

2.

Les outils de la physique des ions (I): piégeage et refroidissement

6 Février 2006

2A: Théorie simple du piégeage de un ou plusieurs ions. Description des modes de vibration collectifs.

2B. Le refroidissement radiatif des ions

2A:

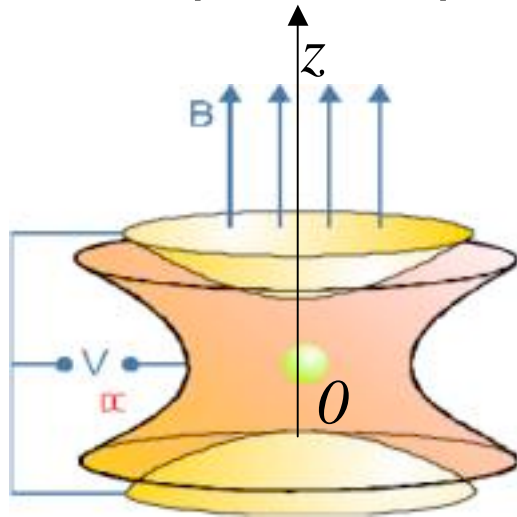
Théorie simple du piégeage de un ou plusieurs ions. Description des modes de vibration collectifs.

Analyse du piège quadripolaire de Paul. Séparation des micro- et macro- mouvements. Ordres de grandeur. Piège de Paul linéaire. Cristallisation de plusieurs ions: chaîne d'ions dans un piège linéaire. Modes de vibration de deux et trois ions. Généralisation à un nombre d'ions plus grand.

Piégeage électromagnétique d'une particule chargée

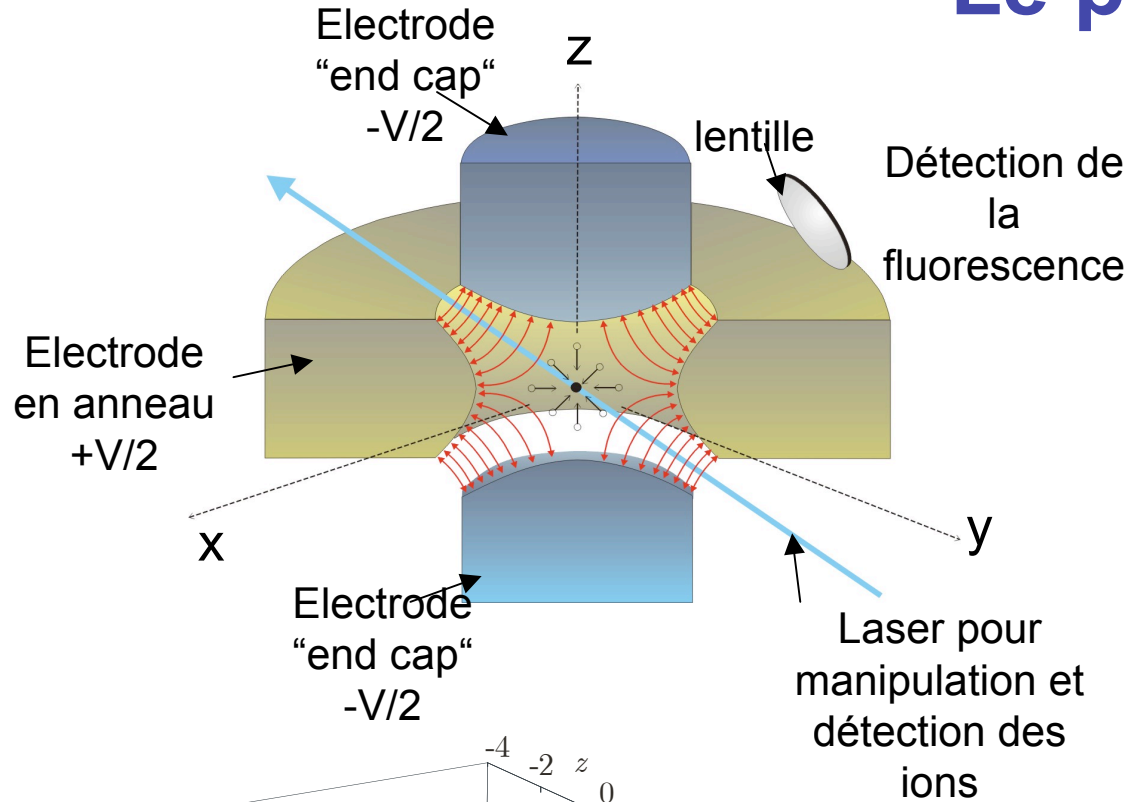
Impossibilité de piéger par un potentiel électrostatique: il faut un extremum du potentiel (minimum pour $e>0$, maximum pour $e<0$) qui n'existe pas dans l'espace libre à cause du théorème de Gauss ($\Delta U=0$).

Deux solutions: utiliser soit une combinaison de champs électrostatiques et magnétiques (piège de Penning), soit un piège à champ électrique dépendant du temps (piège de Paul)



Principe du piège de Penning: un potentiel électrostatique assure le piégeage dans la direction Oz et un champ magnétique aligné le long de cette direction assure le confinement latéral (force de Lorentz centripète produisant une rotation cyclotron de la charge). En information quantique, ce piège n'est guère utilisé. On lui préfère le piège de Paul.

Le piège de Paul

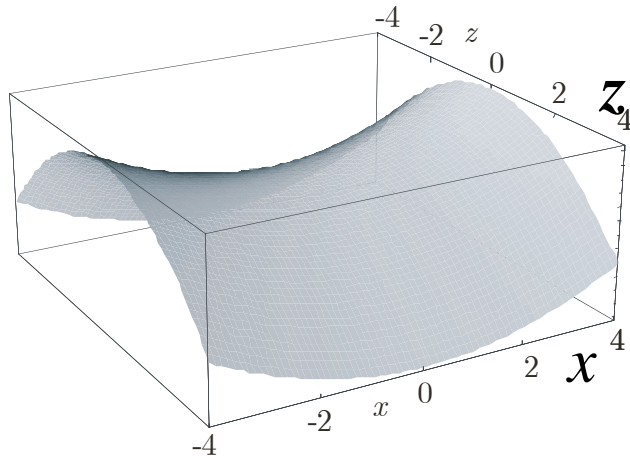


Distance des électrodes verticales:

$$2z_c$$

Rayon de l'électrode en anneau:

$$r_c = z_c \sqrt{2}$$



Potential dans le plan $x0z$
pour $V > 0$

Potentiel quadripolaire:

$$U(x, y, z) = \frac{V}{4z_c^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

*Point de selle à l'origine
(minimum suivant $0x$,
maximum suivant $0z$)*

Stabilisation du piège de Paul par utilisation d'un potentiel oscillant

Lorsque V est statique >0 , une charge e positive est piégée dans le plan xOy , mais accélérée vers l'électrode « *end cap* » dans la direction Oz . Si on retourne le potentiel, elle est au contraire piégée dans la direction verticale, mais s'échappe vers l'électrode en anneau dans le plan horizontal. La solution est de faire osciller le potentiel assez vite pour que la particule ne puisse s'échapper:

$$U(x, y, z) = \frac{V(t)}{4z_c^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) ; V(t) = V_0 \cos(\omega_{rf}t) \quad (2-1)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{eE_z(t)}{m} = -e \frac{dU(t)}{dz} = \frac{eV_0}{mz_c^2} \cos(\omega_{rf}t) z$$

$$\frac{d^2r_{\perp}}{dt^2} = -\frac{eV_0}{2mz_c^2} \cos(\omega_{rf}t) r_{\perp} \quad (r_{\perp} = x \text{ ou } y) \quad (2-2)$$

Equations du mouvement indépendantes dans les 3 directions. Forces magnétiques négligeables

Equations de Mathieu

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = 2q_z \cos(2\tau) z \quad ; \quad \tau = \omega_{rf} t / 2 \quad ; \quad q_z = \frac{2eV_0}{mz_c^2 \omega_{rf}^2} = \frac{4eV_0}{mr_c^2 \omega_{rf}^2}$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = 2q_x \cos(2\tau) x \quad ; \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = 2q_y \cos(2\tau) y \quad ; \quad q_x = q_y = -q_z / 2$$

(2-3)

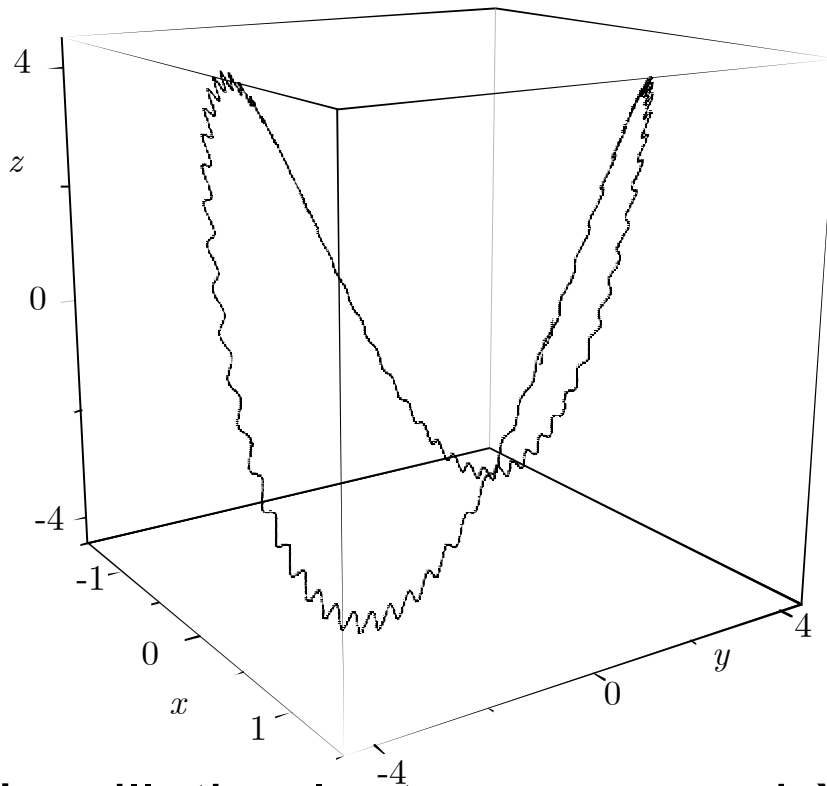
Domaine de stabilité des solutions:

$$0 \leq |q_x|, |q_y|, |q_z| \leq 0.908 \quad \longrightarrow \quad \omega_{rf} > \frac{1}{z_c} \sqrt{\frac{2eV_0}{0.908 m}}$$

Interprétation physique: la vitesse de la charge accélérée par le potentiel V_0 est $v \sim (eV_0/m)^{1/2}$. Le temps mis par la charge pour s'échapper dans un potentiel statique serait $t \sim z_c/v \sim z_c(m/eV_0)^{1/2}$. Ce temps doit être plus long que le temps caractéristique d'évolution du potentiel $\sim 1/\omega_{rf}$.

