

6.

11 Décembre 2006

Condensat dans un réseau optique: de la simulation d'un solide à l'information quantique (II)

**6A. Porte de phase et intrication collective d'atomes
dans un réseau optique.**

**6B. Simulation quantique de spins sur réseaux et
principe de l'ordinateur quantique à états cluster.**

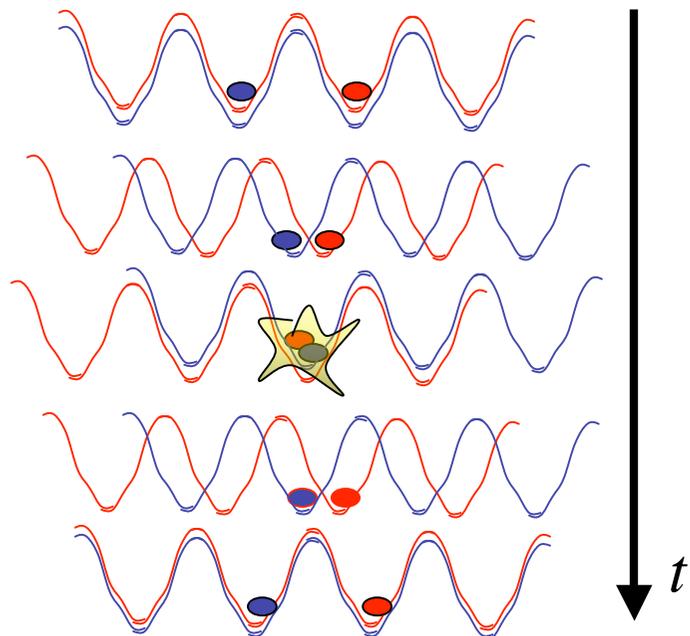
6A.

Porte de phase et intrication collective d'atomes dans un réseau optique.

Principe d'une porte de phase basée sur la mise en contact d'atomes venant de sites voisins, conditionnée à leur état interne. Comment séparer et recombinaison les fonctions d'onde atomiques. Comment contrôler le déphasage conditionnel induit par la porte. Génération d'intrication entre deux ou trois atomes. Etats de Bell et états *GHZ*. Oscillation de l'intrication. Généralisation à N atomes à $1D$, $2D$ et $3D$: les états «cluster». Propriétés de connectivité de ces états.

Principe de la porte conditionnelle

Nous avons vu (leçon 5) qu'on peut translater dans des directions opposées 2 réseaux optiques de même période et profondeur, agissant sélectivement sur 2 états atomiques notés $|0\rangle$ et $|1\rangle$ (2 sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental). Supposons qu'à $t=0$ les deux réseaux coïncident et piègent 2 atomes dans des puits voisins. Celui de gauche est dans $|1\rangle$ et celui de droite dans $|0\rangle$. Le réseau piégeant $|1\rangle$ est translaté vers la droite et celui piégeant $|0\rangle$ vers la gauche, jusqu'à amener les atomes dans le même puits (translation relative de $\lambda/2$). On laisse ensuite les atomes interagir dans ce puits pendant un temps t . Leur fonction d'onde globale accumule un déphasage $\phi = g_{01} t$ ($g_{01}/2 \sim 2 \text{ kHz}$ pour $V_0 \sim 20E_r$ avec $g_{01} \sim 0.06s^{3/4}E_r / \hbar$, voir eqn.(5-19)). La phase ϕ est

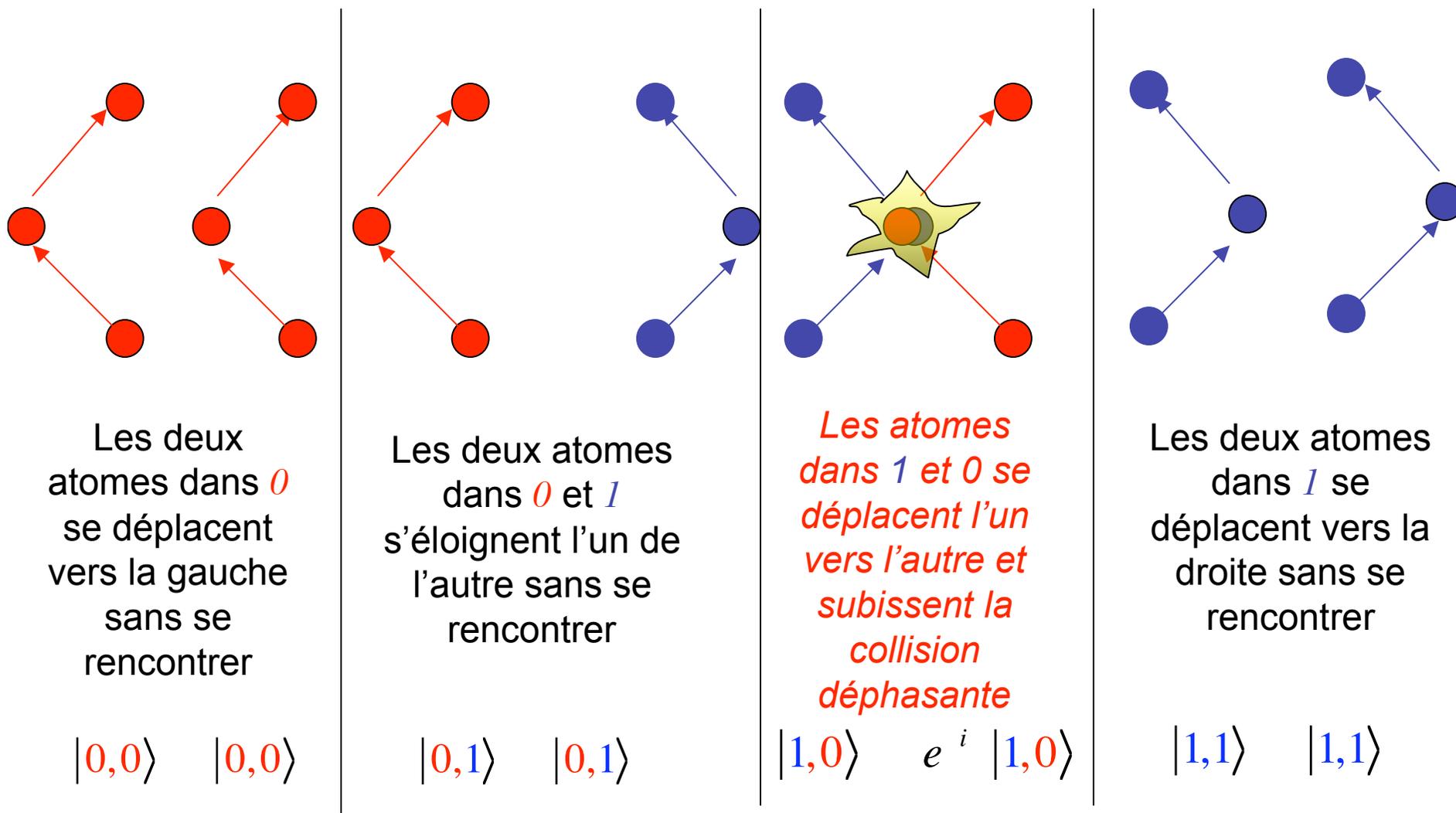


~ 2 pour $t = 1 \text{ ms}$. On ramène enfin les atomes à leur position initiale, réalisant l'opération:

$$|1,0\rangle \rightarrow e^{i\phi} |1,0\rangle \quad (6 \quad 1)$$

La translation est adiabatique et laisse les atomes dans l'état fondamental des puits, si elle prend un temps $t_{trans} \gg 1/\omega_{oh} = \hbar/E_r s^{1/2}$. Il faut aussi $t_{trans} \ll 1/g_{01}$. Ces conditions sont compatibles car $\omega_{oh}/g_{01} = 30s^{-1/4}$ est > 10 jusqu'à $s = 80$.

