

# **3.**

## **Les outils de la physique des ions (II)**

13 Février 2006

### **3A. Autres méthodes de refroidissement**

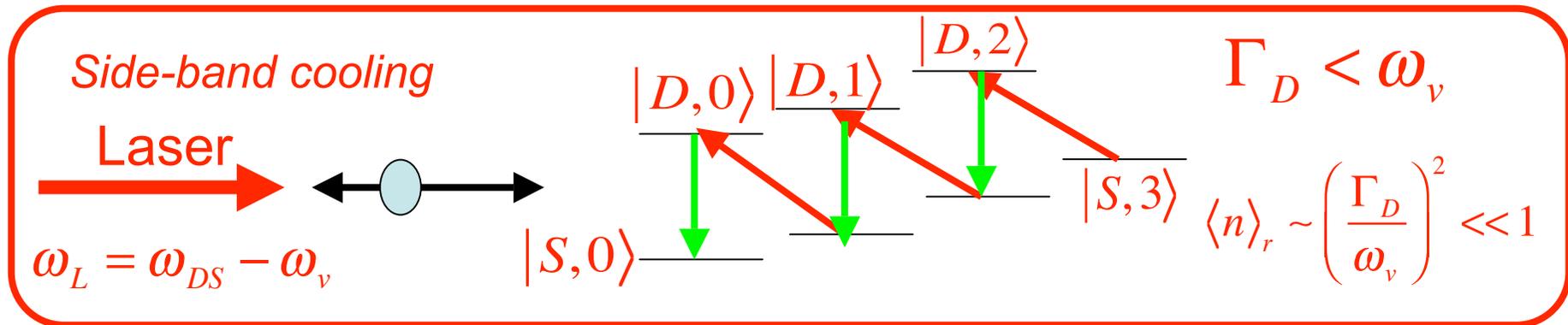
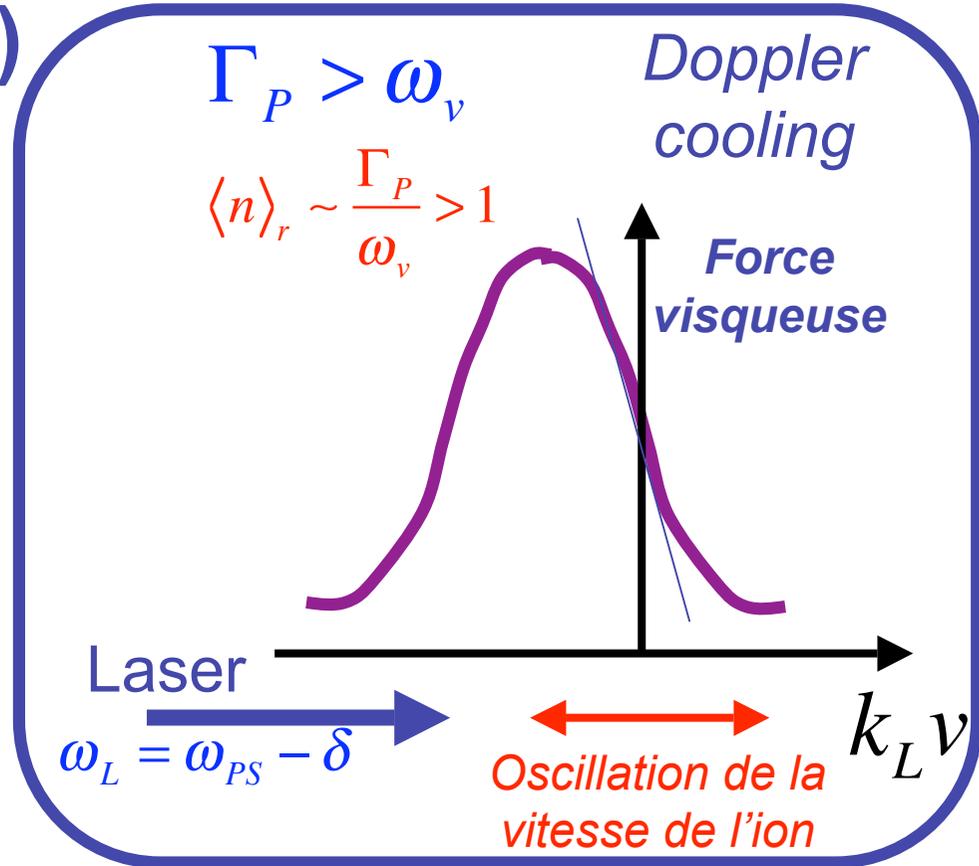
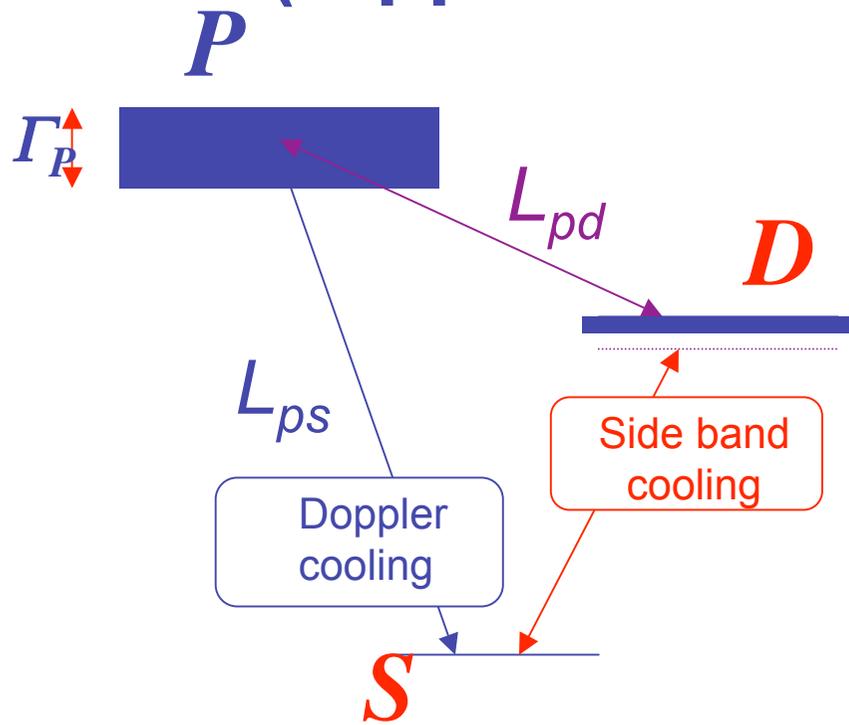
### **3B. Manipulation des qubits et du mode de vibration**

## 3A.

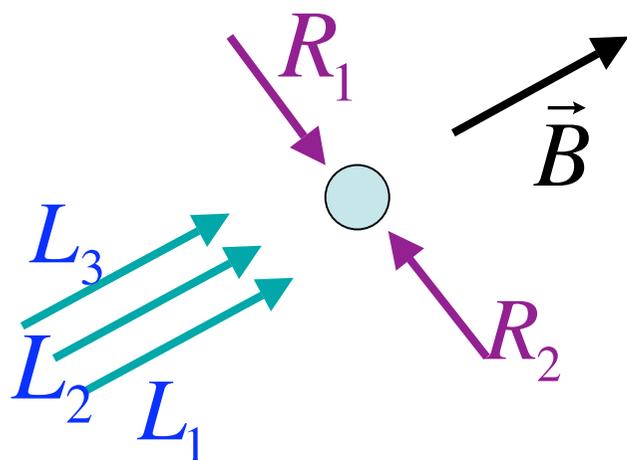
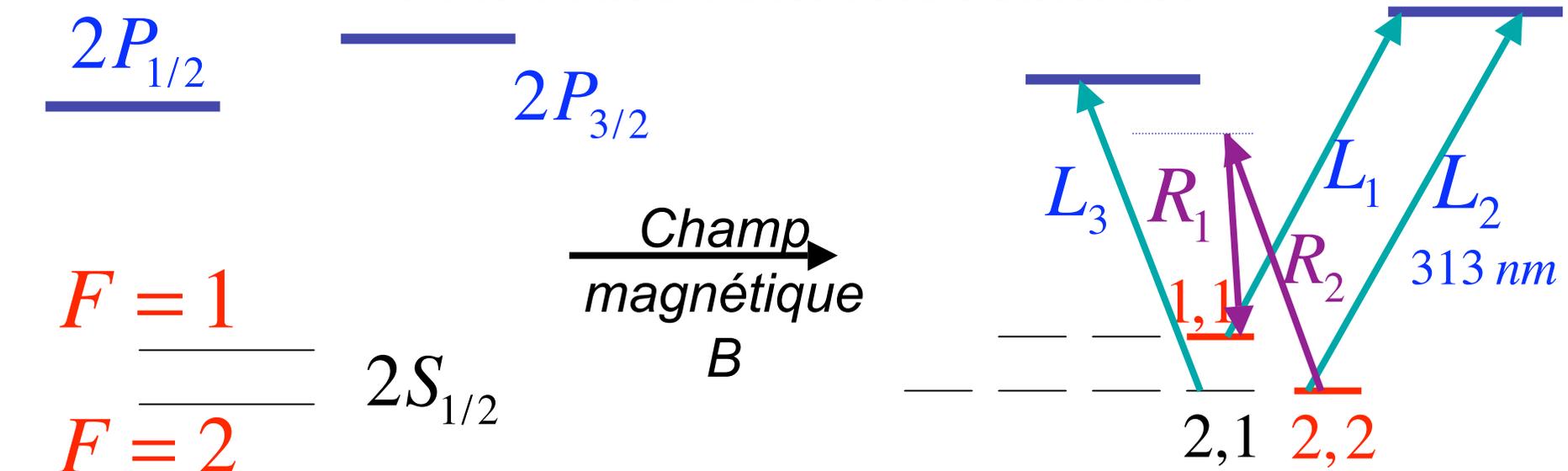
### Autres méthodes de refroidissement

Refroidissement par bande latérale Raman adapté au  $Be^+$  (groupe de Boulder). Refroidissement par acquisition d'information (méthode stochastique). Revue rapide d'autres méthodes.