Solution numérique des équations de Mathieu

Ion de charge $e = +1$ et $m = 40 \text{ uma}$
(Ca^+) avec $V_0 = 100 \text{ V}$, $z_c = 1 \text{ mm}$ et
 $\omega_{\text{rf}}/2\pi = 10 \text{ MHz}$, correspondant à
 $q_z = 0.15$, $q_x = q_y = -0.075$.



Le mouvement se décompose en
une oscillation lente sur laquelle
se superpose une petite vibration
rapide. L'amplitude de cette
vibration s'annule au centre du
piège.

L'oscillation lente correspond à une courbe de Lissajous, avec
une oscillation complète le long de $0z$ pendant le temps d'une
demi - oscillation dans le plan transverse.

Séparation de l'oscillation et de la micro - vibration: force pondéromotrice

Séparation de z en une grande composante lente $Z(t)$, décrivant l'oscillation dans le piège et une petite composante rapide $\zeta(t)$:

D'où:
$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{eV_0}{mz_c^2} \cos(\omega_{rf} t) (Z + \zeta) \quad (2-4)$$

Faisons l'hypothèse (vérifiée *a posteriori*) que $|d^2 Z/dt^2| \ll |d^2 \zeta/dt^2|$.

On a alors:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} \approx \frac{eV_0}{mz_c^2} \cos(\omega_{rf} t) Z \quad (2-5)$$

avec comme solution évidente:

$$\zeta(t) = -\frac{q_z}{2} \cos(\omega_{rf} t) Z(t) \quad (2-6)$$

qui satisfait $|\zeta(t)| \ll |Z(t)|$ si $|q_z| \ll 1$.

Force pondéromotrice (suite)

L'ion subit une vibration rapide d'amplitude proportionnelle à sa distance au centre du piège. L'énergie cinétique moyenne associée à ce micro - mouvement est:

$$\overline{E_c}(Z) = \frac{1}{2} m \overline{\left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2} = \frac{1}{16} m q_z^2 \omega_{rf}^2 Z^2 = \frac{1}{2} m \omega_z^2 Z^2 \quad (2-7)$$

où l'on a défini la fréquence ω_z par:
$$\omega_z = \frac{q_z \omega_{rf}}{2\sqrt{2}} \quad (2-8)$$

Lorsque l'ion évolue dans le piège, l'énergie totale du micro - mouvement et de l'oscillation lente est conservée. L'énergie $E_c(Z)$ apparaît ainsi comme une énergie potentielle pour le mouvement lent. Sa dérivée est une force pondéromotrice de rappel. La fréquence lente d'oscillation est $\omega_z \ll \omega_{rf}$ si $|q_z| \ll 1$. Les *accélérations lentes et rapides sont dans un rapport:*

$$\left| \frac{d^2 Z}{dt^2} \right| / \left| \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right| \sim \frac{\omega_z^2}{\omega_{rf}^2} \cdot \frac{Z}{\zeta} = \frac{q_z^2}{8} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{q_z} = \frac{q_z}{2\sqrt{2}} \ll 1$$

qui satisfait *a posteriori* l'hypothèse de départ du calcul.

Ordres de grandeur

Ion Calcium (expériences d'Innsbruck):

$$m = 40 \text{ uma} \quad ; \quad V_0 = 100 \text{ V} \quad ; \quad z_c = 1 \text{ mm} \quad ; \quad \omega_{rf} / 2\pi = 10 \text{ MHz}$$

$$\longrightarrow q_z = 0.15 \quad ; \quad q_x = q_y = -0.075$$

Fréquences caractéristiques du piège:

$$\omega_z / 2\pi = \frac{q_z}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_{rf}}{2\pi} = 530 \text{ kHz} \quad ; \quad \omega_x = \omega_y = \frac{\omega_z}{2} = 265 \text{ kHz}$$

Profondeur du piège: $\overline{E}_c(z_c) = \frac{1}{8} q_z e V_0 \sim 2 \text{ eV} \sim 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \sim 2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$

Capture possible d'ions ayant une température de plusieurs milliers de degrés Kelvin.

Nombre de quanta de vibration de l'ion capturé:

$$n_{\max} \sim \frac{\overline{E}_c(z_c)}{\hbar \omega_z} \sim 10^9$$

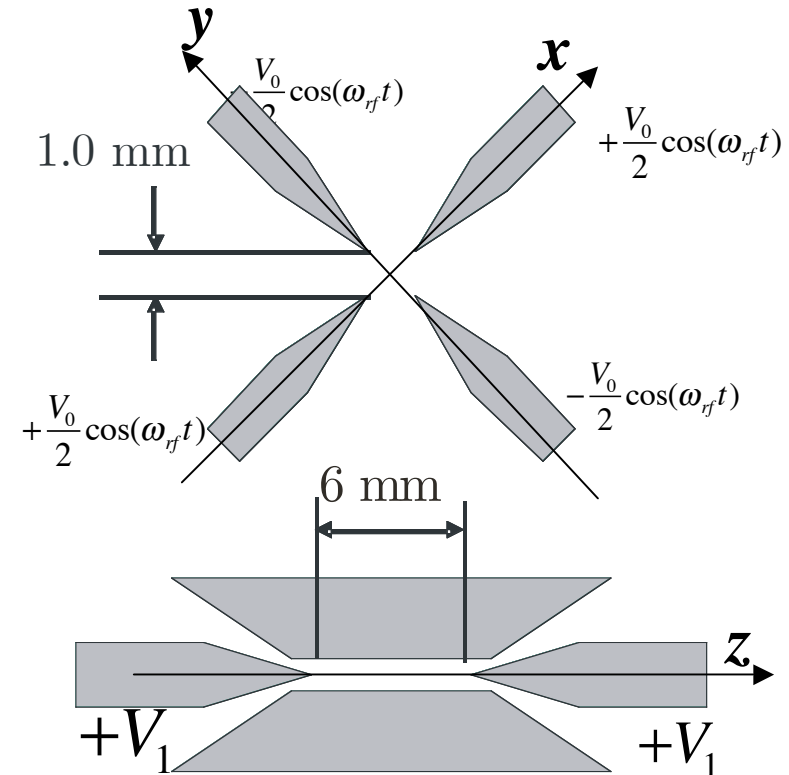
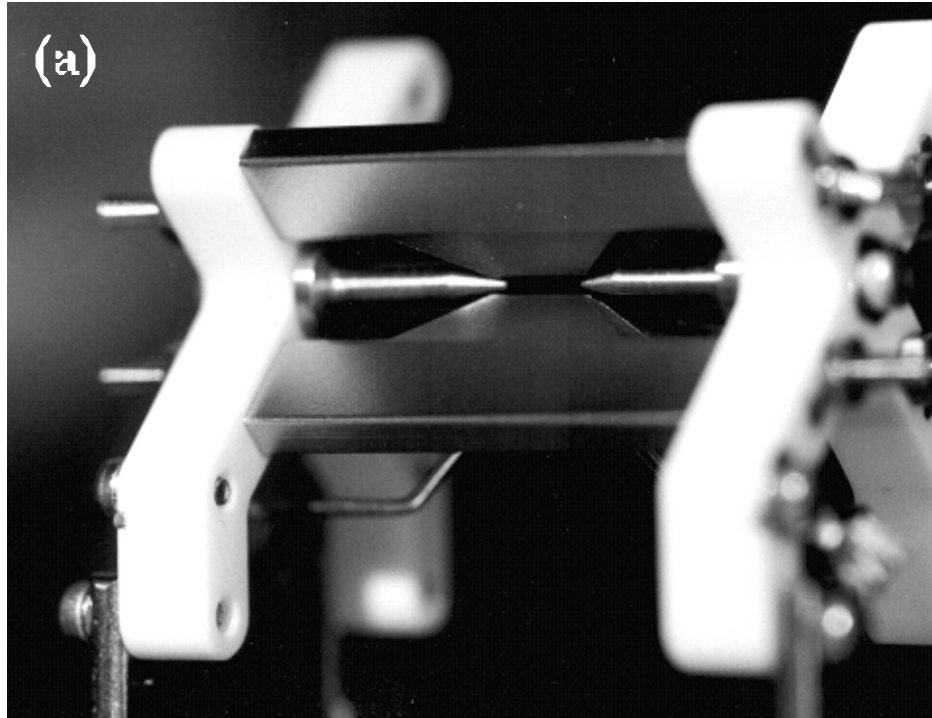
Il faut refroidir l'ion!