Principe de la porte conditionnelle (suite)

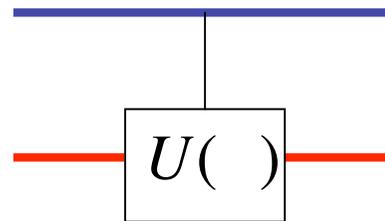


Seule la configuration $|1,0\rangle$ subit un déphasage

(A la phase conditionnelle s'ajoute une phase cinématique compensable par des opérations à un bit et qui ne joue pas de rôle dans l'intrication du système).

Représentation de la porte conditionnelle:

$ 0,0\rangle$	$ 0,0\rangle$
$ 0,1\rangle$	$ 0,1\rangle$
$ 1,0\rangle$	$e^i 1,0\rangle$
$ 1,1\rangle$	$ 1,1\rangle$



Une porte de phase à deux qubits

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\theta} + 1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{i\theta} - 1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\theta} + 1}{2} I + \frac{e^{i\theta} - 1}{2} \sigma_z \quad (6.2)$$

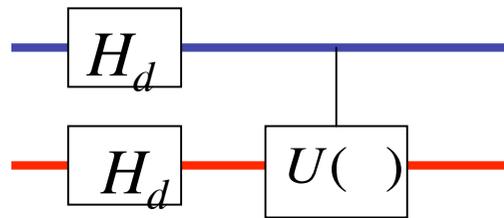
Cas particuliers:

$$\theta = 2m\pi \quad U(\theta) = I \quad ; \quad \theta = (2m+1)\pi \quad U(\theta) = -I \quad (6.3)$$

La porte ne produit aucune intrication pour $\theta = 2m\pi$ et peut intriquer les deux atomes de façon maximale pour $\theta = 2(m+1)\pi$

Porte contrôle-U(θ)

Porte collisionnelle combinée à deux transformations de Hadamard



$$|0,0\rangle \xrightarrow{\text{Hadamards}} \frac{1}{2}(|0\rangle+|1\rangle)(|0\rangle+|1\rangle) = \frac{1}{2}(|0,0\rangle+|0,1\rangle+|1,0\rangle+|1,1\rangle) \quad (6.4)$$

$$\text{porte controle } U(\cdot) \quad |^{2\text{bits}}\rangle = \frac{1}{2}(|0,0\rangle+|0,1\rangle+e^{i\theta}|1,0\rangle+|1,1\rangle)$$

Le degré d'intrication dépendant de θ . On peut exprimer l'état final comme une superposition d'un état séparable et d'un état maximalelement intriqué de deux particules (état de Bell). Introduisons les 2 états $|s_1\rangle$ et $|s_2\rangle$ de somme séparable et différence maximalelement intriquée:

$$|s_1\rangle = |0,0\rangle + |0,1\rangle + |1,1\rangle \quad ; \quad |s_2\rangle = |1,0\rangle$$

$$\text{avec } |s_1\rangle + |s_2\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) = 2|s\rangle \quad (\text{séparable}) \quad (6.5)$$

$$|s_1\rangle - |s_2\rangle = |0,0\rangle + |0,1\rangle + |1,1\rangle - |1,0\rangle = |0\rangle(|0\rangle + |1\rangle) - |1\rangle(|0\rangle + |1\rangle) = 2|Bell\rangle \quad (\text{max. intriqué})$$

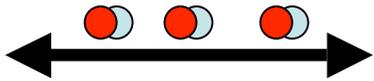
on en déduit:

$$|s_1\rangle = |s\rangle + |Bell\rangle \quad ; \quad |s_2\rangle = |s\rangle - |Bell\rangle \quad (6.6)$$

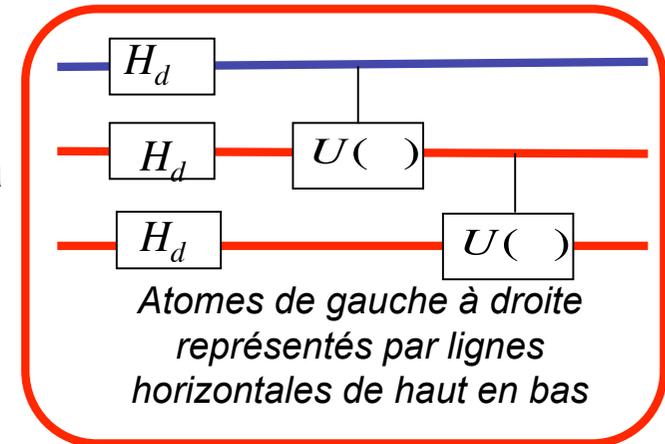
et:

$$|^{2\text{bits}}\rangle = \frac{1}{2}(|s\rangle + |Bell\rangle) + e^{i\theta}(|s\rangle - |Bell\rangle) = \frac{1+e^{i\theta}}{2}|s\rangle + \frac{1-e^{i\theta}}{2}|Bell\rangle \quad (6.7)$$

Intrication collisionnelle de trois atomes et génération d'état GHZ



3 atomes en superposition de $|0\rangle$ et $|1\rangle$ subissent un déplacement sélectif (état $|0\rangle$ vers la gauche, $|1\rangle$ vers la droite). On réalise ainsi un circuit quantique en cascade où chaque atome contrôle celui situé à sa droite:



$$|0,0,0\rangle \xrightarrow{\text{Hadamards}} \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|0,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + |0,1,0\rangle + |0,1,1\rangle + |1,0,0\rangle + |1,0,1\rangle + |1,1,0\rangle + |1,1,1\rangle) \quad (6 \quad 8)$$

$$\text{portes controle } U(\) \text{ en cascade} \quad | \text{ 3bits} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + e^i |0,1,0\rangle + |0,1,1\rangle + e^i |1,0,0\rangle + e^i |1,0,1\rangle + e^i |1,1,0\rangle + |1,1,1\rangle)$$

Introduisons les deux états dont la somme est séparable et la différence un état GHZ maximalement intriqué à 3 particules:

$$| \text{ 1} \rangle = |0,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + |0,1,1\rangle + |1,1,1\rangle \quad ; \quad | \text{ 2} \rangle = |0,1,0\rangle + |1,0,0\rangle + |1,0,1\rangle + |1,1,0\rangle \quad (6 \quad 9)$$

d'où:

$$| \text{ 1} \rangle + | \text{ 2} \rangle = (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) = 2\sqrt{2} | \text{ s} \rangle$$

$$| \text{ 1} \rangle - | \text{ 2} \rangle = (|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle(|0\rangle + |1\rangle) - (|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = 2\sqrt{2} | \text{ GHZ} \rangle \quad (6 \quad 10)$$

et:

$$| \text{ 3bits} \rangle = \frac{1+e^i}{2} | \text{ s} \rangle + \frac{1-e^i}{2} | \text{ GHZ} \rangle \quad (6 \quad 11)$$

Oscillation de l'intrication en fonction de pour $N = 2$ et 3

Pour $N = 2m$, les collisions n'ont pas d'effet: les atomes, portés séparément dans un état superposition par les portes de Hadamard restent non intriqués:

$$| \begin{smallmatrix} 2bits \\ =2m \end{smallmatrix} \rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) \quad ; \quad | \begin{smallmatrix} 3bits \\ =2m \end{smallmatrix} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) \quad (6 \quad 12)$$

Pour $N = (2m+1)$, les collisions réalisent des portes contrôle σ_z (au signe près). Dans le cas de deux atomes, on obtient un état de Bell et dans le cas de trois atomes, un état GHZ:

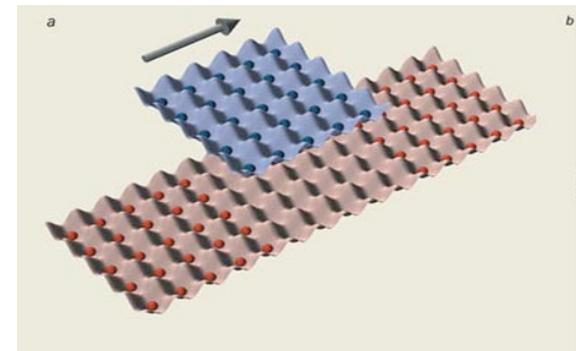
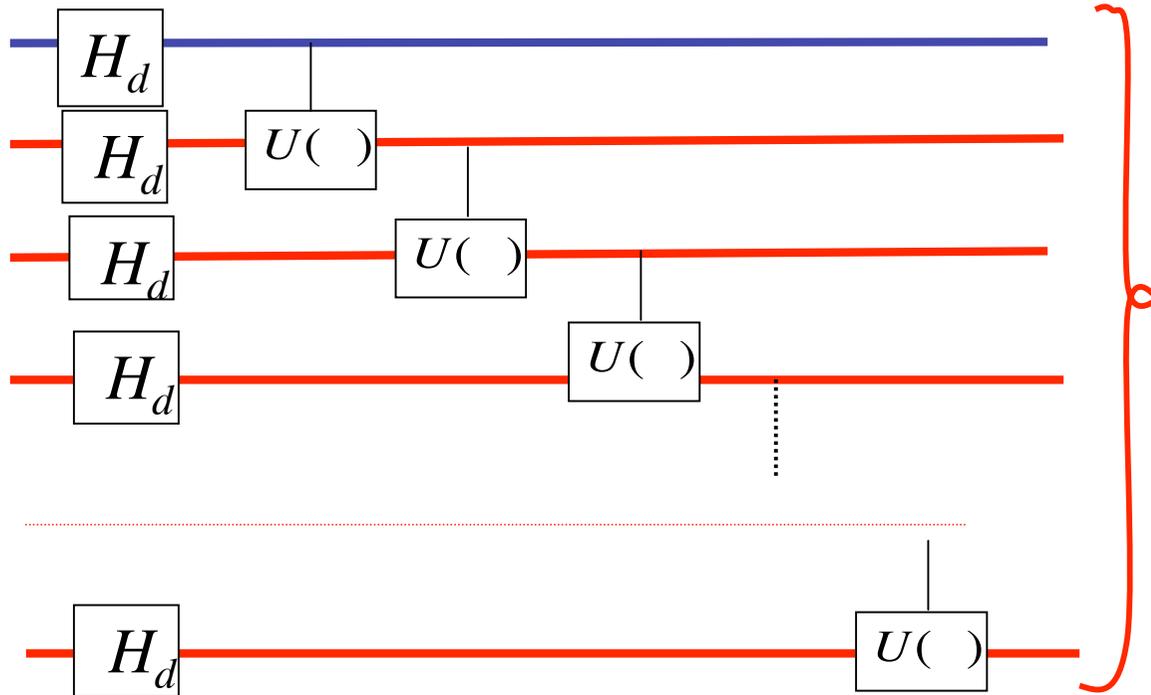
$$| \begin{smallmatrix} 2bits \\ =(2m+1) \end{smallmatrix} \rangle = \frac{|0\rangle(|0\rangle + |1\rangle) \quad |1\rangle(|0\rangle \quad |1\rangle)}{2} \quad ; \quad | \begin{smallmatrix} 3bits \\ =(2m+1) \end{smallmatrix} \rangle = \frac{(|0\rangle \quad |1\rangle)|0\rangle(|0\rangle + |1\rangle) \quad (|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle(|0\rangle \quad |1\rangle)}{2\sqrt{2}} \quad (6 \quad 13)$$

Ces états peuvent être transformés par opérations locales en état de Bell et *GHZ* «standard»:

$$| \begin{smallmatrix} (2bits) \\ =(2m+1) \end{smallmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad ; \quad | \begin{smallmatrix} (3bits) \\ =(2m+1) \end{smallmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle) \quad (6 \quad 14)$$

Le degré d'intrication entre un des atomes et le reste du système oscille entre 0 et 1 lorsque N varie entre 0 et ∞ . Ce résultat se généralise (voir plus loin) à $N > 3$.

Généralisation à N atomes: états cluster



$$| \begin{matrix} N \\ c \end{matrix} () \rangle$$

Translation aller-retour d'un réseau par rapport à l'autre avec N atomes

Pour $N > 3$, il n'y a pas de forme explicite simple de l'état final, mais on peut le calculer par récurrence (pages suivantes). Pour $= 2m$, le circuit en cascade, équivalent au produit des Hadamard, conduit à un état final séparable:

$$|0,0,0\dots 0\rangle \quad | \begin{matrix} N \\ c \end{matrix} (= 2m) \rangle = \frac{1}{2^{N/2}} (|0\rangle + |1\rangle)^N \quad (6 \quad 15)$$

Pour $= (2m+1)$, on obtient un état cluster où chaque atome est maximalelement intriqué à tous les autres (pages suivantes). Ici encore, il y a oscillation de l'intrication en fonction de .

Intrication des états cluster (cas 1D)

Montrons que dans un état cluster à N atomes à 1D avec $N = (2m+1)$, chaque atome est maximalelement intriqué à tous les autres. La propriété est vraie pour $N=3$. Nous l'admettons jusqu'à $N-1$ et montrons qu'elle est vérifiée pour N . De façon plus précise, admettons que l'état cluster à $N-1$ atomes se met sous la forme (établie pour $N-1=3$):

$$| \binom{N-1}{c} \rangle = | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} (|0\rangle - |1\rangle)_{N-1} ; \left(\langle \binom{N-3}{+} | \binom{N-3}{-} \rangle = 0 \right) \quad (6-16)$$

On ajoute le $N^{\text{ème}}$ atome. Juste avant l'opération de la porte agissant sur les atomes $N-1$ et N , l'état des N atomes est:

$$| \binom{N-1}{c} \rangle (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} / \sqrt{2} = | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} (|0\rangle - |1\rangle)_{N-1} (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} / \sqrt{2} \quad (6-17)$$

$$= | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} |0\rangle_{N-1} (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} / \sqrt{2} + | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} |1\rangle_{N-1} (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} / \sqrt{2}$$

et après l'opération de la dernière porte cet état devient:

$$| \binom{N}{c} \rangle = | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} |0\rangle_{N-1} (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} / \sqrt{2} + | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} |1\rangle_{N-1} (|1\rangle - |0\rangle)_{N-1} / \sqrt{2}$$

$$= | \binom{N-2}{+} \rangle |0\rangle_{N-1} (|0\rangle + |1\rangle)_{N-1} + | \binom{N-2}{-} \rangle |1\rangle_{N-1} (|0\rangle - |1\rangle)_{N-1} \quad (6-18)$$

en posant:

$$| \binom{N-2}{+} \rangle = | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} / \sqrt{2} ; | \binom{N-2}{-} \rangle = | \binom{N-3}{+} \rangle |0\rangle_{N-2} + | \binom{N-3}{-} \rangle |1\rangle_{N-2} / \sqrt{2} \quad (\langle \binom{N-2}{+} | \binom{N-2}{-} \rangle = 0) \quad (6-19)$$

En comparant (6-16) et (6-18), on justifie par récurrence la forme (6-16). Les eqns (6-19) permettent de calculer de proche en proche tous les états cluster.