# Refroidissements Doppler et bande latérale (rappel sur $Ca^{+}$ )

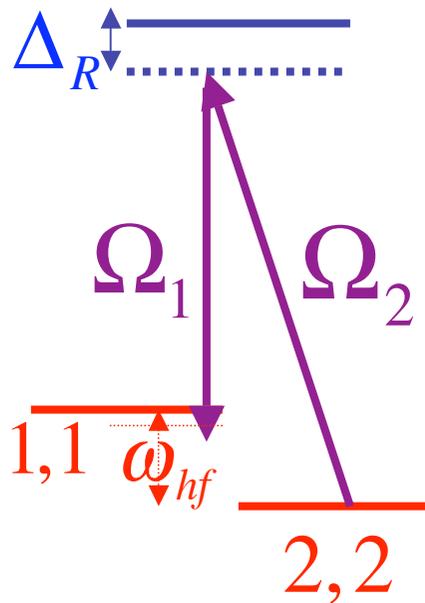


# Autre configuration ionique ( ${}^9\text{Be}^+$ ): refroidissement Raman



Les états qubit sont 2 états Zeeman hyperfins  $1,1$  et  $2,2$  du niveau fondamental (séparation  $1.25\text{ GHz}$ ), préparés par pompage optique dans un champ  $B$ . Les lasers quasi résonnants  $L_1, L_2$  et  $L_3$  sur les transitions optiques vers les états excités  $P_{1/2}$  et  $P_{3/2}$  servent au pompage optique, au pré-cooling Doppler et à la détection de l'ion. Les deux lasers  $R_1$  et  $R_2$  réalisent une excitation Raman pour refroidissement sur bande latérale.

# Principe du refroidissement par bande latérale Raman



*couplage effectif* :  $\Omega_R = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta_R}$

*fréquence "vue" par l'ion* :  $\omega_L = \omega_2 - \omega_1$

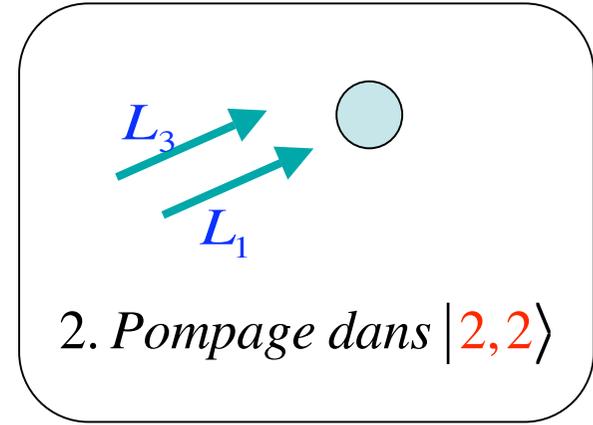
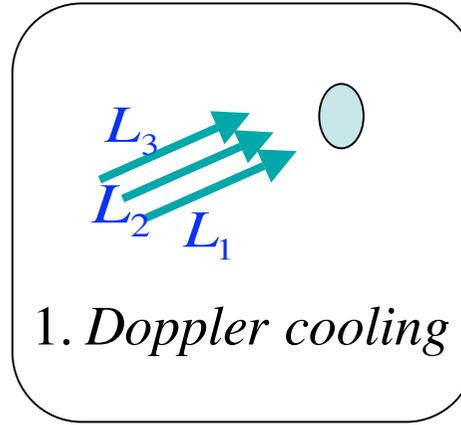
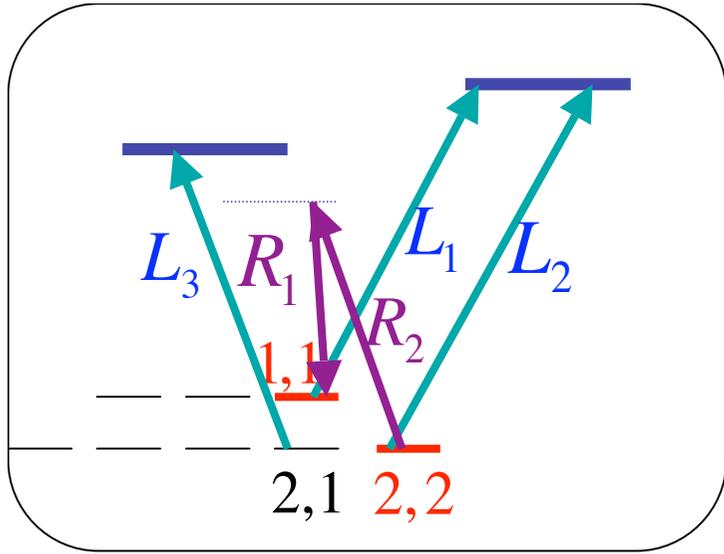
*porteuse* :  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{hf}$

*1<sup>ère</sup> bande rouge* :  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{hf} - \omega_v$

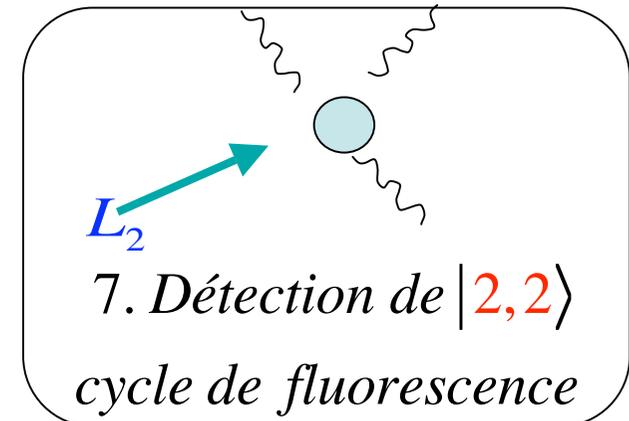
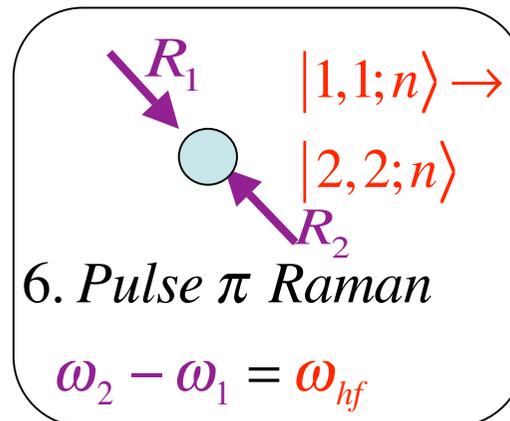
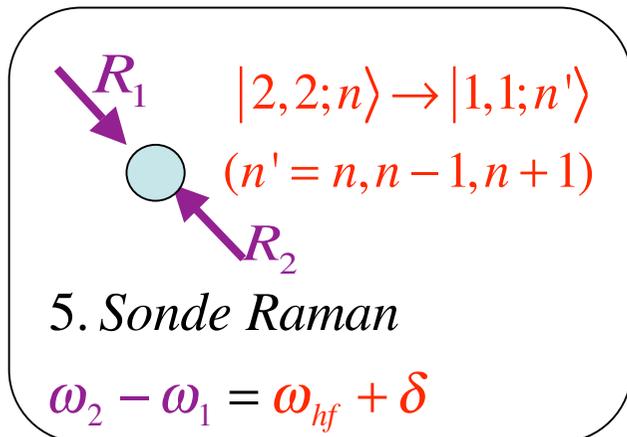
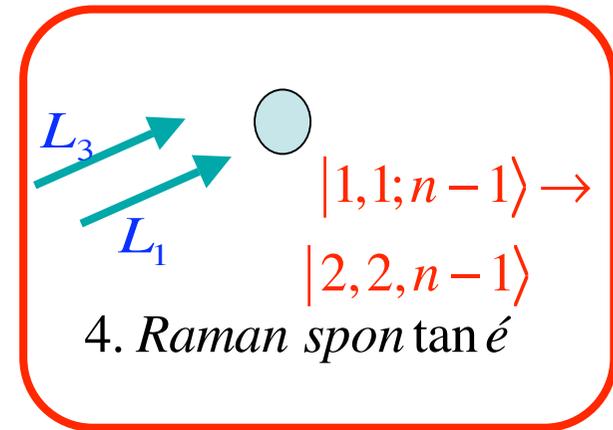
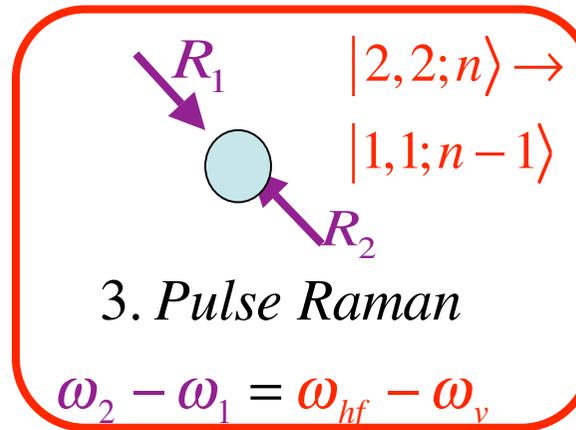
*1<sup>ère</sup> bande bleue* :  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{hf} + \omega_v$