Analogie entre la force pondéromotrice et la force dipolaire exercée sur un atome par un champ laser non-résonnant

Rappelons que le piégeage dipolaire d'un atome neutre est produit par un potentiel proportionnel à l'intensité du champ laser. Si le désaccord de fréquence du laser est positif (décalage vers le bleu), la polarisabilité atomique est positive et le potentiel pousse les atomes vers les régions où le champ est nul.

Pour un ion piégé, le laser est remplacé par le champ radiofréquence appliqué aux électrodes, dont l'amplitude s'annule en $x=y=z=0$. En absence de ce champ, la fréquence propre de la charge est nulle. La radiofréquence appliquée est donc toujours décalée « vers le bleu ». Son effet est d'attirer l'ion vers le centre du piège. L'analogie est quantitative, le potentiel pondéromoteur étant précisément l'énergie de polarisation de la charge dans le champ piégeant.

Piège linéaire (groupe d'Innsbruck)



Piégeage transversal quasi-quadripolaire très confinant ($\omega_x/2\pi = \omega_y/2\pi = 2-4 \text{ MHz}$). Fermeture dans la direction Oz par potentiel statique $+V_1$ avec $\omega_z/2\pi \sim 500 \text{ kHz}$. Piège une chaîne de quelques ions le long de Oz . Nous considérons pour simplifier que le piège est harmonique dans les trois directions avec des raideurs très différentes suivant la direction longitudinale ou transverse.

Cristallisation des ions (aspects qualitatifs)

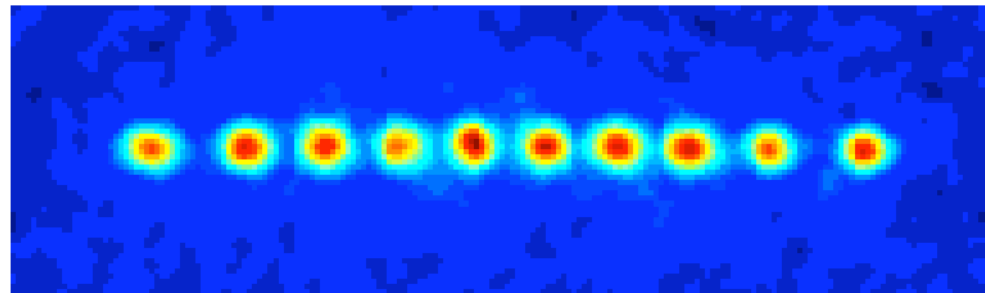
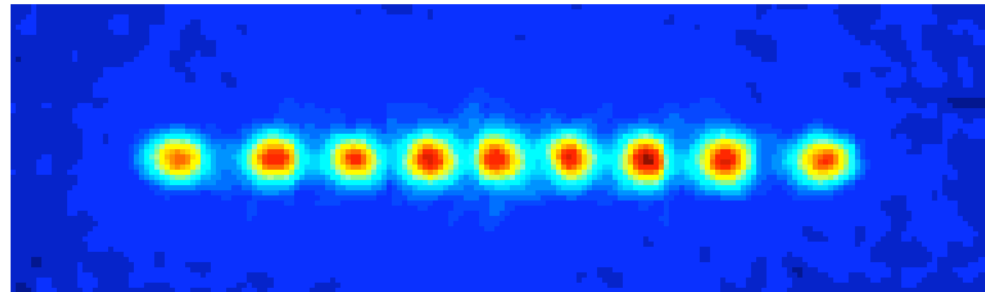
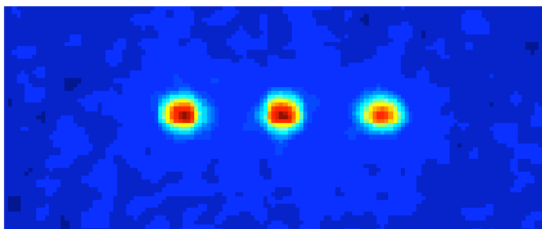
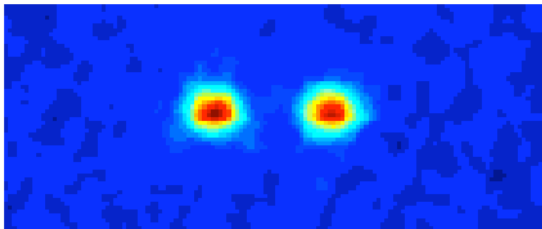
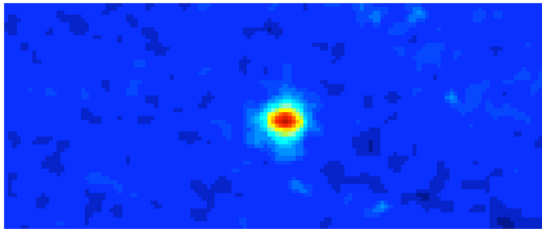
Lorsque plusieurs ions sont piégés, il y a compétition entre agitation thermique et effet des forces électriques. A la force de piégeage s'ajoute la répulsion coulombienne. A haute température, l'ensemble est désordonné. A très basse température les ions s'arrangent suivant une structure ordonnée.

Nous ne considérons que le cas de quelques ions dans un piège linéaire. Deux ions se placent à l'équilibre à $\pm z_C/2$ où z_C est une distance caractéristique de l'interaction de Coulomb correspondant au minimum de l'énergie potentielle totale $E_T(z_C)$:

$$E_T(z_C) = \frac{1}{4} m \omega_z^2 z_C^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 z_C} \xrightarrow{\text{minimum pour}} z_C = \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m \omega_z^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2-9)$$

Avec les valeurs typiques des paramètres de $^{40}\text{Ca}^+$: $z_C \sim 9 \mu\text{m}$. Cela reste l'ordre de grandeur des distances entre ions dans une chaîne avec $N > 2$. La cristallisation se produit en général dans un volume beaucoup plus petit que celui du piège ($z_C \ll z_c$). Elle requiert un fort refroidissement préalable des ions (voir plus loin).

Quelques chaînes d'ions (Innsbruck)



Fluorescence spatialement résolue. Détection en quelques millisecondes (voir première leçon)

Modes de vibration de deux ions dans un piège harmonique à une dimension

Changement de variables: $Z = \frac{z_1 + z_2}{2}$; $z = z_1 - z_2$

Z: coordonnée du centre de masse
 coordonnée relative $\rightarrow z_1 = Z + \frac{z}{2}$; $z_2 = Z - \frac{z}{2}$ z : (2-10)

Energie cinétique exprimée dans les deux jeux de variables:

$$E_c = \frac{m}{2} (\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) = m\dot{Z}^2 + \frac{m}{4} \dot{z}^2 \quad (2-11) \quad \begin{array}{l} \text{masse totale: } M=2m \\ \text{masse réduite: } \mu=m/2 \end{array}$$

Energie potentielle:

$$U = \frac{m}{2} \omega_z^2 (z_1^2 + z_2^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |z_1 - z_2|} = m\omega_z^2 \left(Z^2 + \frac{z^2}{4} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |z|} \quad (2-12)$$

Développement au 2^{ème} ordre en $z-z_C$ autour du minimum $z=z_C$:

$$U(Z, z) = m\omega_z^2 Z^2 + \frac{3m\omega_z^2}{4} (z - z_C)^2 + \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 z_C} \quad (2-13)$$

Modes de vibration de deux ions dans un piège harmonique à une dimension (suite)

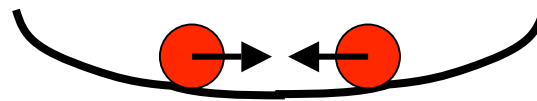
Energie totale des deux ions (au 2^{ème} ordre en $z-z_C$):

$$E = m \left[\dot{Z}^2 + \omega_z^2 Z^2 \right] + \frac{m}{4} \left[\dot{z}^2 + 3\omega_z^2 (z - z_C)^2 \right] + \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 z_C} \quad (2-14)$$

Oscillateur du centre
de masse de
fréquence ω_z



Oscillateur du mouvement
relatif (mode accordéon) à la
fréquence $\omega_z \sqrt{3}$



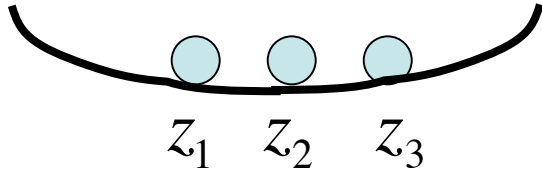
Deux modes d'oscillation indépendants

*Mouvement
classique*

$$\begin{aligned} z_1 &= Z_0 \cos(\omega_z t + \varphi) + \frac{z_0}{2} \cos(\omega_z \sqrt{3} t + \psi) + \frac{z_C}{2} \\ z_2 &= Z_0 \cos(\omega_z t + \varphi) - \frac{z_0}{2} \cos(\omega_z \sqrt{3} t + \psi) - \frac{z_C}{2} \end{aligned} \quad (2-15)$$