Oscillation de l'intrication pour $N > 3$

L'équation (6-18) montre que chacun des 2 derniers atomes de l'état cluster à N atomes est maximalelement intriqué aux autres. Cette équation apparaît comme une forme de Schmidt pour un système bipartite constitué de l'atome $N-1$ et de tous les autres (ou de l'atome N et de tous les autres) avec des poids égaux. Ceci correspond à la définition de l'intrication maximale pour un système bipartite. Reste à montrer que c'est aussi vrai pour les $N-2$ premiers atomes. Raisonnons encore par récurrence. Admettons que chacun des $N-2$ premiers atomes est maximalelement intriqué avec tous les autres dans l'état cluster à $N-1$ atomes (c'est vrai pour $N-1=3$). Lorsqu'on ajoute le $N^{\text{ème}}$ atome, juste avant l'opération de la $N^{\text{ème}}$ porte, la propriété reste vraie: chacun des $N-2$ premiers atomes est toujours maximalelement intriqué avec l'ensemble des $N-1$ autres, incluant le dernier atome. L'opération unitaire de la porte, qui affecte seulement les deux derniers atomes, ne peut changer le degré d'intrication avec un atome ne subissant pas cette interaction. Chacun des $N-2$ premiers atomes reste donc maximalelement intriqué avec l'ensemble de tous les autres atomes dans l'état cluster à N atomes.

Dans un état cluster $|\psi_c^N(\alpha)\rangle$, chaque atome est maximalelement intriqué avec tous les autres. Un état $|\psi_c^N(\alpha=0)\rangle$ est un état produit des N atomes. Le degré d'intrication oscille donc avec α .

Persistance de l'intrication des états cluster

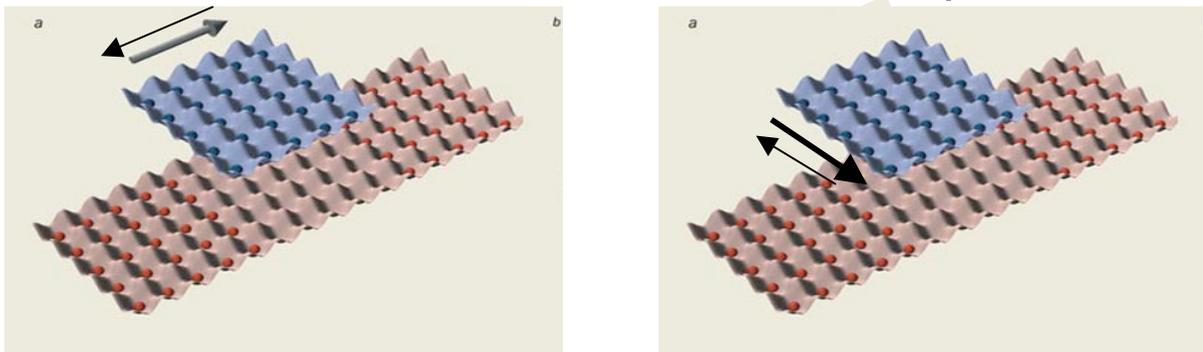
La propriété d'intrication maximale que nous venons de définir est commune aux états cluster et aux états GHZ à N particules. L'état:

$$| \ ^N_{GHZ} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0,0,\dots,0\rangle + |1,1,1,\dots,1\rangle) \quad (6 \quad 20)$$

est un état où, comme dans $| \ ^N_c \rangle$, chaque qubit est maximalelement intriqué à l'ensemble de tous les autres. Les états cluster ont cependant une propriété importante qui les différencie des états GHZ . Alors que ces derniers peuvent être complètement séparés par une seule mesure réalisée sur l'un quelconque des qubits, les états cluster ont une intrication beaucoup plus robuste. Une mesure sur l'un des qubits coupe la chaîne en deux morceaux qui restent chacun maximalelement intriqué au sens défini plus haut. On dit que leur intrication est *persistante*. On mesure le *degré de persistance* par le *nombre minimum de mesures locales conduisant à une désintrication totale du système*. Alors que ce degré est de 1 pour les états GHZ , il est égal à $N/2$ pour un état cluster. Pour une démonstration détaillée de ce résultat, voir Briegel et Raussendorf, PRL, 86, 910 (2001) (nous discutons ici le cas $1D$, voir généralisation à 2 et $3D$ plus loin). L'intrication des états cluster est donc beaucoup plus «résistante» que celle des états GHZ . En assimilant la mesure sur un qubit à un processus de couplage à l'environnement, on peut dire que les états cluster sont moins sensibles que les états GHZ à la décohérence.

Généralisation: états cluster à 2 et 3 D

La procédure d'intrication se généralise à des réseaux à 2 ou 3D occupés chacun par un atome à deux états. Après avoir réalisé la transformation de Hadamard sur tous les atomes initialisés dans l'état $|0\rangle$, on translate de $\lambda/2$ dans la direction O_x le réseau $_+$ (agissant sur les atomes dans l'état $|0\rangle$) par rapport au réseau $_-$ (agissant sur les atomes dans l'état $|1\rangle$), on laisse les atomes interagir pendant un temps correspondant à un déphasage conditionnel de π , puis on ramène les deux réseaux dans leur position de départ. On intrique ainsi maximalelement (pour $\lambda = \pi$) les atomes suivant des chaînes le long de O_x . On recommence ensuite la même opération en effectuant la translation dépendant de l'état interne le long de O_y . On obtient ainsi pour $\lambda = \pi$ un état cluster à 2D. En ajoutant une troisième translation le long de O_z , on prépare de même un état cluster à 3D. Ces états fortement intriqués partagent avec les états cluster à 1D les propriétés d'intrication d'un atome avec l'ensemble des autres et de persistance de l'intrication.