L'ensemble des deux lasers Raman équivaut à un laser unique de fréquence  $\omega_2 - \omega_1$  excitant *la transition*  $|1,1\rangle \rightarrow |2,2\rangle$  *du qubit*. La mise à résonance sur la première bande rouge ( $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{hf} - \omega_v$ ) réalise la transition  $|2,2; n\rangle \rightarrow |1,1; n-1\rangle$  et supprime un phonon. On réalise ensuite à l'aide des lasers  $L$  un cycle Raman spontané qui recycle l'atome dans  $|2,2; n-1\rangle$  et on recommence la procédure.

# Procédure expérimentale

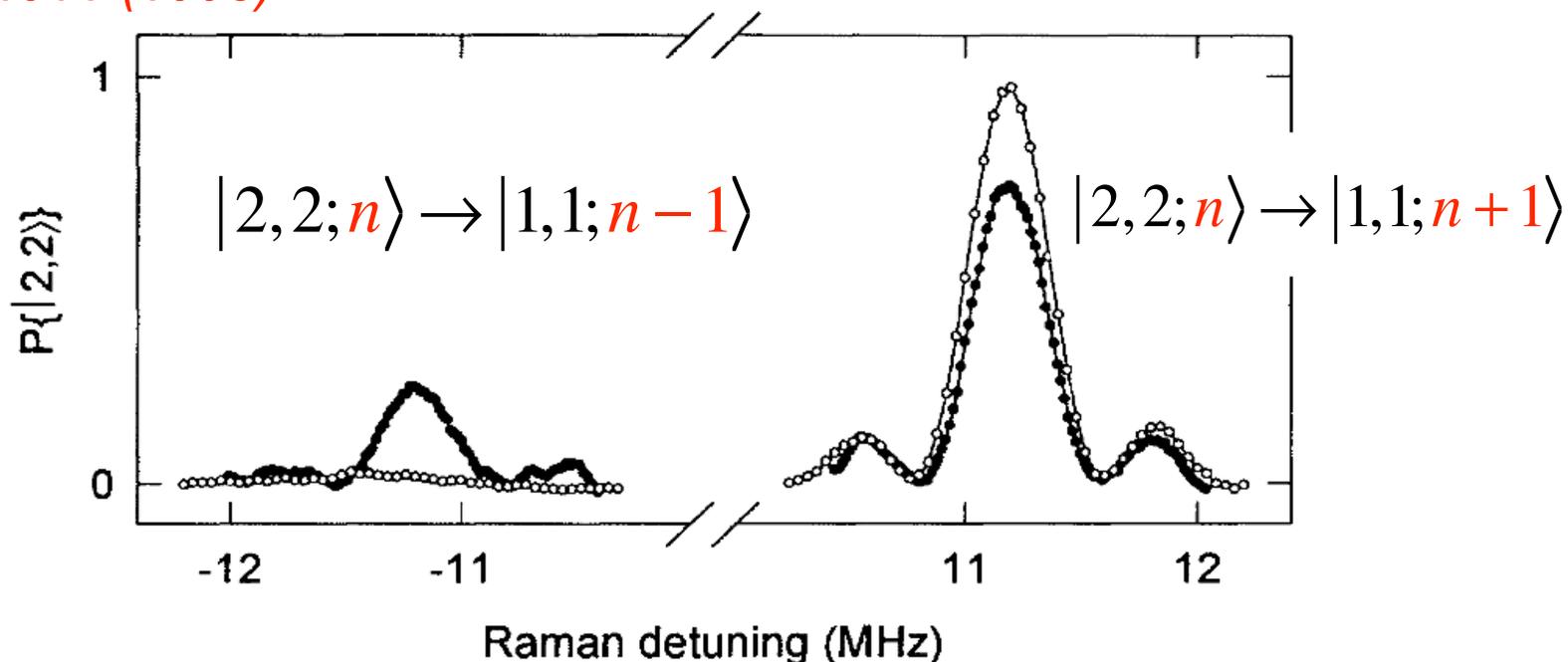


Les étapes de refroidissement 3 et 4 sont répétées plusieurs fois



# Résultats expérimentaux

C.Monroe, D.Meekhof, B.King, S.Jefferts, W.Itano, D.Wineland et P.Gould,  
PRL, 75, 4011 (1995)

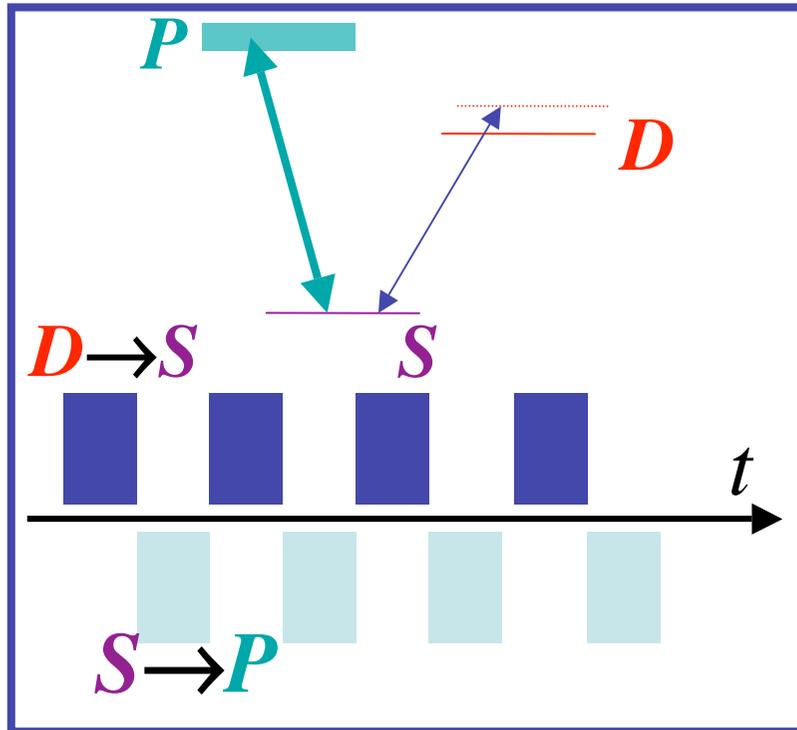


Spectre des **premières bande latérale rouge** et **bleue** après Doppler cooling (points noirs) et side band cooling (points blancs). La disparition de la bande rouge (et l'augmentation corollaire de la bande bleue) indique un nombre moyen résiduel de phonons  $\langle n \rangle_r \sim 0,014$ . Noter que la fréquence de vibration de l'ion (11.2 Mhz) est beaucoup plus grande que dans le cas de  $Ca^+$  ( $\sim 1\text{MHz}$ ). Le piège  $Be^+$  de Boulder est plus confinant que le piège  $Ca^+$  d'Innsbruck. Nous en verrons des conséquences plus loin.

# Sélection d'un ion dans l'état fondamental de vibration par acquisition d'information (méthode «stochastique»)

Les méthodes de refroidissement décrites jusqu'à présent correspondent à un échange d'énergie entre l'ion et la lumière. Il existe un moyen très différent de modifier l'état de l'ion, basé non pas sur une interaction directe qui dissipe l'énergie du mouvement, mais sur une acquisition progressive d'information sur l'état de la vibration. Nous avons vu dans les leçons précédentes qu'en observant un atome qui ne rayonne pas (*mesure « négative »*) on constate que sa fonction d'onde change continûment et évolue vers l'état fondamental. De la même façon l'observation d'un ion soumis à une séquence appropriée d'impulsions laser qui ne donnent lieu à aucune fluorescence augmente la probabilité que l'ion soit dans son état fondamental de vibration. L'idée de cette méthode a été proposée par *J.Eschner, B.Appasamy et P.Toschek, PRL, 74, 2435 (1995).*