Modes de vibration de trois ions

$$Z_1 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3); Z_2 = \frac{1}{2}(z_3 - z_1); Z_3 = \frac{1}{6}(z_1 - 2z_2 + z_3)$$



$$z_1 = Z_1 - Z_2 + Z_3; z_2 = Z_1 - 2Z_3; z_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad (2-16)$$

$$E_C = \frac{m}{2} \sum_i \dot{z}_i^2 = \frac{m}{2} [3\dot{Z}_1^2 + 2\dot{Z}_2^2 + 6\dot{Z}_3^2]; \quad U = \frac{m\omega_z^2}{2} \sum_i z_i^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z_1 - z_3|} + \frac{1}{|z_1 - z_2|} + \frac{1}{|z_2 - z_3|} \right] =$$

$$\frac{m}{2} \omega_z^2 [3Z_1^2 + 2Z_2^2 + 6Z_3^2] + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2|Z_2|} + \frac{1}{|Z_2 - 3Z_3|} + \frac{1}{|Z_2 + 3Z_3|} \right] \quad (2-17)$$

Position du minimum du potentiel:

$$z_3^{(e)} = -z_1^{(e)} = z_C; z_2^{(e)} = 0 \rightarrow Z_1^{(e)} = Z_3^{(e)} = 0; Z_2^{(e)} = z_C = \left(\frac{5e^2}{16\pi\epsilon_0 m\omega_z^2} \right)^{(1/3)}$$

Développement de l'énergie pour de petites oscillations autour du minimum:

$$E = \frac{3m}{2} [\dot{Z}_1^2 + \omega_z^2 Z_1^2] + m [\dot{Z}_2^2 + 3\omega_z^2 (Z_2 - z_C)^2] + 3m \left[\dot{Z}_3^2 + \frac{29}{5} \omega_z^2 Z_3^2 \right] \quad (2-18)$$

Mode centre de masse:

$$\omega_z$$

Mode accordéon:

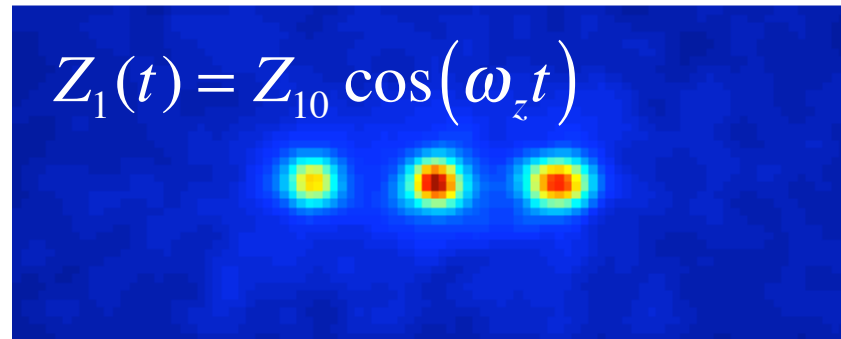
$$\omega_z \sqrt{3}$$

Mode « ciseau »:

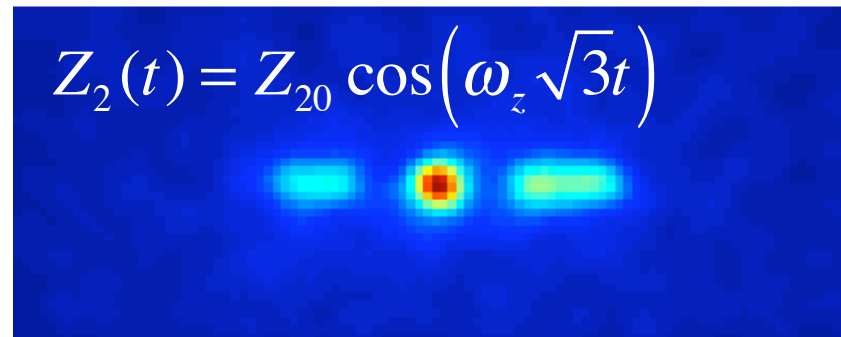
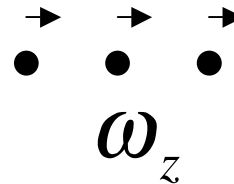
$$\omega_z \sqrt{(29/5)}$$

Trois oscillateurs harmoniques indépendants

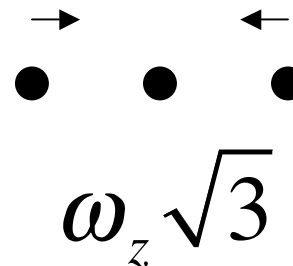
Visualisation des modes (N=3)



Mode du CM

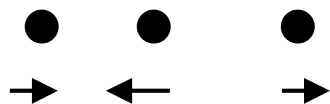


Mode « accordéon »



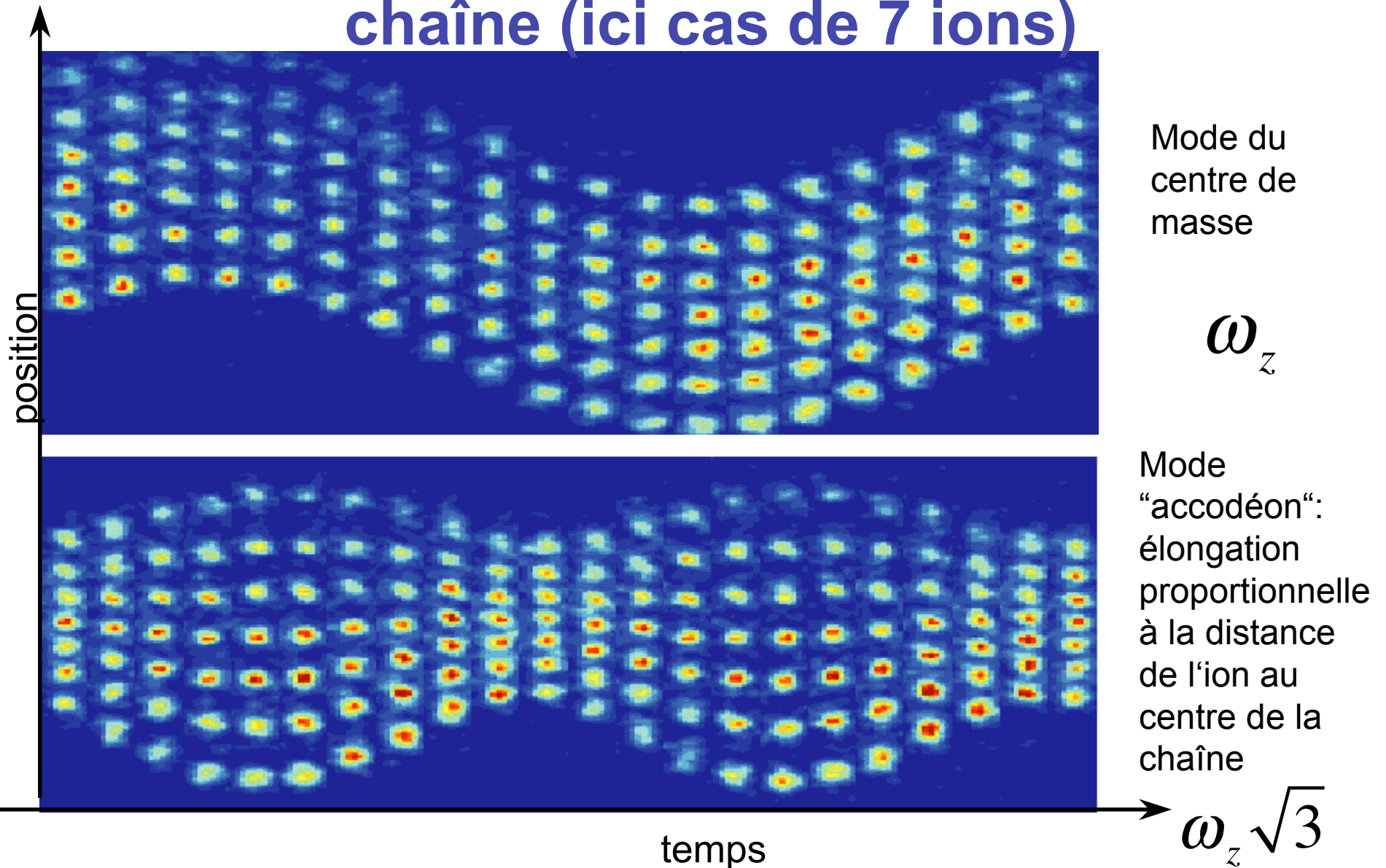
$$Z_3(t) = Z_{30} \cos(\omega_z \sqrt{29/5} t)$$

Mode « ciseau »

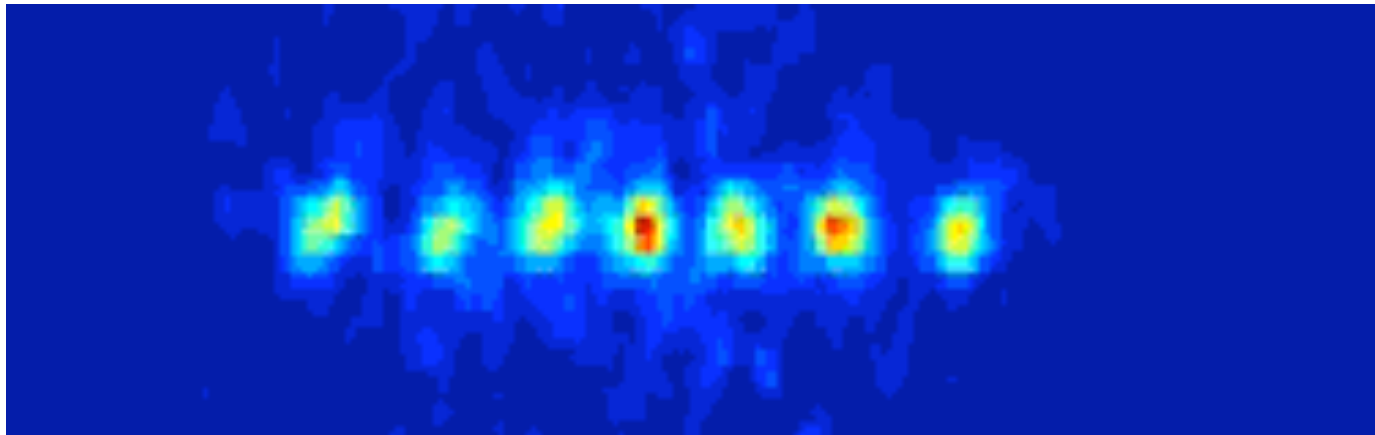


Les deux premiers modes (centre de masse et accordéon) sont pour tout N ceux de fréquences les plus basses. Leurs fréquences sont indépendantes de N . Ce n'est plus vrai pour les modes plus élevés.