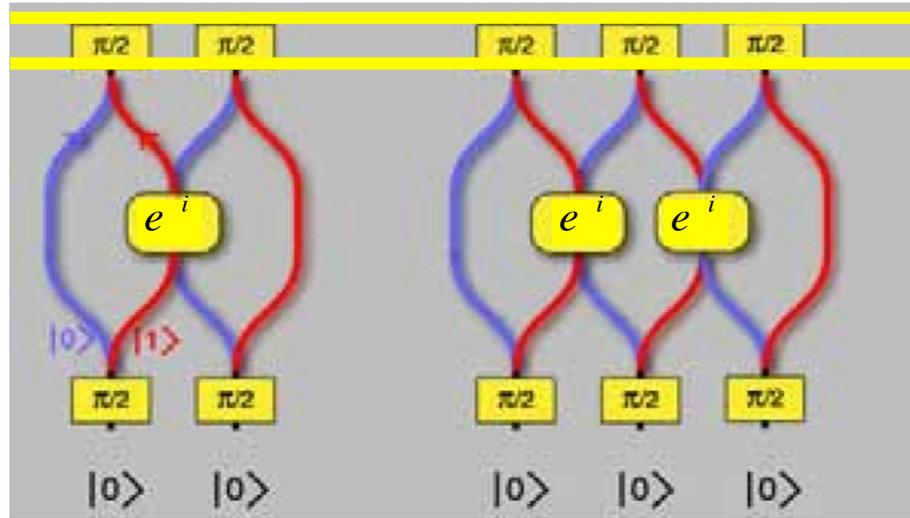


*Principe de la
préparation d'un état
cluster à 2D*

Détection de l'oscillation de l'intrication

L'intrication d'atomes à 2 états dans un double réseau optique a été mise en évidence dans les expériences du groupe d'I. Bloch. L'expérience ressemble à celle décrite à la fin de la leçon 5, avec une opération d'intrication en plus. Partant d'un réseau dans la phase de Mott (un atome par site), l'expérience sépare, puis recombine les parties $|0\rangle$ et $|1\rangle$ de la fonction d'onde de chaque atome. On applique une impulsion $\pi/2$ initiale à l'ensemble des atomes pour préparer en parallèle l'état $|0\rangle + |1\rangle$ dans tous les atomes. On effectue ensuite la translation $\pi/2$ des deux réseaux optiques, mettant en contact les parties $|0\rangle$ et $|1\rangle$ des fonctions d'onde d'atomes adjacents. Suivant le temps pendant lequel les atomes sont en interaction avant d'être ramenés à leur position initiale, on attend une oscillation de l'intrication, correspondant à un système d'atomes séparés pour $g = 2m$ et à un système dans lequel chaque atome est maximalelement intriqué à l'ensemble de tous les autres pour $g = (2m+1)$. Une fois les parties des fonctions d'onde atomiques revenues à leur position initiale, on applique une 2^{nde} impulsion $\pi/2$, déphasée de π par rapport à la première, on débranche soudainement le réseau, on laisse le gaz s'étendre pendant un temps donné et on mesure par absorption laser le nombre d'atomes dans $|0\rangle$ (ou dans $|1\rangle$). On recommence pour différentes valeurs de g et θ (ne pas confondre ces deux angles).

Détection de l'oscillation de l'intrication: une manifestation de la complémentarité

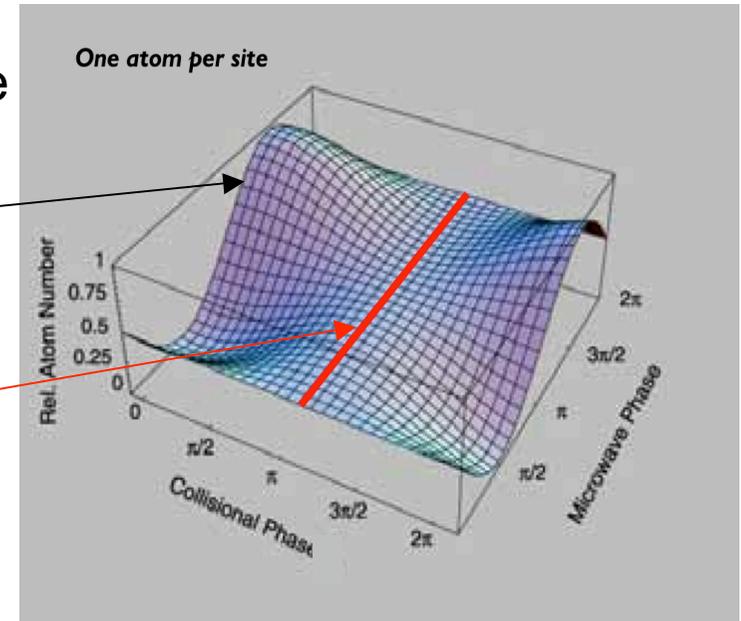


2^{de}
impulsion
micronde
(phase)

1^{ère}
impulsion
microonde

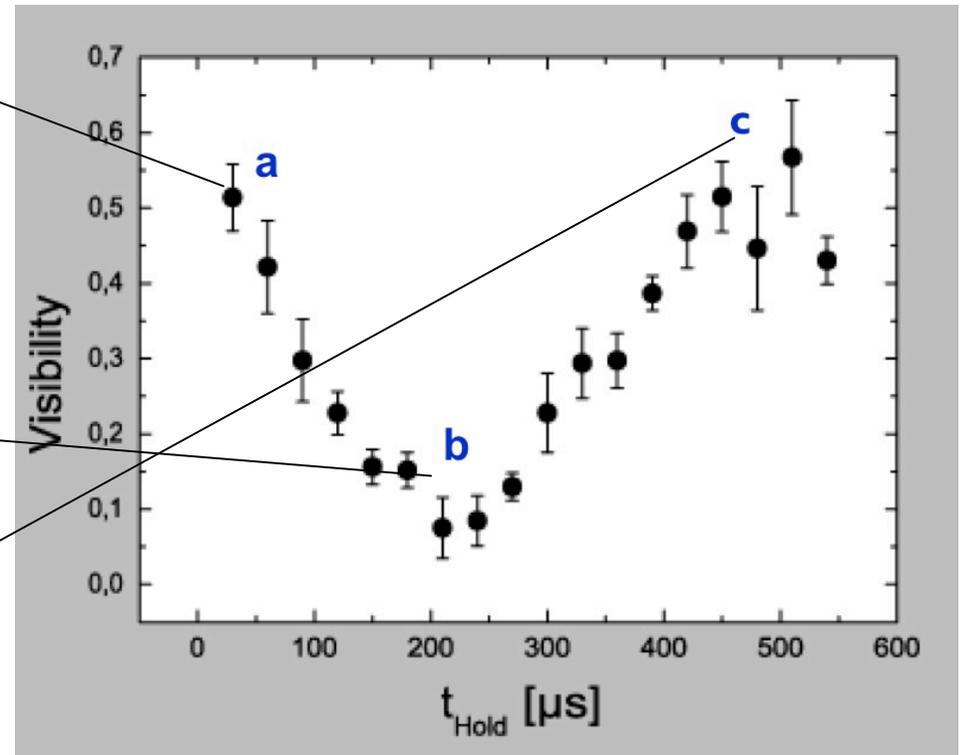
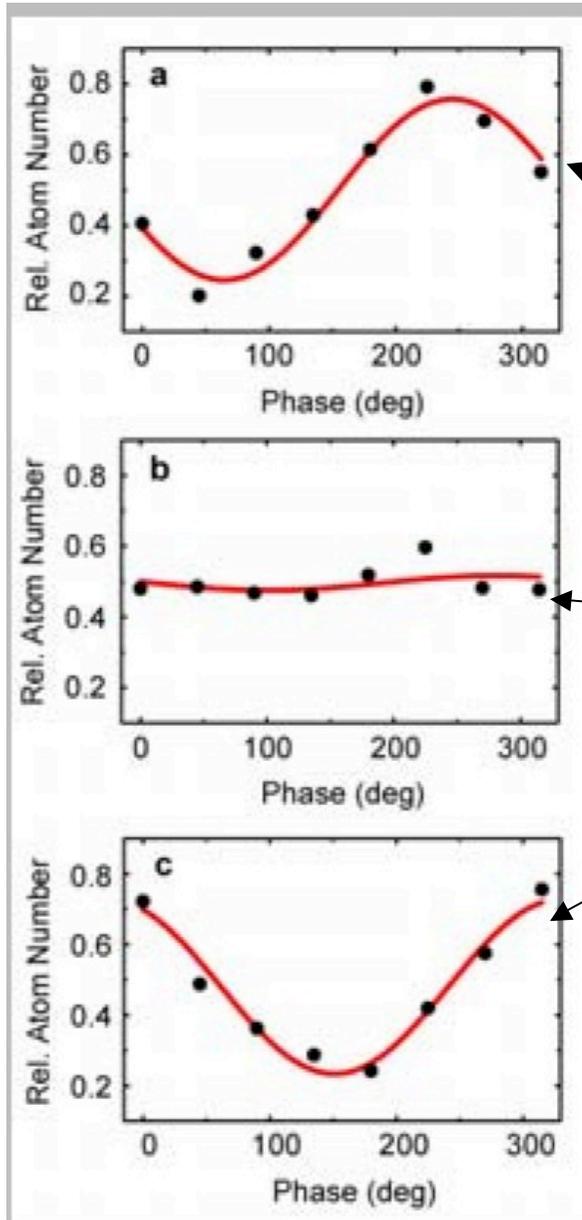
L'ensemble des 2 impulsions réalise un interféromètre de Ramsey atomique. La probabilité de trouver à la fin l'atome dans $|0\rangle$ (ou dans $|1\rangle$) oscille en fonction de , phase variable de la micro-onde.