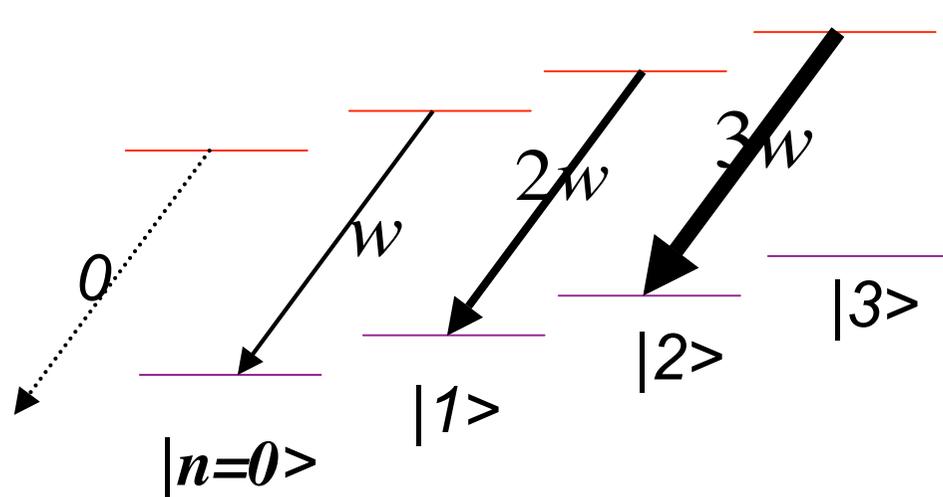
# Refroidir un ion en l'observant ou exploiter l'information pour préparer un ion immobile



Ion à 3 niveaux. Etat  $S$  stable et  $D$  métastable. L'ion est initialement préparé dans  $D$ . Il est irradié sur la 1<sup>ère</sup> bande bleue à un phonon de la transition  $S-D$ , puis le niveau  $S$  est sondé par un laser résonnant sur la transition  $S-P$  induisant des cycles d'absorption et fluorescence. La séquence est répétée.

L'ion a une probabilité  $\Pi_0(0)$  d'avoir  $0$  phonon. Si c'est le cas, la raie bleue ne peut être excitée à partir de  $|D,0\rangle$  (pas d'état final «  $|S,-1\rangle$  »), l'état  $S$  n'est jamais peuplé et *on n'observe pas de fluorescence*. Montrons qu'inversement, l'absence de fluorescence pendant quelques cycles **permet d'inférer que l'ion est dans son état fondamental de vibration**.

# Modification induite par la mesure de la probabilité du nombre de phonons



**D** On suppose que l'irradiation  $S$ - $D$  s'effectue «en raie large». La probabilité de transition par unité de temps  $n w$  est proportionnelle au nombre de phonons dans l'état initial (carré de l'élément de matrice d'annihilation de phonon).

**S**

L'ion est à  $t=0$  dans  $D$  avec une distribution  $\Pi_0(n)$  du nombre de phonons. On effectue une première séquence « excitation bande bleue » suivie de la détection de  $S$  et on n'observe pas de fluorescence. Quelle est la nouvelle probabilité d'avoir  $n$  phonons après cette *observation négative* qui indique que l'ion est resté dans  $D$ ? Nous appelons cette probabilité  $P(n | D)$  (probabilité d'avoir  $n$  phonons *conditionnée au fait d'avoir trouvé l'ion dans  $D$* ). La probabilité conditionnelle réciproque (probabilité que l'ion reste en  $D$  conditionnée à la présence de  $n$  phonons) est simplement  $P(D | n) = 1 - n w \tau$  où  $\tau$  est la durée de la séquence d'irradiation  $S$ - $D$ . Les probabilités réciproques  $P(n | D)$  et  $P(D | n)$  sont simplement reliées par *la loi de Bayes*.

# Acquisition progressive d'information sur le nombre de phonons (loi de Bayes)

Notons  $P(a, b)$  la probabilité jointe pour que deux résultats  $a$  et  $b$  soient obtenus et  $P(a | b)$  la probabilité pour que  $a$  soit mesuré **conditionné au résultat  $b$** . Un simple argument de probabilité classique conduit aux égalités suivantes, appliquées directement au problème qui nous intéresse ici:

$$P(D, n) = P(D | n) \Pi_0(n) = P(n | D) P(D) \quad \langle n \rangle_0 = \text{nombre moyen}$$

$$P(D) = \sum_n P(D, n) = \sum_n P(D | n) \Pi_0(n) \quad \text{initial de phonons}$$

$$\rightarrow P(n | D) = \frac{P(D | n) \Pi_0(n)}{\sum_n P(D | n) \Pi_0(n)} = \frac{1 - nw\tau}{1 - w \langle n \rangle_0 \tau} \Pi_0(n) \quad (3-1)$$

La probabilité  $\Pi_0(n)$  est multipliée par une fonction linéaire décroissante de  $n$  (avec un dénominateur qui assure la normalisation): le nombre de phonons diminue!

## Distribution de phonons inférée après $q$ cycles sans fluorescence

$$\Pi_q(n) = \frac{(1 - n w \tau)^q}{\prod_{k=0}^{q-1} (1 - w \langle n \rangle_k \tau)} \Pi_0(n) \rightarrow \delta_{n,0} \quad (3-2)$$

$\langle n \rangle_k$  : nombre moyen de phonons après la séquence  $k$

Les nombres de phonons différents de zéro sont progressivement décimés et rapidement on trouve l'ion dans l'état fondamental de vibration. Attention, il ne s'agit pas d'un processus d'extraction d'énergie du système, mais d'acquisition d'information liée à la mesure: plus longtemps on attend sans observer de fluorescence, plus sûr on est que l'ion est dans l'état fondamental de vibration.

*On sélectionne en fait par la mesure un état existant dans l'opérateur densité initial.* La probabilité de réussir cette observation (et donc de filtrer l'état qui nous intéresse) est  $\Pi_0(0)$ . Nous avons rencontré des processus de mesure analogues dans les cours antérieurs.

*Démonstration faite sur un ion  $Ba^+$  (B.Appasamy, Y.Stalgies and P.Toschek, PRL 80, 2805 (1998)). Analogie avec le problème du démon de Maxwell.*

# Autres méthodes de refroidissement testées sur des ions piégés

1. **Refroidissement par transparence électromagnétique induite (EIT):** l'ion est refroidi par deux lasers, dont l'un est intense, sur une transition Raman couplant un état fondamental à un état métastable. Les phonons sont absorbés par excitation de la 1ère bande latérale rouge et les fréquences des lasers sont réglées pour que l'un des processus qui tend à chauffer l'ion (absorption résiduelle sur la porteuse) soit totalement supprimé par effet d'interférence (transparence induite ou EIT). *Méthode proposée par G.Morigi, J.Eschner et C.Keitel, PRL, 85, 4458 (2000) et démontrée par C.Roos, D.Leibfried, A.Mundt, F.Schmidt-Kaler, J.Eschner et R.Blatt, PRL, 85, 5547 (2000)*

2. **Méthodes inspirées par le refroidissement laser des atomes neutres:** refroidissement Sisyphe, cooling par «états noirs» (s'appliquent à des systèmes multi-niveaux). Pour une revue complète et références voir *J.Eschner et al, J.Opt.Soc.Am.B, 20, 1003 (2003)*. Quelques démonstrations de ces méthodes exotiques ont été faites sur des ions, mais la procédure générale pour refroidir les ions en information quantique reste le « side-band cooling » précédé du «Doppler cooling».

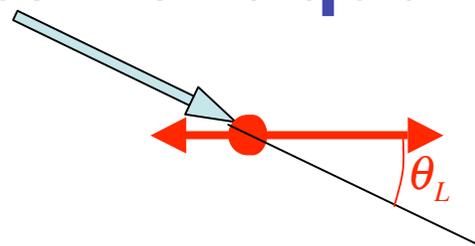
## 3B.

### Manipulation des qubits et du mode de vibration

Hamiltonien d'interaction avec un laser. Traitement quantique. Développement en puissance du paramètre de Lamb-Dicke  $\eta$ . Interaction avec la porteuse et opérations à un qubit. Couplage sur les premières bandes latérales et analogie avec CQED. Oscillation de Rabi du qubit. Opérations d'intrication entre états qubit et mode de vibration. Copie du qubit sur le mode. Intrication de deux qubits induite par couplage transitoire à la vibration. Application à la génération et à l'étude d'états de Bell. Violation des inégalités de Bell avec deux ions. Intrication entre états internes et états de vibration par la porteuse aux temps longs.

# Le couplage ion laser: traitement quantique

On ne considère d'abord qu'un seul ion. Si le laser irradie un ion d'une chaîne, le traitement est analogue (voir plus loin)



En ne considérant qu'un mode de vibration, le terme d'interaction ion-laser s'écrit (voir cours précédents):

$$H_{laser}(t) = -\frac{\hbar\Omega_L}{2} \sigma_+ e^{ik \cos \theta_L Z} e^{-i(\omega_L t + \varphi)} + hc \quad (3-3)$$

Fréquence de Rabi proportionnelle à l'amplitude laser et à l'élément de matrice de la transition e-g (réel par choix de phase)

Opérateur de transition électronique:  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$

Opérateur du CM décrivant la dépendance spatiale du champ (longueur d'onde  $\lambda=2\pi/k$ ). Assure la conservation de l'impulsion le long de Oz dans l'absorption ou l'émission de photons.