Les deux premiers modes de vibration sont indépendants du nombre d'ions dans la chaîne (ici cas de 7 ions)



Film de sept ions oscillant dans le mode «accordéon»



2B.

Le refroidissement radiatif des ions

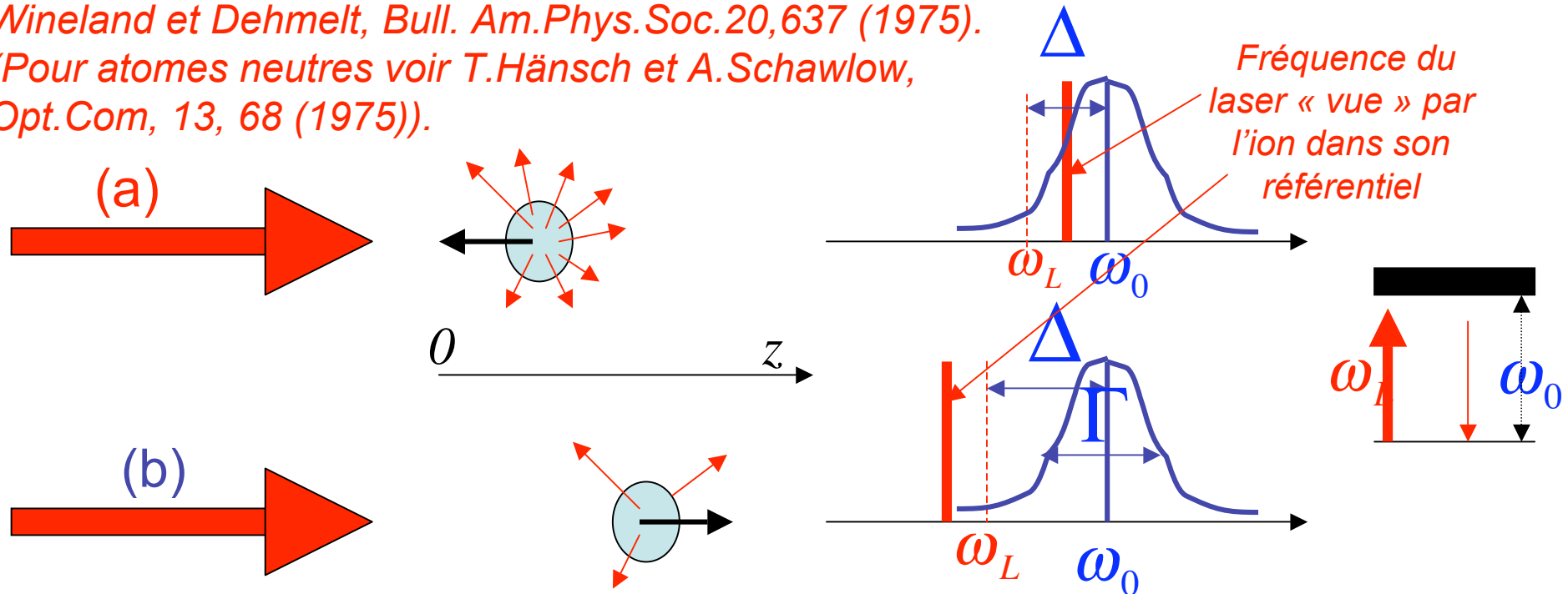
Pré-refroidissement Doppler utilisant une transition de grande largeur naturelle. Température limite de ce processus.

Refroidissement additionnel « par bande latérale rouge » utilisant une transition de faible largeur naturelle. Paramètre de Lamb-Dicke. Mesure de la température finale. Refroidissement d'un mode de vibration collectif par action sur un seul ion: refroidissement par « sympathie ».

Refroidissement Doppler d'un ion piégé

Wineland et Dehmelt, *Bull. Am.Phys.Soc.*20,637 (1975).

(Pour atomes neutres voir T.Hänsch et A.Schawlow, *Opt.Com*, 13, 68 (1975)).



Excitation par un laser orienté dans la direction de la vibration, décalé vers le rouge: $\Delta = \omega_L - \omega_0 < 0$

Au cours de l'oscillation, l'effet Doppler rapproche l'ion de résonance pour $v < 0$ (*cas a*) et l'éloigne de résonance pour $v > 0$ (*cas b*). Plus de photons sont diffusés en (a) qu'en (b). L'ion encaisse pour $v < 0$ une impulsion positive qui le freine plus qu'il n'est accéléré lorsque $v > 0$: **L'effet net est un refroidissement.**

Refroidissement Doppler: analyse quantitative

Supposons qu'un grand nombre de photons soit diffusé avant que l'ion ne bouge, ce qui implique:

$$\Gamma \gg \omega_z \quad (2-19)$$

Probabilité moyenne d'excitation de l'ion en fonction de ν :

$$P_e(\nu) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_L^2}{\Omega_L^2 + \Gamma^2 + (\Delta - k_L \nu)^2} \quad (2-20)$$

↑ Fréquence de Rabi laser
↑ Décalage Doppler

L'impulsion des photons absorbés par seconde correspond à une force moyenne agissant sur l'ion:

$$\bar{F}(\nu) = \hbar k_L \Gamma P_e(\nu) \quad (2-21)$$

Décomposition de cette force:

$$\bar{F}(\nu) = \bar{F}(0) + \bar{F}(\nu) - \bar{F}(0) \quad (2-22)$$

$\bar{F}(0)$ ne travaille pas sur une période et peut être ignorée. Le refroidissement ne dépend que de $\bar{F}(\nu) - \bar{F}(0)$, que nous calculons pour $k_L \nu < \Gamma$. Le taux d'absorption varie alors linéairement avec ν . La pression de radiation produit une force visqueuse proportionnelle à ν , optimale pour:

$$\Delta = -\Gamma ; \Omega_L = \Gamma \sqrt{2} \quad (2-23)$$

qui vaut alors:

$$f(\nu) \approx \nu \frac{d}{d\nu} F(\nu) = -\frac{\hbar k_L^2}{8} \nu \quad (2-24)$$

Limite du refroidissement Doppler

D'où les équations d'amortissement de la vitesse et de l'énergie cinétique de l'ion dans la phase finale du processus:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\hbar k_L^2}{8m} v \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{\hbar k_L^2}{4m} E \quad (2-25)$$

Le taux d'amortissement de l'énergie est:

$$\frac{1}{T_{Doppler}} = \frac{\hbar k_L^2}{4m} = \frac{1}{2\hbar} \times E_{recul} \quad (2-26)$$

Energie de recul d'un ion absorbant l'impulsion d'un photon

Pour un ion Calcium refroidi sur la transition optique $4S-4P$, on a $\Gamma = 1.5 \cdot 10^8 s^{-1}$ et la condition $\Gamma \gg \omega_z$ est satisfaite ($\omega_z = 2\pi \cdot 500 kHz$). Le temps $T_{Doppler}$ est de l'ordre de $10^{-5} s$. En quelques périodes de vibration, une grande partie de l'énergie est extraite du mouvement de l'ion. Mais la limite du processus n'est pas $E=0$. Le refroidissement Doppler entre finalement en compétition avec un mécanisme de fluctuation qui tend à échauffer l'ion et conduit à une stabilisation de son énergie.

Limite du refroidissement Doppler (suite)

Nous avons calculé la force moyenne de pression du laser. En fait cette force fluctue car le photon émis après absorption a une direction d'impulsion quelconque. Le recul additionnel qui en résulte est en moyenne 0, avec une valeur quadratique non nulle. Il s'agit d'un processus de diffusion dans l'espace de l'impulsion de l'ion. Le pas de ce processus est $\hbar k_L$ avec en moyenne $\Gamma/4$ pas par seconde. L'augmentation par unité de temps de l'énergie de l'ion liée à ce processus de fluctuation est donc:

$$\frac{dE_{fluct}}{dt} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{8m} \Gamma \quad (2-27)$$

et la variation totale de l'énergie due à la compétition entre dissipation et fluctuation s'écrit:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E}{T_{Doppler}} + \frac{\hbar^2 k_L^2}{8m} \Gamma \quad (2-28)$$

avec pour valeur stationnaire:

$$\bar{E} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{8m} \Gamma T_{Doppler} = \frac{\hbar \Gamma}{2} \quad (2-29)$$

Le nombre moyen de quanta de vibration résiduels est donc:

$$\bar{n} = \frac{\Gamma}{2\omega_z} \gg 1 \quad (2-30)$$

Refroidissement jusqu'à $T \sim 0\text{K}$: pompage sur bande latérale rouge résolue en fréquence

Le régime Doppler est caractérisé par la double inégalité:

$$E_{\text{recul}} / \hbar \ll \omega_z \ll \Gamma \quad (2 - 31)$$

L'inégalité de droite assure que beaucoup de photons sont diffusés en une période d'oscillation et celle de gauche (paramètre de Lamb - Dicke petit devant 1- voir plus loin) exprime que l'amortissement s'effectue en plusieurs oscillations. Ce régime laisse en général des dizaines de quanta de vibrations.