La visibilité des franges dépend du caractère distinguable ou non du chemin suivi par chaque atome. Si $\phi = 2m\pi$, chaque atome reste séparé de tous les autres. Il n'y a pas d'information sur son chemin dans le reste du système et les franges **ont un contraste maximum**. Si $\phi = (2m+1)\pi$, chaque atome est maximalelement intriqué aux autres. Il y a information sur le chemin dans les autres atomes et **pas d'interférence**. Argument valable pour N quelconque (état de Bell, GHZ ou cluster)



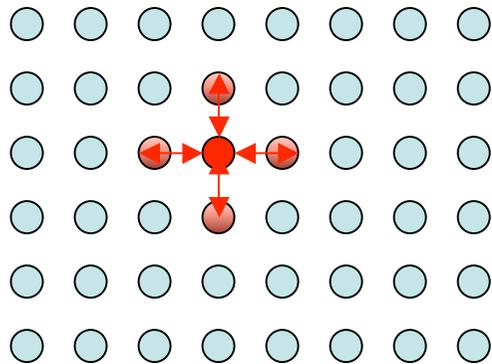
Oscillation de l'intrication observée par mesure de la visibilité des franges de Ramsey

O.Mandel, M.Greiner, A.Widera, T.Rom, T.Hänsch et I.Bloch, Nature, 425, 937 (2003).



L'expérience réalise une intrication parallèle massive des atomes. Il serait intéressant de tester cette intrication par des mesures locales adressant les atomes individuellement.

Hamiltonien statique réalisant les états cluster



Considérons un réseau de spins à 1,2 ou 3D interagissant sous l'effet du Hamiltonien:

$$H = \frac{\hbar g}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(1 - \frac{\sigma_z^{(i)}}{z}\right) \left(1 + \frac{\sigma_z^{(j)}}{z}\right) \quad (6-21)$$

où la somme $\langle i,j \rangle$ porte sur les paires de spin plus proches voisins. Nous allons montrer que l'évolution

décrite par ce Hamiltonien «statique» correspond à l'action du circuit quantique réalisant les états cluster, dont l'action a été démontrée par l'expérience de I.Bloch et al. L'opérateur d'évolution pendant le temps t sous l'effet de H est en effet, pour un couple d'atomes voisins notés 1 et 2:

$$U(\tau) = \exp \left[-i \left(1 - \frac{\sigma_z^1}{z}\right) \left(1 + \frac{\sigma_z^2}{z}\right) / 4 \right] \quad \text{avec} \quad \tau = g t \quad (6-22)$$

et on constate immédiatement que l'action de $U(\tau)$ sur les 4 états $|0,0\rangle$, $|0,1\rangle$, $|1,0\rangle$ et $|1,1\rangle$ est identique à celle de la porte de phase décrite plus haut. Si tous les sites sont peuplés chacun par un atome, l'action des portes en parallèle réalisée par les 1, 2 ou 3 opérations de translation du réseau en aller-retour simule donc l'action du Hamiltonien (6-21).

Etat cluster et modèle d'Ising de spins sur réseau

Si on néglige les effets de bord et un terme constant sans effet sur l'évolution, le hamiltonien (6-21) se met sous la forme dite d'Ising:

$$H = \frac{\hbar g}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(1 - \frac{\sigma_z^{(i)}}{z} \right) \left(1 + \frac{\sigma_z^{(j)}}{z} \right) - \frac{\hbar g}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{\sigma_z^{(i)}}{z} \frac{\sigma_z^{(j)}}{z} \quad (6-23)$$

(la différence entre les deux formes de H est décrite par des rotations à un bit appropriées sur les atomes situés aux bords du réseau ou aux limites de « vacances » dans le réseau).

On obtient un état cluster du réseau de spin en initialisant tous les spins dans l'état $(|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$ (état dont le spin pointe dans la direction + le long de O_x) et en laissant agir le Hamiltonien d'Ising pendant le temps t tel que $g t = \pi$.

Nous avons montré comment on pouvait simuler le hamiltonien d'Ising de façon dynamique, en réalisant des translations des atomes conditionnées à leur état interne. Nous allons voir dans la deuxième partie de la leçon que d'autres méthodes de simulation sont possibles, dans lesquelles les atomes restent immobiles.

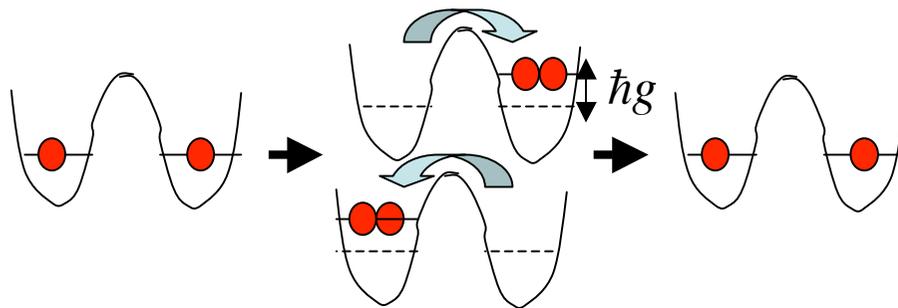
6B:

Simulation quantique de spins sur réseaux et principe de l'ordinateur quantique à états cluster.

Réalisation de hamiltoniens d'interaction entre spins sur réseau par un ensemble de bosons à deux états piégés dans la phase de Mott. Réalisation du modèle d'Ising et du hamiltonien de Heisenberg. Construction d'un hamiltonien de spins à paramètres ajustables. Intérêt des réseaux optiques de bosons pour la simulation quantique de situations de physique de la matière condensée incalculables par ordinateurs classiques. Principe de l'ordinateur quantique unidirectionnel réalisant des mesures séquentielles sur un état cluster préparé à l'avance (« one way quantum computer »).

Autre modèle de spin sur réseau: interactions induites par effet tunnel virtuel

Nous avons jusqu'à présent considéré le couplage induit entre sites voisins par déplacement *réel* des atomes. On peut également obtenir un hamiltonien de spin sur réseau en laissant les atomes immobiles interagir par un petit effet tunnel induisant des transitions *virtuelles* entre sites. Nous nous plaçons dans le régime où $J \ll g$. L'effet tunnel est alors bloqué par les interactions (voir leçons antérieures). Il reste cependant un effet au deuxième ordre qui déplace en J^2/g les états du système d'une façon dépendante du spin. Nous allons voir que cet effet est décrit par un Hamiltonien de spin effectif, dont la forme peut être adaptée en jouant sur les paramètres du système. Considérons d'abord le cas de deux atomes voisins dans le même état de spin:



Déplacement en énergie des états
 $|0,0\rangle$ et $|1,1\rangle$:

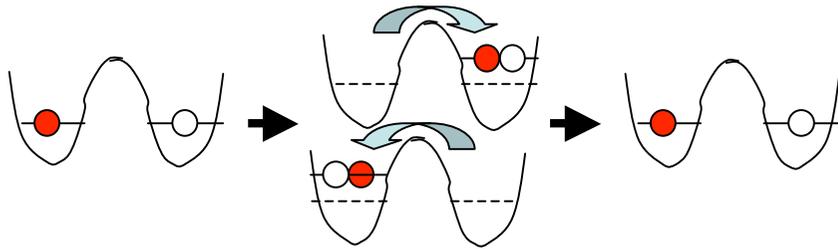
$$E_{0,0} = \frac{\hbar J^2}{4g_{00}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2 chemins}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2 bosons créés dans même état}} = \frac{\hbar J^2}{g_{00}} \quad ; \quad E_{1,1} = \frac{\hbar J^2}{g_{11}} \quad (6 \quad 24)$$