Oscillation dépendant de la fréquence et phase  $\varphi$  du laser

# Le paramètre de Lamb-Dicke (rappel)

Le terme dépendant de  $Z$  se développe sur les opérateurs d'annihilation et de création de quanta de vibration  $a$  et  $a^\dagger$  grâce au théorème de Glauber (cours 2001-2002):

$$e^{ik \cos \theta_L Z} = e^{i\eta \cos \theta_L (a+a^\dagger)} = e^{-(\eta^2 \cos^2 \theta_L)/2} e^{i\eta \cos \theta_L a^\dagger} e^{i\eta \cos \theta_L a} \quad (3-4)$$

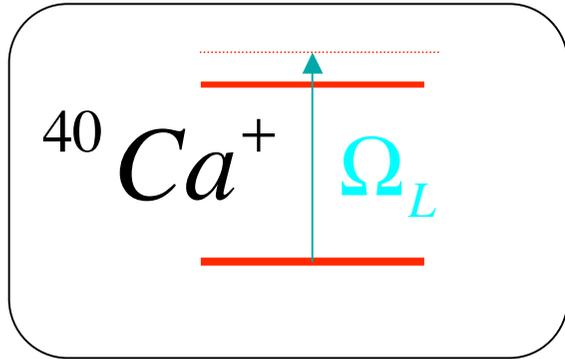
On introduit le paramètre Lamb-Dicke, en général petit devant 1:

$$\eta = \sqrt{\frac{\hbar k^2}{2M\omega}} = \left[ \frac{E_{\text{Recul de l'ion}}}{E_{\text{quantum vibration}}} \right]^{1/2} \sim 2\pi \frac{\Delta Z_{\text{état } n=0}}{\lambda} \quad (3-5)$$

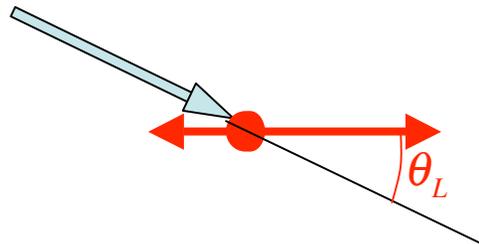
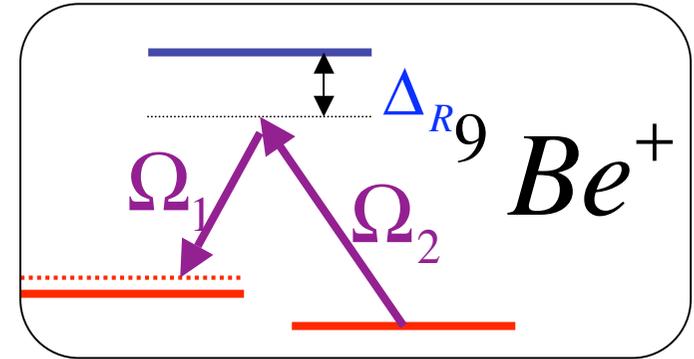
L'élément de matrice d'excitation sur la bande d'ordre  $q$  est en  $\eta^q$ . Il faut donc des grandes puissances de laser pour exciter ces bandes. L'émission spontanée se fait en général sans émission/absorption de phonons ( $\Delta n=0$ ; voir leçon 2). Analogie avec l'effet Mössbauer.

Dans le cas où on irradie un ion d'une chaîne (mode de vibration CM), la coordonnée  $z_i$  de l'ion a une oscillation identique à  $Z$ , mais la fluctuation de point zéro est réduite par le facteur  $\sqrt{N}$  (masse oscillante  $NM$ ). Le facteur de Lamb-Dicke devient  $\eta/\sqrt{N}$ . *A ce changement près, le couplage d'un ion d'une chaîne ou d'un ion isolé à la vibration sont identiques.*

# Généralisation aux transitions Raman



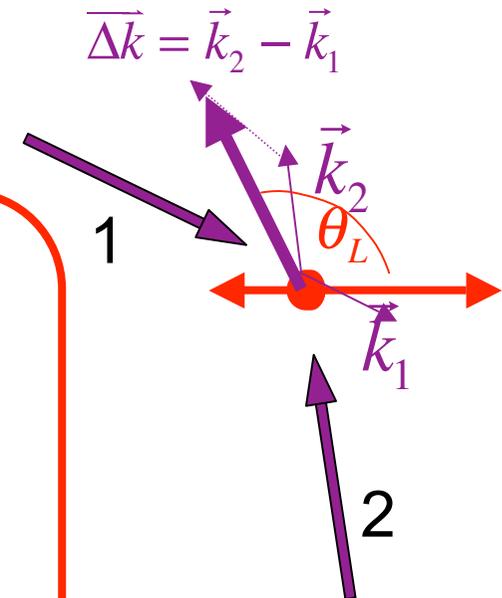
$$\begin{aligned} \Omega_L &\rightarrow \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Delta_R} \\ \omega_L &\rightarrow \omega_2 - \omega_1 \\ \vec{k} &\rightarrow \vec{\Delta k} \end{aligned}$$



lasers Raman parallèles

$$\eta \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar \Delta k^2}{2M\omega_v}} = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{\frac{2\hbar k^2}{M\omega_v}} \end{cases}$$

lasers Raman opposés



# Développement (au 1<sup>er</sup> ordre) de l'interaction en puissance du paramètre de Lamb-Dicke

$$e^{ik \cos \theta_L Z} = 1 + ikZ \cos \theta_L + \dots = 1 + i\eta \cos \theta_L (a + a^\dagger) + \dots (3-6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{laser}(t) = & -\frac{\hbar \Omega_L}{2} \sigma_+ e^{-i\varphi} e^{i(\omega_{eg} - \omega_L)t} \\ & - i \frac{\hbar \Omega_L \eta \cos \theta_L}{2} \left( a \sigma_+ e^{i[(\omega_{eg} - \omega_v - \omega_L)t - \varphi]} + a^\dagger \sigma_+ e^{i[(\omega_{eg} + \omega_v - \omega_L)t - \varphi]} \right) + hc \quad (3-7) \end{aligned}$$

D'où les trois termes résonnants sur la porteuse et les deux premières bandes latérales:

$$\tilde{H}_{Laser}^{porteuse}(t) \approx -\frac{\hbar \Omega_L}{2} \left( \sigma_+ e^{-i\varphi} e^{i(\omega_{eg} - \omega_L)t} + \sigma_- e^{i\varphi} e^{-i(\omega_{eg} - \omega_L)t} \right)$$

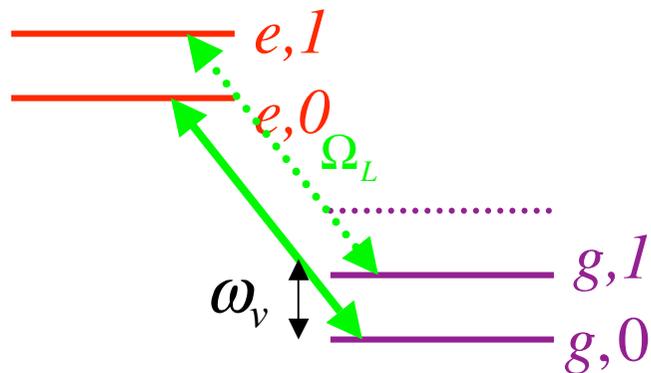
$$\tilde{H}_{Laser}^{1 \text{ bande rouge}}(t) \approx -i \frac{\hbar \Omega_L \eta \cos \theta_L}{2} \left( a \sigma_+ e^{-i\varphi} e^{i(\omega_{eg} - \omega_v - \omega_L)t} - a^\dagger \sigma_- e^{i\varphi} e^{-i(\omega_{eg} - \omega_v - \omega_L)t} \right)$$

$$\tilde{H}_{Laser}^{1 \text{ bande bleue}}(t) \approx -i \frac{\hbar \Omega_L \eta \cos \theta_L}{2} \left( a^\dagger \sigma_+ e^{-i\varphi} e^{i(\omega_{eg} + \omega_v - \omega_L)t} - a \sigma_- e^{i\varphi} e^{-i(\omega_{eg} + \omega_v - \omega_L)t} \right) \quad (3-8,9,10)$$

# Transitions sur la porteuse (bande centrale): portes à un qubit n'affectant pas la vibration

$$\omega_L = \omega_{eg}$$

$$|e, n\rangle \longleftrightarrow |g, n\rangle$$



Une impulsion porteuse ne change pas le nombre de phonons. A la limite  $\eta$  petit, les phonons sont simplement « spectateurs » et l'interaction avec le laser permet de manipuler le qubit irradié sans toucher la vibration (**porte à un qubit**). Voir plus loin le cas où  $\Omega_L \eta^2 t \sim 1$ .

$$|e\rangle \xrightarrow[\omega_L = \omega_{eg}]{\text{pulse } \Omega_L t = \pi/2, \varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + e^{i\varphi} |g\rangle);$$

$$|g\rangle \xrightarrow[\omega_L = \omega_{eg}]{\text{pulse } \Omega_L t = \pi/2, \varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (-e^{-i\varphi} |e\rangle + |g\rangle) \quad (3-11)$$