Pour refroidir au delà et arriver à l'état fondamental de vibration, il faut utiliser une autre transition de l'ion, de beaucoup plus petite largeur naturelle, satisfaisant les conditions:

$$E_{\text{recul}} / \hbar, \Gamma \ll \omega_z \quad (2 - 32)$$

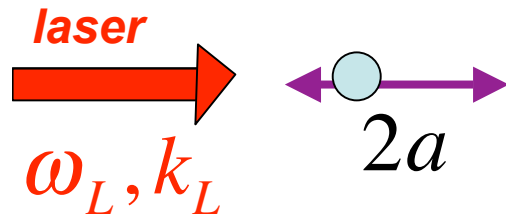
Le spectre de l'ion piégé présente alors des bandes latérales résolues et le laser est accordé sur la 1^{ère} bande latérale rouge.

Première réalisation du refroidissement par bande latérale (sur Hg^+):

F.Diedrich, J.Bergquist, W.Itano et D.Wineland (Boulder), PRL 62 403 (1989).

Interaction d'un ion oscillant avec un laser: approche semi-classique

L'ion en mouvement 'voit' un champ modulé à fréquence:

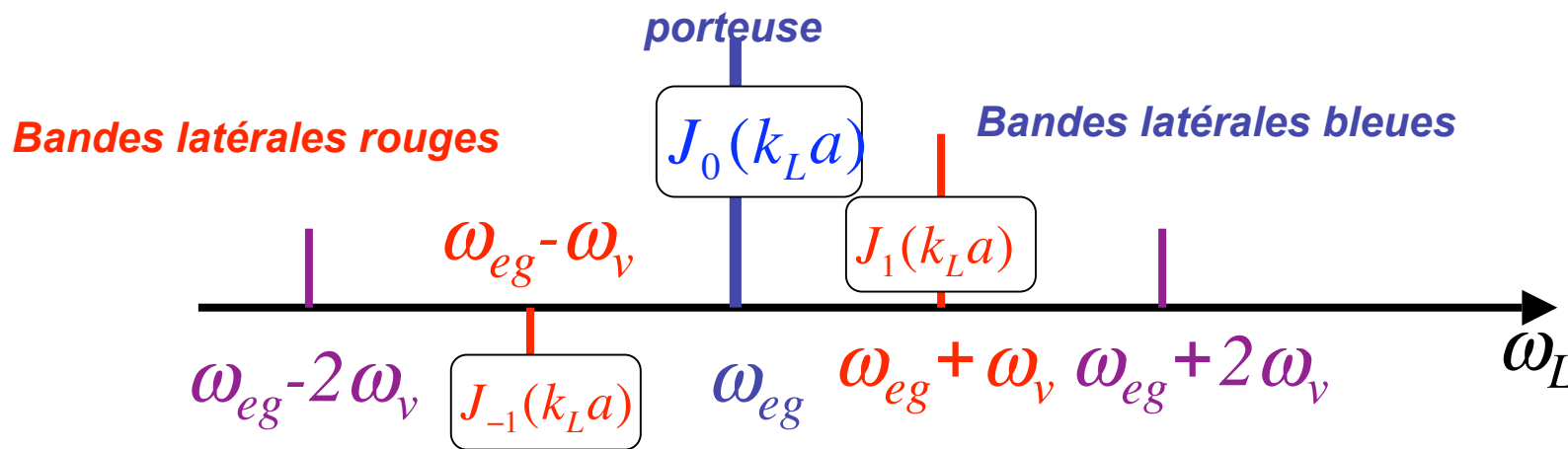


$$E_{ion}(t) = E_L \bar{\epsilon}_L \sin[\omega_L t - k_L a \sin(\omega_v t)]$$

$$= E_L \bar{\epsilon}_L \sum_q J_q(k_L a) \sin[(\omega_L - q\omega_v)t] \quad (2-33)$$

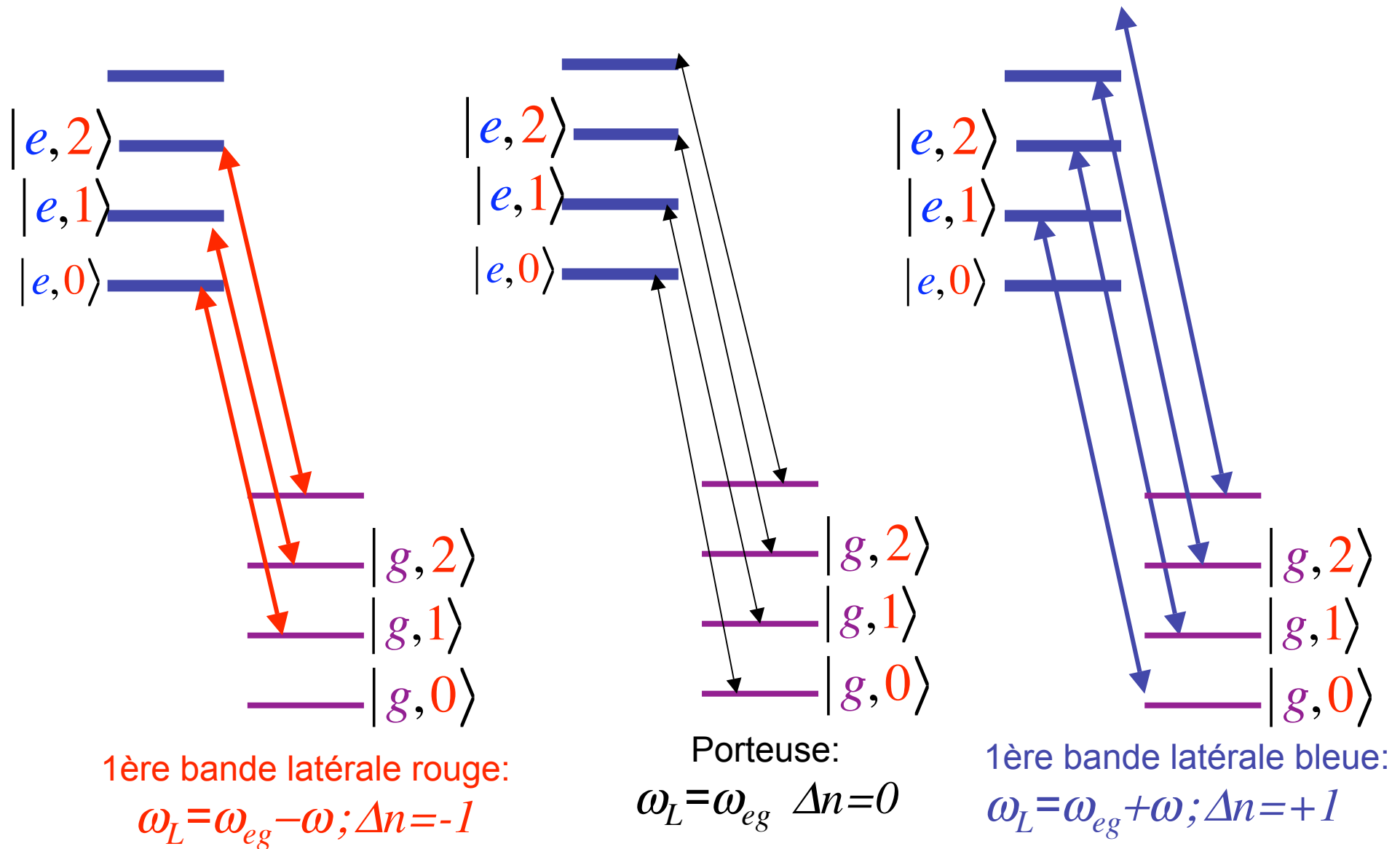
(J_q : fonctions de Bessel)

Condition de résonance: $\omega_L - q\omega_v = \omega_{eg} \rightarrow \omega_L = \omega_{eg} + q\omega_v$

