entraînant une variation périodique de la visibilité des pics de diffraction de Bragg.

En manipulant simultanément les degrés de liberté externe des atomes et un état de spin interne, on peut réaliser un «bouliver quantique» qui se prête à des expériences d'intrication massive entre les atomes (voir leçon 6).