**Impulsion  $\pi/2$  crée superpositions de  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  à poids égaux**

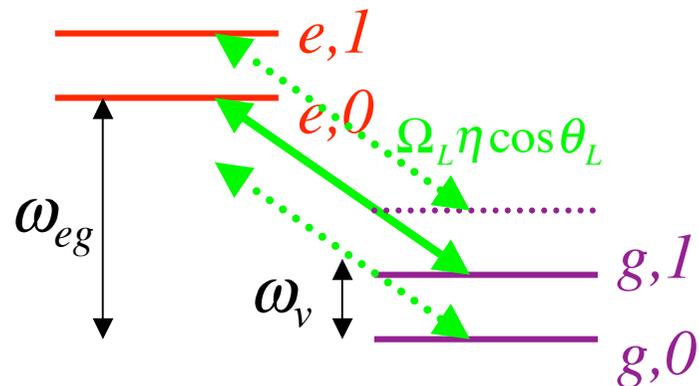
**Impulsion  $\pi$  échange les deux niveaux du qubit:**

$$|e\rangle \xrightarrow[\omega_L = \omega_{eg}]{\text{pulse } \Omega_L t = \pi, \varphi=0} |g\rangle ; |g\rangle \xrightarrow[\omega_L = \omega_{eg}]{\text{pulse } \Omega_L t = \pi, \varphi=0} -|e\rangle \quad (3-12)$$

Pulse  $2\pi = -I$

# La 1<sup>ère</sup> bande latérale rouge: analogie avec l'électrodynamique quantique en cavité

$$|e, n\rangle \longleftrightarrow |g, n+1\rangle \quad \omega_L = \omega_{eg} - \omega_v$$



*Oscillation de Rabi sur la bande latérale: transition électronique associée à l'échange d'un phonon*

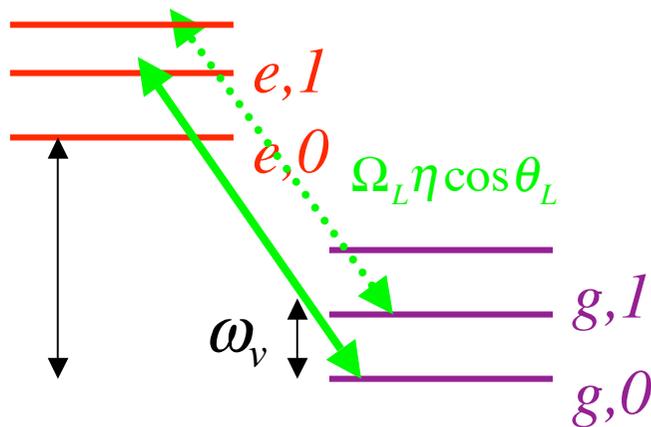
$$H = -i\hbar \frac{\Omega_L \eta \cos \theta_L}{2} \left[ \sigma_+ e^{-i\varphi} a - \sigma_- e^{i\varphi} a^\dagger \right] \quad (3-13)$$

Couplage de  $|e, n\rangle$  et  $|g, n+1\rangle$  alors que  $|g, 0\rangle$  reste non couplé (état fondamental). Analogie complète avec le Hamiltonien de l'Electrodynamique en cavité (phonons remplacés par les photons de la cavité). Transition utilisée pour le «side-band» cooling et pour intriquer le qubit à la vibration (voir plus loin).

# La 1<sup>ère</sup> bande latérale bleue (anti-RWA)

$$|e, n+1\rangle \longleftrightarrow |g, n\rangle$$

$$\omega_L = \omega_{eg} + \omega_v$$



Oscillation de Rabi créant un phonon en même temps que l'ion est excité: processus générant deux excitations à la fois, qui n'existe pas en CQED (terme anti-résonnant). Ici ce terme existe parce que l'énergie nécessaire est fournie par le champ laser

$$H = -i\hbar \frac{\Omega_L \eta \cos \theta_L}{2} \left[ \sigma_+ e^{-i\varphi} a^\dagger - \sigma_- e^{i\varphi} a \right] \quad (3-14)$$

Bande bleue utilisée pour générer des états de Fock et pour intriquer le qubit au mode de vibration (voir plus loin).

Pulse  $\pi/2$  sur bande rouge ou bleue intrique qubit et vibration

Pulse  $\pi$  sur bande rouge ou bleue copie état qubit sur vibration

# Développement à tous les ordres en $\eta' = \eta \cos \theta_L$

Le terme dépendant du centre de masse se développe suivant:

$$e^{-(\eta^2 \cos^2 \theta_L)/2} e^{i\eta \cos \theta_L a^\dagger} e^{i\eta \cos \theta_L a} = e^{-\eta'^2/2} \left\{ f_0(a^\dagger a) + \sum_{q>0} (i\eta')^q [f_q(a^\dagger a) a^q + a^{\dagger q} f_q(a^\dagger a)] \right\} \quad (3-15)$$

avec  $f_q(a^\dagger a) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(\eta')^{2l}}{l!(l+q)!} a^{\dagger l} a^l$  Terme de « saturation » diagonal en  $n$ ,  
 tenant compte de la valeur finie de  $\eta$   
 (réduit l'interaction effective lorsque  
 l'excursion de la vibration devient grande)

En injectant ce développement dans (3-3) et en passant en représentation d'interaction par rapport au hamiltonien de l'ion isolé, on obtient:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{Laser}(t) &= e^{i[\omega_{eg} \sigma_z/2 + \omega a^\dagger a]t} H_{Laser}(t) e^{-i[\omega_{eg} \sigma_z/2 + \omega a^\dagger a]t} && \text{Termes résonnants pour:} \\ &= -\frac{\hbar \Omega_L}{2} e^{-\eta'^2/2} e^{-i\varphi} \sigma_+ \left\{ f_0(a^\dagger a) e^{i(\omega_{eg} - \omega_L)t} + \sum_{q>0} (i\eta')^q f_q(a^\dagger a) a^q e^{i(\omega_{eg} - q\omega - \omega_L)t} + \sum_{q>0} (i\eta')^q a^{\dagger q} f_q(a^\dagger a) e^{i(\omega_{eg} + q\omega - \omega_L)t} \right\} + hc \end{aligned} \quad (3-16)$$

$\omega_L = \omega_{eg}$  ("porteuse")  
 $\omega_L = \omega_{eg} - q\omega$   
 ("bande latérale rouge à  $q$  quanta")  
 $\omega_L = \omega_{eg} + q\omega$   
 ("bande latérale bleue à  $q$  quanta")

# Spectre à la limite classique: la modulation de fréquence retrouvée.

Amplitude de transition à  $\omega_L = \omega_{eg} - q\omega_z$ :

$$A_q^n(\eta') = \eta'^q e^{-\eta'^2/2} \langle n - q | f_q(a^\dagger a) a^q | n \rangle = e^{-\eta'^2/2} \sum_l (-1)^l \frac{\eta'^{2l+q}}{l!(l+q)!} \langle n - q | a^{\dagger l} a^{l+q} | n \rangle \quad (3-17)$$

A la limite classique,  $n$  est centré autour de  $\bar{n}$ :

$$n \sim \bar{n} \quad \text{avec} \quad \eta' \sqrt{\bar{n}} = ka_0 \cos \theta_L \quad \rightarrow \quad a_0 : \text{amplitude vibration classique}$$

$$\bar{n} \rightarrow \infty \quad \eta' \rightarrow 0$$

D'où l'approximation:  $\langle n - q | a^{\dagger l} a^{l+q} | n \rangle \approx \bar{n}^{l+q/2} \quad (l, q \ll n)$

$$\rightarrow A_q^n(\eta') \approx \sum_l (-1)^l \frac{(\eta' \sqrt{\bar{n}})^{2l+q}}{l!(l+q)!}$$

Soit:

$$A_q \approx \sum_l (-1)^l \frac{(ka_0 \cos \theta_L)^{2l+q}}{l!(l+q)!} = J_q(ka_0 \cos \theta_L) \quad (3-18)$$

On retrouve le résultat classique (modulation de la fréquence vue par l'ion en mouvement dans le champ laser). Voir leçon 2.