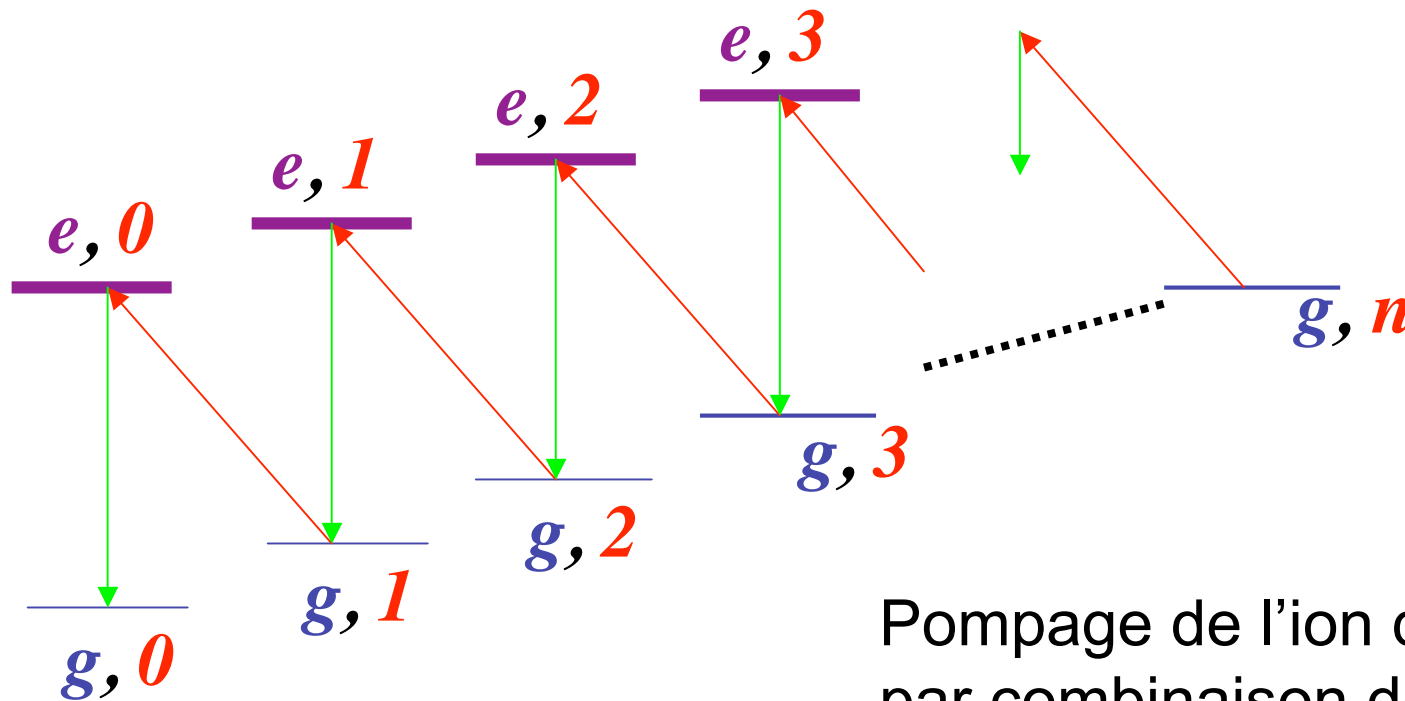


Spectre de l'ion oscillant (porteuse et bandes latérales)

Spectre résolu de l'ion interprété en terme de création/annihilation de phonons ($\Gamma < \omega_z$)



Le cycle de refroidissement sur la 1^{ère} bande latérale rouge

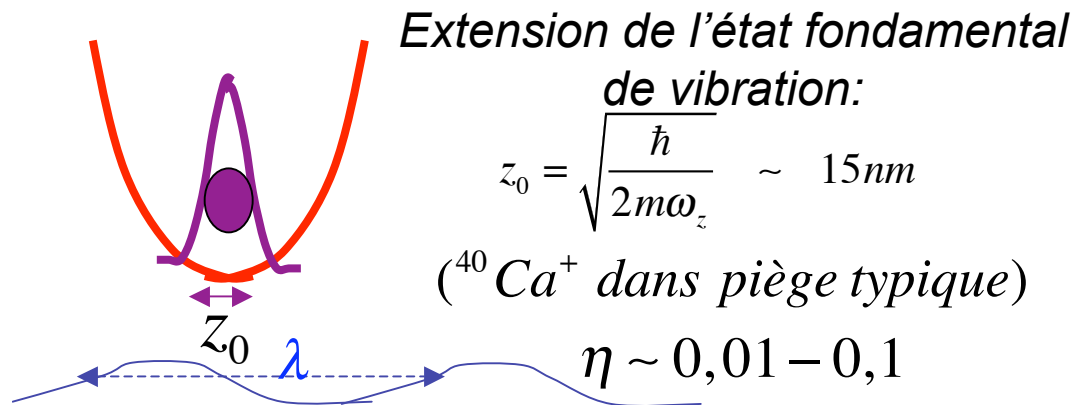


Vitesse du processus proportionnelle à Γ : ce taux ne doit être ni trop grand, ni trop petit (voir plus loin)

Pompage de l'ion dans l'état $|g, 0\rangle$ par combinaison de cycles d'absorption sur la **bande latérale**

suivie par **émission spontanée sur la bande centrale**. La règle de sélection $\Delta n = 0$ de l'émission spontanée est due à la condition de Lamb-Dicke $E_{recul} \ll \hbar\omega_z$ (voir page suivante).

Paramètre de Lamb-Dicke et émission sans recul de l'ion piégé.



Pour un processus radiatif (vecteur d'onde k , longueur d'onde λ) on définit le **paramètre de Lamb-Dicke** :

$$\eta = kz_0 = 2\pi \frac{z_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar k^2}{2m\omega_z}} \quad (2-34)$$

η est 2π fois le rapport de l'extension du paquet d'onde de l'ion à la longueur d'onde. Son carré mesure aussi l'énergie de recul en quanta de vibration. Ce paramètre est $\ll 1$ dans les situations que nous considérons. Le transfert d'impulsion le long de 0_z produit par l'émission d'un photon émis dans la direction faisant l'angle θ avec 0_z est décrit par l'opérateur $T = \exp(ikZ\cos\theta) = \exp[i\eta\cos\theta(a + a^\dagger)]$. La probabilité que l'ion dans l'état $|n\rangle$ émette sans recul est:

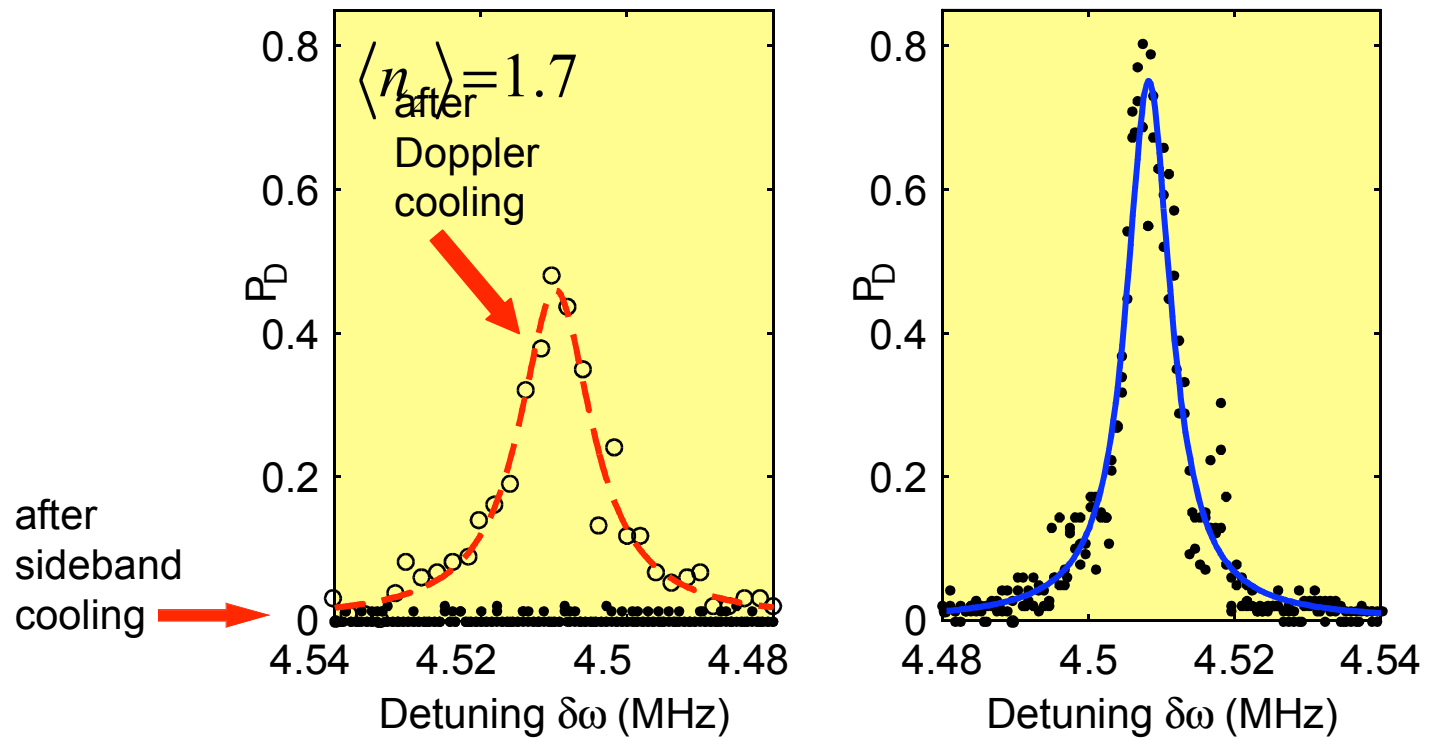
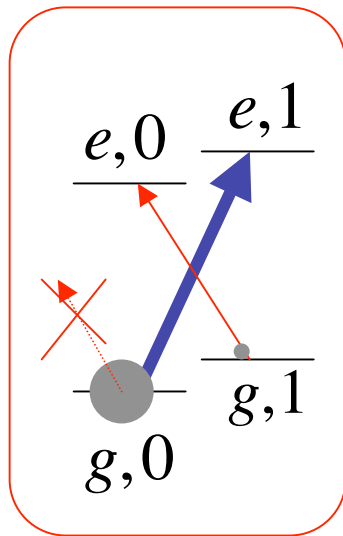
$$P_{\text{sans recul}} = \left| \langle n | e^{i\eta\cos\theta(a+a^\dagger)} | n \rangle \right|^2 \approx 1 - (2n+1)\eta^2 \cos^2\theta + \dots \quad (2-35)$$

Quand l'oscillateur est peu excité, l'émission de l'ion piégé s'effectue surtout sur la bande centrale. C'est l'ensemble du piège qui recule (effet Mossbauer).