E_{00} et E_{11} sont valeurs propres de:

$$H^{(i,j)} = \hbar J^2 \frac{1}{2g_{00}} + \frac{1}{2g_{11}} \quad \begin{matrix} (i) \\ z \end{matrix} \quad \begin{matrix} (j) \\ z \end{matrix} \quad \hbar J^2 \frac{1}{2g_{00}} \frac{1}{2g_{11}} \frac{\begin{matrix} (i) \\ z \end{matrix} + \begin{matrix} (j) \\ z \end{matrix}}{2} \quad (6 \quad 25)$$

Autre modèle de spin sur réseau: couplage inter-site induit par effet tunnel virtuel (suite)

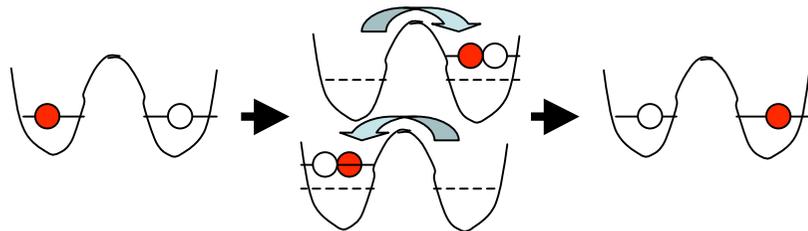
Cas de deux états différents $|0,1\rangle$ ou $|1,0\rangle$:



terme diagonal :

$$E_{0,1} = E_{1,0} = \frac{\hbar J^2}{2g_{01}}$$

$$\text{valeur propre de } H^{(i,j;1)} = \frac{\hbar J^2}{2g_{01}} \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix} \quad (6 \quad 26)$$



Echange des états :

$$H^{(i,j;2)} = \frac{\hbar J^2}{2g_{01}} \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ x & x \end{pmatrix} \quad (6 \quad 27)$$

Introduisons les projecteurs P et P sur les états de paires d'atomes de même spin et de spins différents: $P = (1 + \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix})/2$; $P = (1 - \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix})/2$ (6 28)

Regroupant (6-25) à (6-28), on obtient le Hamiltonien effectif:

$$H_{\text{tunnel}}^{(i,j)} = H^{(i,j)}P + (H^{(i,j;1)} + H^{(i,j;2)})P = \hbar J^2 \frac{1}{2g_{00}} + \frac{1}{2g_{11}} \frac{1 + \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix}$$

$$\hbar J^2 \frac{1}{2g_{00}} \frac{1}{2g_{11}} \frac{1 + \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix}}{2} \frac{\begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix}}{2} + \frac{\hbar J^2}{2g_{01}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix} \frac{\hbar J^2}{2g_{01}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i) & (j) \\ x & x \end{pmatrix} \quad (6 \quad 29)$$

Couplage inter-site induit par effet tunnel virtuel (suite)

Re-écrivons $H_{tunnel}^{(i,j)}$ en utilisant les propriétés des produits de matrices de Pauli:

$$H_{tunnel}^{(i,j)} = \frac{\hbar J^2}{4} \frac{1}{g_{00}} + \frac{1}{g_{11}} \frac{1}{g_{01}} \begin{pmatrix} (i) \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j) \\ z \end{pmatrix} + \frac{\hbar J^2}{4g_{01}} \left(\begin{pmatrix} (i) \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j) \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (i) \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (j) \\ y \end{pmatrix} \right) + \frac{\hbar J^2}{4} \frac{1}{g_{00}} \frac{1}{g_{11}} \left(\begin{pmatrix} (i) \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (j) \\ z \end{pmatrix} \right) + \text{constante} \quad (6 \quad 30)$$

Le dernier terme apparaît comme un hamiltonien Zeeman dans un champ magnétique, ne couplant pas les spins. Le premier terme correspond à un couplage spin-spin longitudinal (terme de type Ising) et le second à un couplage spin-spin transversal. Les poids relatifs de ces termes dépendent des valeurs de g_{00} , g_{11} et g_{01} , c-à-d des longueurs de diffusion a_{s00} , a_{s11} et a_{s01} , que l'on peut changer, par exemple en jouant sur une résonance de Feshbach. En champ magnétique nul ou faible, les trois longueurs de diffusion sont voisines. En faisant l'approximation $g_{00} = g_{11} = g_{01} = g$, on simplifie le hamiltonien qui prend une forme invariante par rotation des spins (Hamiltonien de Heisenberg). En sommant finalement sur les couples d'atomes dans le réseau, on obtient dans ce cas:

$$H_{Heisenberg} = \frac{\hbar J^2}{4g} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{\sigma}^{(j)} \quad (6 \quad 31)$$

On peut aussi superposer un gradient de champ magnétique ou électrique pour enrichir encore les possibilités d'ajustement du hamiltonien.

Simulation de réseaux de spins

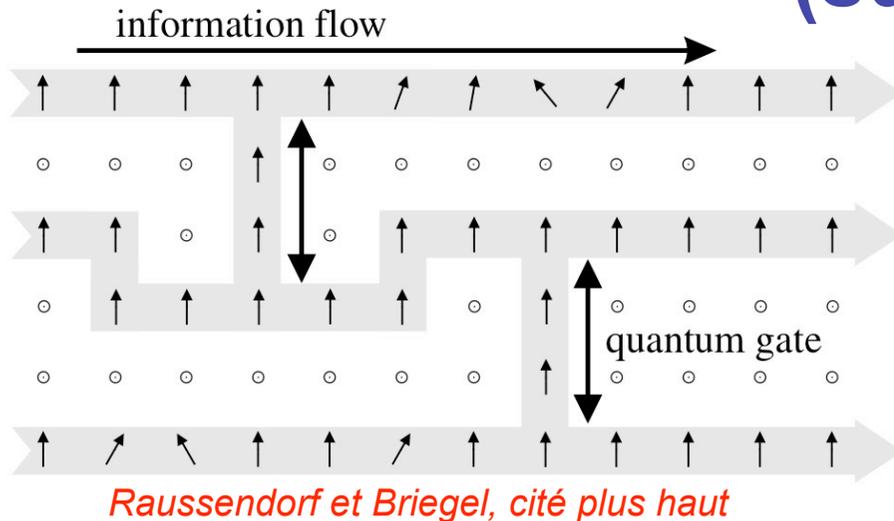
La manipulation d'atomes froids à 2 états dans un réseau optique permet, en jouant sur les paramètres J et g , de réaliser divers hamiltoniens de spins sur réseau. L'évolution du système régie par ces hamiltoniens conduit en général à une intrication massive des atomes. Pour N particules, l'espace de Hilbert a 2^N dimensions et l'opérateur densité le plus général du système a 2^{2N} éléments. Dès que N atteint quelques dizaines, l'évolution du système devient impossible à calculer avec un ordinateur classique. Une expérience réalisée avec des atomes bosoniques dans un réseau optique simule donc, de façon beaucoup plus efficace qu'on ne peut le faire par le calcul, un ensemble de situations rencontrées en physique de la matière condensée. La vitesse de ces simulations quantiques laisse cependant à désirer. Les Hamiltoniens basés sur l'effet tunnel virtuel sont en $J^2/4g = (J/2g)^2 g$. Dans la phase de Mott, J/g est au plus égal à $1/\nu_c = 1/35$. La fréquence caractéristique $J/2$ du couplage entre spins est au mieux $\sim g/8 \nu_c^2$. Une valeur typique de g pour un réseau avec $d = \lambda/2 = 425 \text{ nm}$ est $g/2 \sim 2 \text{ kHz}$ (voir plus haut), conduisant à $J/2 \sim 0.5 \text{ Hz}$, une fréquence très petite. Pour augmenter le couplage, il faudrait réaliser des réseaux avec d beaucoup plus petit. Comme g croît en $1/d^3$, on aurait $J/2 \sim 4 \text{ kHz}$ pour $d = 20 \text{ nm}$. D'où l'intérêt des méthodes proposées pour diminuer le pas des réseaux (voir séminaire de P.Zoller du 6 Novembre 2006).