# Oscillation de Rabi d'un ion soumis à une excitation résonnante sur 1<sup>ère</sup> bande latérale

En analogie avec CQED, on prépare un état initial d'1 ion (bit  $e,g$ ):

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{vib}(0)\rangle \otimes |g\rangle \quad ; \quad |\Psi_{vib}(0)\rangle = \sum_n c_n(0) |n\rangle$$

puis on soumet l'ion pendant un temps variable  $t$  à une excitation résonnante sur la 1<sup>ère</sup> bande latérale (rouge ou bleue). On détecte ensuite l'état du qubit par la méthode de fluorescence. On moyenne pour chaque  $t$  sur un grand nombre de réalisations et on construit  $P_g(t)$ , signal présentant une oscillation de Rabi avec composantes de Fourier. Pour la 1<sup>ère</sup> bande bleue on a:

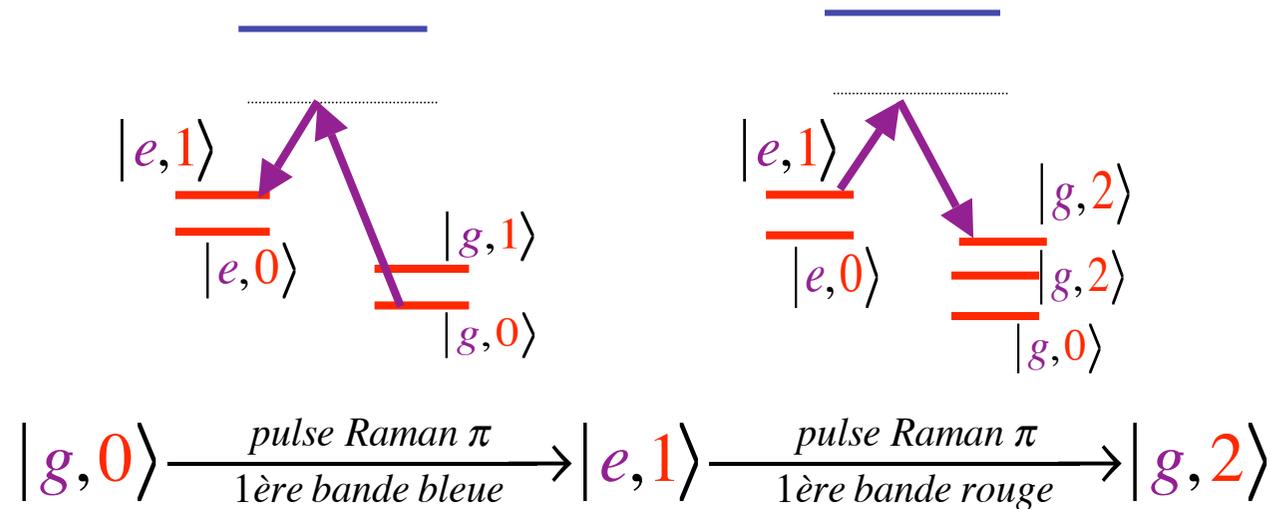
$$P_g(t) = \sum_n |c_n|^2 \cos^2\left(\frac{\Omega_n^1 t}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \Omega_n^1 = \Omega_L \eta' \langle n+1 | f_1(a^\dagger a) a^\dagger | n \rangle$$

$$= \underbrace{\Omega_L \eta' \sqrt{n+1}}_{\text{Terme « CQED »}} \left[ 1 - \underbrace{\frac{\eta'^2}{2} (n+1)}_{\text{Saturation Lamb-Dicke}} + \dots \right]$$

# Oscillation de Rabi d'un état de Fock ( $Be^+$ )

*D.Meekhof, C.Monroe, B.King, W.Itano et D.Wineland, PRL, 76, 1796 (1996).*

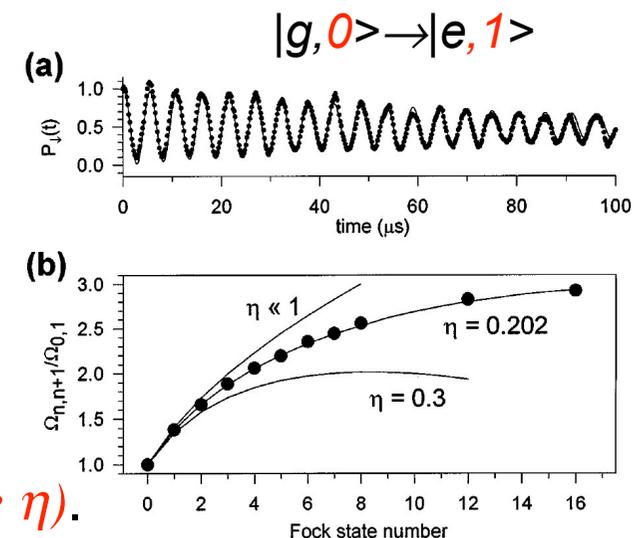
Préparation de l'état de Fock: exemple de l'état  $|n=2\rangle$ :



Pour un état de Fock, l'oscillation de Rabi est monochromatique, à la fréquence:

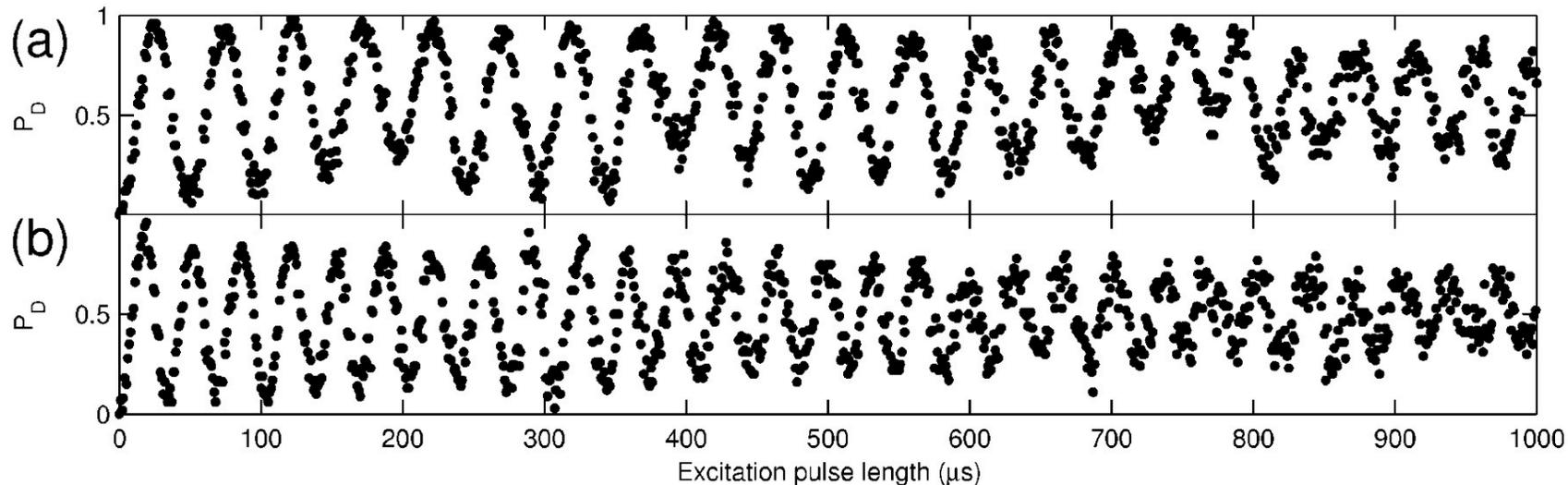
$$\Omega_L \eta' \sqrt{n+1} \left[ 1 - \frac{\eta'^2}{2} (n+1) + \dots \right]$$

Fréquence de Rabi mesurée en fonction de  $n$  (fit de  $\eta$ ).



# Oscillation de Rabi d'un état de Fock ( $Ca^+$ )

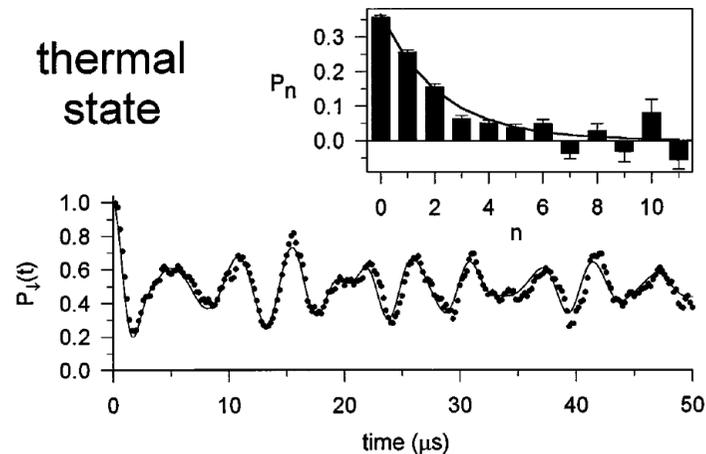
*C.Roos, T.Zeiger, H.Rohde, Hnägerl, J.Eschner, D.Leibfried, F.Schmidt-Kaler et R.Blatt. PRL, 83, 4713 (1999).*



**Oscillation de Rabi sur la 1ère bande bleue (ion  $Ca^+$ ):** (a) état initial  $|S,0\rangle$  et (b) état initial  $|S,1\rangle$ . Noter que les fréquences de Rabi sont dans un rapport  $\sqrt{2}$ . La cohérence du qubit est préservée sur un temps de l'ordre de la milliseconde.