Efficacité du refroidissement testée en comparant les bandes latérales rouge et bleue

Spectre d'absorption après Doppler et « side band cooling »

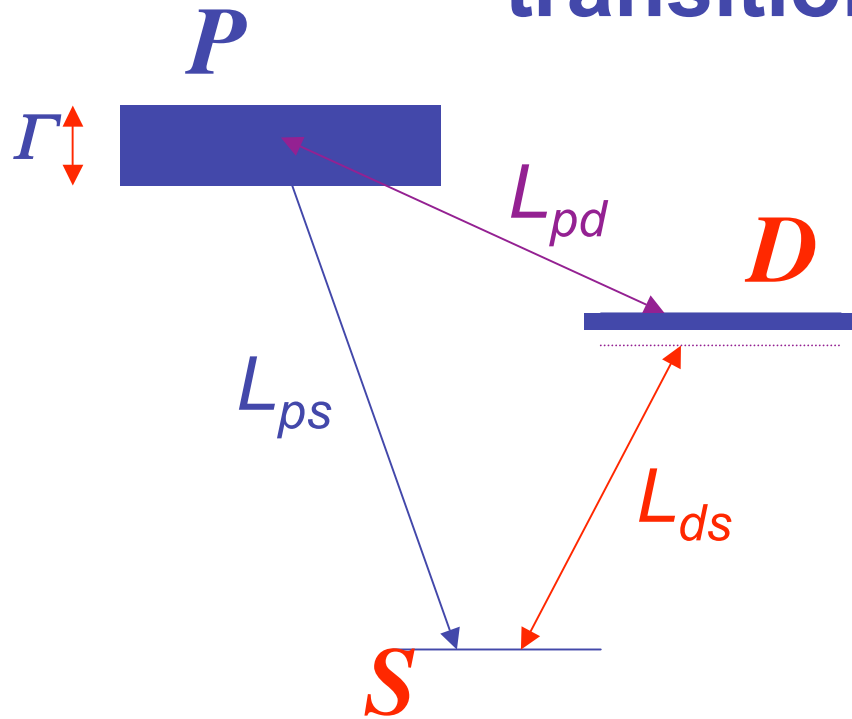
99.9 % ground state population



*Le rapport des deux pics
donne $\langle n \rangle$, donc T*

Ch. Roos et al., Phys. Rev. Lett. 83, 4713 (1999)

Les refroidissements par effet Doppler et par pompage sur bande latérale impliquent des transitions différentes



Le refroidissement Doppler a lieu sur la *transition S-P* vers le niveau de grande largeur naturelle Γ . Le pompage sur la *bande latérale rouge S-D* excite le niveau métastable D . Pour rendre ce pompage efficace, on élargit le niveau D en y ramenant une partie de la largeur Γ du

niveau P . On utilise un laser résonnant sur la *transition D-P*. La largeur Γ_d induite par ce laser est:

$$\Gamma_d = \frac{\Omega_{pd}^2}{\Gamma} = \Gamma \left(\frac{\Omega_{pd}}{\Gamma} \right)^2 \ll \Gamma \quad (\Omega_{pd}: \text{fréquence de Rabi de } L_{pd})$$

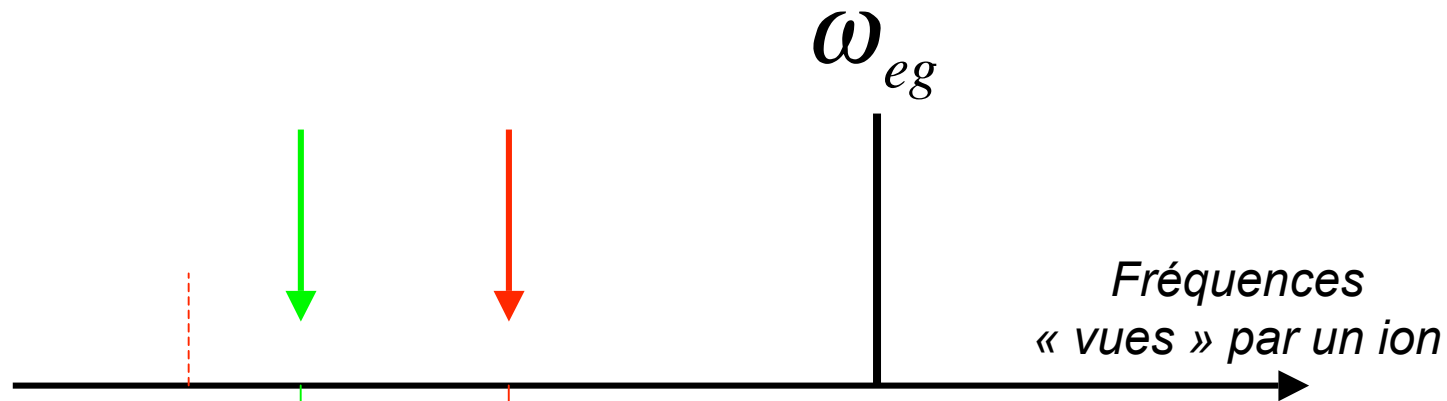
Refroidir une chaîne d'ions piégés

Nous avons décrit jusqu'ici le refroidissement d'un seul ion. Comment étendre le procédé à un ensemble de particules?

Le refroidissement Doppler s'effectue collectivement sur un ensemble d'ions dans le piège (comme pour un ensemble d'atomes neutres). L'interaction avec le laser, qui implique des cycles de pompage avec temps caractéristiques courts devant les périodes d'oscillation des ions ralentit les ions indépendamment et extrait des phonons appartenant à l'ensemble des modes de vibration.

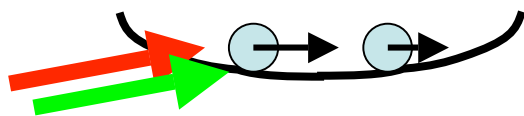
Le refroidissement par bande latérale est, lui, sélectif vis à vis des modes de vibration. Il faut refroidir chaque mode avec un laser de fréquence appropriée. Il suffit par contre de se coupler à un seul ion de la chaîne dont l'excitation permet d'extraire des phonons des modes de vibration collectifs du système (les ions sont couplés par l'interaction de Coulomb et le refroidissement d'un ion affecte les autres par effet 'sympathique')

Refroidissement d'un mode collectif en n'irradiant qu'un ion de la chaîne: analyse semi - classique dans le cas N=2



$$\omega_{eg} - \omega_z \sqrt{3}$$

$$\omega_{eg} - \omega_z$$



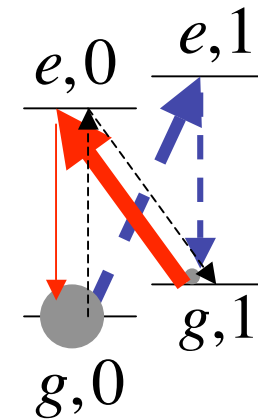
Le mouvement de chaque ion présente deux composantes de Fourier à ω_z et $\omega_z \sqrt{3}$. Le laser vu par l'ion présente des bandes latérales associées aux harmoniques de ces fréquences. En accordant le laser sur la première bande rouge correspondant aux mode du centre de masse ($\omega_{eg} - \omega_z$) ou au mode accordéon ($\omega_{eg} - \omega_z \sqrt{3}$), on refroidit indépendamment ces modes. Même si l'autre ion n'est pas directement irradié, il se ralentit aussi. La méthode se généralise à N ions: N lasers éclairant l'un quelconque des ions extraient tous les phonons (il faut bien sûr que l'ion irradié soit affecté par la vibration de tous les modes).

Limite du pompage par bande latérale

Le «*side band cooling*» n'est pas limité par les fluctuations de l'émission spontanée. L'ion tend vers l'état ($|g,0\rangle$), état «noir» (trapping state) du pompage optique qui ne peut plus absorber ni réémettre de lumière. Cet état, découplé du rayonnement, n'est pas sensible aux effets de fluctuation-dissipation du *Doppler cooling*. La limitation provient ici de la séparation imparfaite des bandes latérales du spectre. L'ion a une petite probabilité d'absorber sur la raie $\Delta n=0$ et de réémettre un photon spontané sur la transition $\Delta n=+1$, ou, surtout, d'absorber directement sur la raie bleue $\Delta n=+1$. Le recouvrement des bandes induit un nombre de phonons résiduel:

$$\langle n \rangle_r \sim \left(\frac{\Gamma_d}{\omega_z} \right)^2 \quad (2-36)$$

Pour réduire $\langle n \rangle_r$, il faut diminuer Γ_d , donc allonger la durée du processus, proportionnelle à $1/\Gamma_d$. La température finale peut être très basse ($\Gamma_d^{(spon)} \sim 1\text{s}^{-1}$) à condition d'y mettre le temps (la limite ultime dépend du taux de collisions).



Les transitions $\Delta n = -1$ (traits pleins) sont en compétition avec celles qui créent un phonon (traits pointillés)

Conclusion et références

Une configuration de champ électrique oscillant réalise un piège de Paul dans lequel un ou plusieurs ions peuvent osciller suivant des modes bien définis. Le couplage avec des lasers peut refroidir les degrés de vibration du système et le porter dans son état fondamental de mouvement. Il faut combiner un «pré-cooling» Doppler sur une transition de grande largeur spectrale avec un pompage en bande latérale résolue, sur une transition de faible largeur. On peut atteindre des températures correspondant à des nombres moyens résiduels de phonons très faibles ($\ll 1$). Nous avons discuté les méthodes employées pour Ca (Innsbruck). Nous verrons (leçon 3) le cas de Be (Boulder) et étudierons d'autres méthodes de «cooling» basées sur des principes différents. Pour la description des pièges voir: *Ion Traps par P.K.Ghosh, Oxford U.Press (1995)*. Pour une revue des méthodes de cooling et un ensemble complet de références, voir: *Laser cooling of trapped ions, par J.Eschner, G.Morigi, F.Schmidt-Kaler et R.Blatt, J.Opt.Soc.Am.B.Vol.20.N°5, 1003 (2003)*.