Principe de l'ordinateur unidirectionnel à états cluster

La préparation dans un réseau plan d'atomes à deux niveaux d'états cluster présentant une intrication persistante est très intéressante dans la perspective de l'étude d'un type particulier d'ordinateur quantique, appelé en anglais «**one way quantum computer**» (proposition de *R.Raussendorf et H.J.Briegel, Phys.Rev.Lett. 86, 5188 (2001)*).

Dans ce modèle de calculateur quantique, l'intrication est introduite d'emblée au départ en préparant un état cluster constitué de chaînes d'atomes intriqués, dont la forme dépend du circuit quantique requis par l'algorithme de calcul. Une fois cet état préparé, le programme du calcul se déroule en effectuant sur les atomes, en se déplaçant dans un sens unique le long des chaînes, des mesures de composantes de spin, atome par atome. Le choix de la composante mesurée dépend du résultat aléatoire des mesures antérieures. Les opérations successives impliquent donc uniquement des opérations locales. Au fur et à mesure que l'opération se poursuit l'intrication est progressivement détruite, jusqu'à la mesure finale effectuée sur les atomes en bouts de chaînes, qui fournit le résultat. Sans entrer dans le détail, nous résumons dans les deux pages qui suivent le principe des opérations.

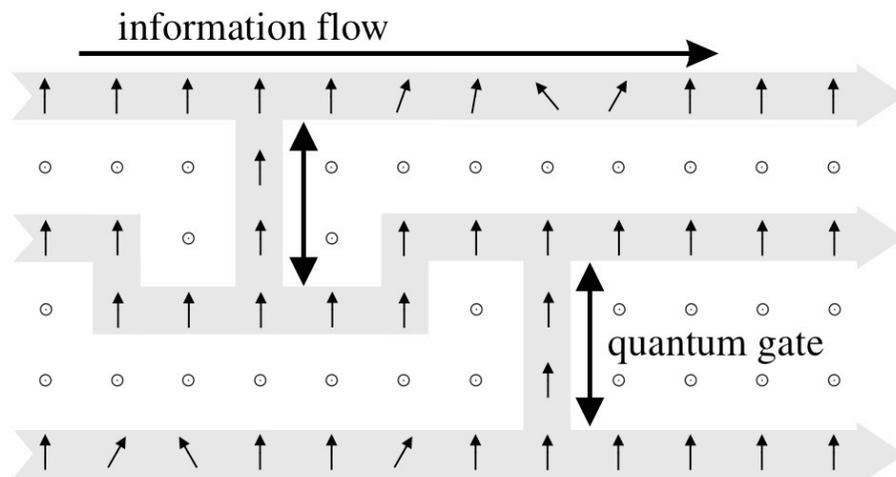
L'ordinateur unidirectionnel à états cluster (suite)



Avant les mesures, les qubits sont dans l'état cluster $2D$ décrit plus haut. La forme du «circuit» est définie en effectuant des mesures de z (cercles) sur les qubits blancs «masqués». Le circuit des qubits en grisé (non mesurés) est un état intriqué de type cluster (propriété de

persistence). On effectue ensuite des mesures sur les qubits un à un, de gauche à droite, la composante de spin mesurée (symbolisée par les directions des flèches) dépendant des résultats des mesures antérieures. On peut ainsi effectuer l'équivalent d'une suite d'opérations à un et deux bits réalisées par un circuit quantique « conventionnel ». Les opérations à un bit (rotations du spin) sont faites en faisant des mesures sur cinq atomes le long d'une horizontale (le premier atome est dans l'état initial du bit, cet atome et les trois suivants subissent des mesures suivant des directions dépendant des trois angles d'Euler de la rotation et le dernier atome se retrouve dans l'état final de la rotation).

L'ordinateur unidirectionnel à états cluster (suite)



On exploite ainsi la non-localité de l'intrication introduite au départ dans le système: le dernier atome d'une suite de cinq est projeté dans un état corrélé aux résultats des mesures effectuées sur les 4 atomes précédents, de telle sorte que la rotation voulue est réalisée.

Les portes à deux qubits sont obtenues en effectuant des mesures individuelles sur les atomes alignés le long des maillons verticaux qui relient deux lignes horizontales. Pour une analyse détaillée voir Raussendorf et Briegel (cité plus haut).

Une fois l'intrication initiale réalisée, le calcul consiste exclusivement en mesures à un seul qubit. Ces mesures « impriment » le circuit sur le réseau et défont progressivement l'intrication initiale de ce circuit au fur et à mesure que le calcul progresse. Les états cluster sont donc des ordinateurs quantiques unidirectionnels et la suite des mesures en constitue le programme.

Conclusion de la sixième leçon

Les réseaux d'atomes froids se prêtent à des opérations d'intrication en parallèle et à la simulation de systèmes de spins couplés par des interactions variées. Les états *cluster* obtenus sont des «ressources» naturelles pour une nouvelle forme de calculateur quantique «à sens unique». Pour mener à bien les expériences, il faut mettre en œuvre des méthodes d'adressage individuel des atomes. Il serait également intéressant de pouvoir réaliser des réseaux de pas plus petit, évoluant plus vite que les systèmes dont la périodicité spatiale est définie par la longueur d'onde optique des lasers piégeant (passer d'une physique micrométrique à une physique nanométrique). Il faut également pouvoir corriger les défauts du réseau (vacances ou présence de plusieurs atomes dans un site) et mettre en œuvre des procédures de correction d'erreur minimisant les effets de la décohérence, non traitée dans ces leçons. Nous n'avons abordé que certains aspects simples de l'intrication et du traitement de l'information avec des réseaux optiques d'atomes. Bien d'autres idées ont été proposées, comme, par exemple, des procédures basées sur le passage adiabatique, qui doivent permettre d'obtenir des portes fidèles même si le nombre d'atomes par puits n'est pas connu.

La dernière page donne des références supplémentaires, certaines approfondissant des points abordés dans ce cours, d'autres ouvrant la réflexion sur des problèmes que nous n'avons pas eu le temps de traiter.

Références supplémentaires

En plus des références déjà données dans le texte, voir:

Pour la préparation de réseaux optiques avec un atome par site:

P.Rabl, A.J.Daley, P.O.Fedichev, J.I.Cirac et P.Zoller, Phys.Rev.Lett. 91, 110403 (2003).

Pour le calcul quantique avec des atomes neutres et la mise en oeuvre de codes correcteurs dans des réseaux d'atomes:

H.J.Briegel, T.Calarco, D.Jaksch, J.I.Cirac et P.Zoller, Journal of Modern Optics, 47, 415 (2000)

Pour la simulation des modèles de spins sur réseaux:

J.J.Garcia-Ripoll et J.I.Cirac, New Journal of Physics, 5, 76 (2003)

Pour la description d'expériences visant à adresser des atomes individuels dans un réseau:

J.Seibby-Strabley, M.Anderlini, P.S.Jessen et J.V.Porto, Phys.Rev.A 73, 033605 (2006).

Pour le principe du calcul quantique avec des atomes en nombre par puits incertain:

J.J.Garcia-Ripoll et J.I.Cirac, Phys.Rev.Lett. 90, 127902 (2003)