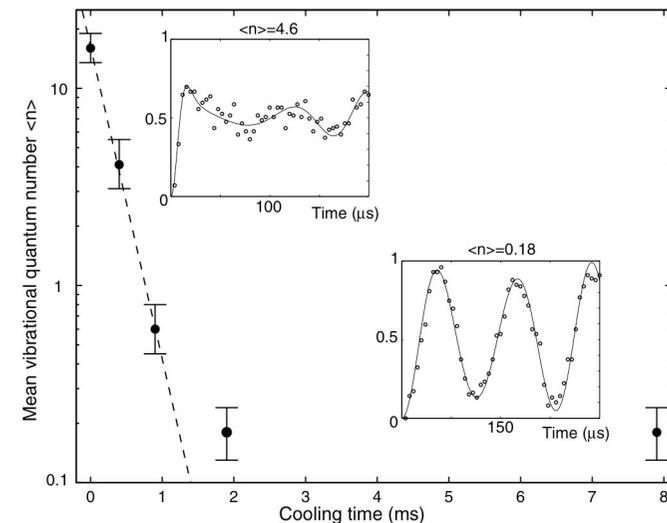
# Oscillation de Rabi d'un état de vibration thermique: signature de température de l'ion

*D.Meekhof et al PRL, 76, 1796 (1996).*



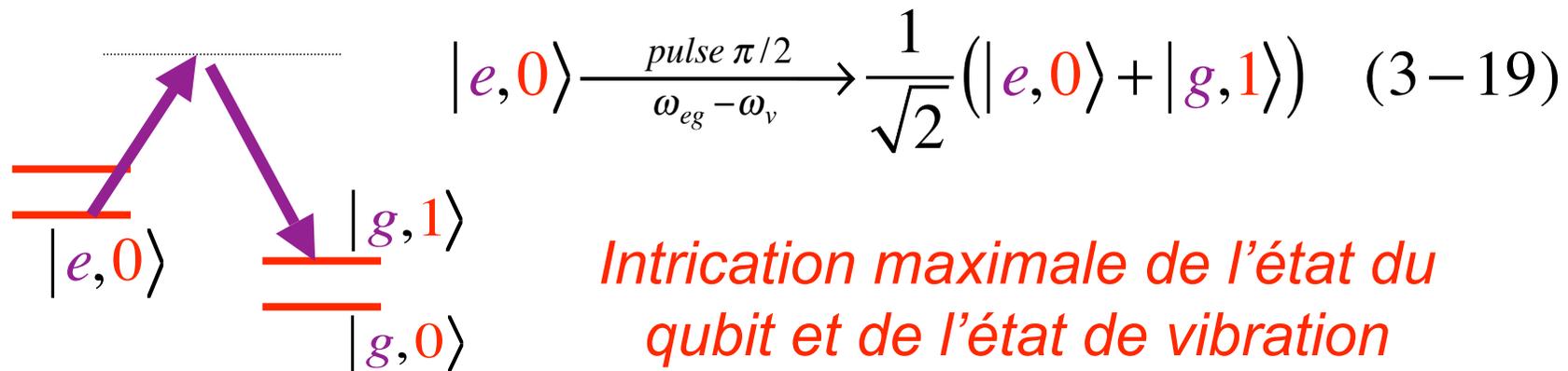
Signal de Rabi pour un ion thermalisé à une température finie T

L'analyse de Fourier du signal donne la probabilité des différents nombres de phonons, d'où T. La figure ci-contre montre comment ce signal de Rabi thermique peut être utilisé pour faire le diagnostic d'un processus de cooling EIT: les courbes de Rabi sont mesurées après un temps court et un temps long d'application du processus de cooling.

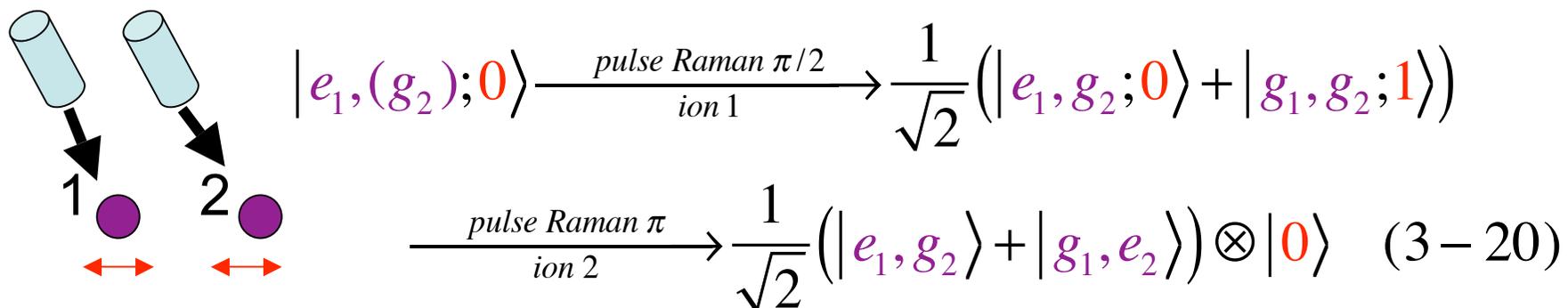


*C.Roos, D.Liebfried, A.Mundt, F.Schmidt-Kaler, J.Eschner et R.Blatt, PRL 85, 5547 (2000)*

# Intrication entre qubit et état de vibration puis entre deux qubits par 1<sup>ère</sup> bande latérale:



Intrication de deux ions par intrication intermédiaire avec mode de vibration collectif. Pulses Raman sur bande latérale (ici rouge):



*Le mode de vibration revient à l'état initial et se désintrique.  
Analogie à l'intrication de deux atomes en CQED.*

# Rappels sur états et inégalités de Bell



$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle) \quad ; \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle) \quad (3-21)$$

Etats maximalement intriqués de deux qubits: corrélations non-classiques entre les pseudo-spins (voir cours 2001-2002).

Il suffit d'en préparer un, les autres s'en déduisant par opérations locales:

$$\begin{aligned} \sigma_z^A |\phi^\pm\rangle &= \sigma_z^B |\phi^\pm\rangle = |\phi^\mp\rangle \quad ; \quad \sigma_z^A |\psi^\pm\rangle = -\sigma_z^B |\psi^\pm\rangle = |\psi^\mp\rangle \\ \pm \sigma_x^A |\phi^\pm\rangle &= \sigma_x^B |\phi^\pm\rangle = |\psi^\pm\rangle \quad ; \quad \pm \sigma_x^A |\psi^\pm\rangle = \sigma_x^B |\psi^\pm\rangle = |\phi^\pm\rangle \end{aligned} \quad (3-22)$$

Mesurons **la même composante**  $\sigma_\theta = \sigma_z \cos\theta + \sigma_x \sin\theta$  sur les deux particules.

On déduit simplement des relations précédentes l'identité:

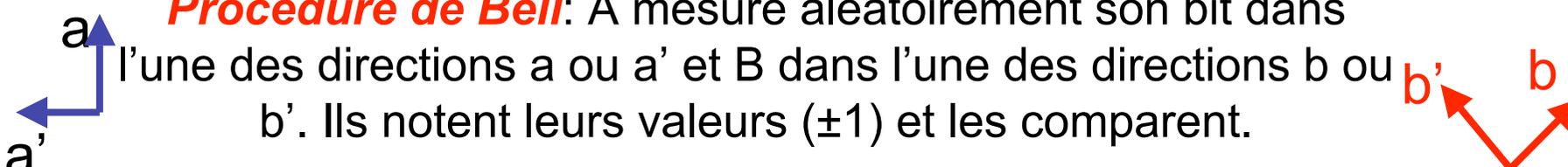
$$\sigma_\theta^A \sigma_\theta^B |\phi^+\rangle = \left[ \cos^2 \theta \sigma_z^A \sigma_z^B + \sin^2 \theta \sigma_x^A \sigma_x^B + \sin \theta \cos \theta (\sigma_z^A \sigma_x^B + \sigma_x^A \sigma_z^B) \right] |\phi^+\rangle = |\phi^+\rangle$$

**La mesure sur  $|\phi^+\rangle$  donne toujours le résultat +1**: les deux particules sont, quel que soit  $\theta$ , toujours trouvées avec leur pseudo-spin pointant dans la même direction. Peut-on comprendre ce résultat «classiquement»?

# Le raisonnement Bell-EPR (version CHSH)

Pour connaître l'état de son «spin» dans la direction  $\theta$ , A peut se contenter de demander à B, à une distance arbitraire, de faire une mesure sur le spin B dans la même direction et de lui communiquer son résultat. Elle sait alors que le spin A doit pointer dans la même direction. Puisque A peut obtenir son résultat sans toucher son système (sans le perturber?), il est «logique» d'admettre que la valeur de son spin ( $\varepsilon_a = \pm 1$ ) est pré-déterminée avant la mesure (comme la valeur de la même composante du spin B).

**Procédure de Bell:** A mesure aléatoirement son bit dans l'une des directions  $a$  ou  $a'$  et B dans l'une des directions  $b$  ou  $b'$ . Ils notent leurs valeurs ( $\pm 1$ ) et les comparent.



Si les quantités «existent» avant mesure, on peut pour chaque paire (i) construire la quantité:

$$S_i = (\varepsilon_a^A - \varepsilon_{a'}^A) \varepsilon_b^B + (\varepsilon_a^A + \varepsilon_{a'}^A) \varepsilon_{b'}^B = \varepsilon_a^A \varepsilon_b^B - \varepsilon_{a'}^A \varepsilon_b^B + \varepsilon_a^A \varepsilon_{b'}^B + \varepsilon_{a'}^A \varepsilon_{b'}^B = \pm 2 \quad (\text{relation évidente})$$

Les mesures des 2 composantes de chaque spin étant incompatibles, A et B ne peuvent sur 1 paire déterminer que l'un des 4 termes. En sommant un grand nombre de mesures, ils accèdent néanmoins à la moyenne  $S_{Bell}$  des  $S_i$ , dont la valeur absolue est **d'après cet argument** bornée par 2:

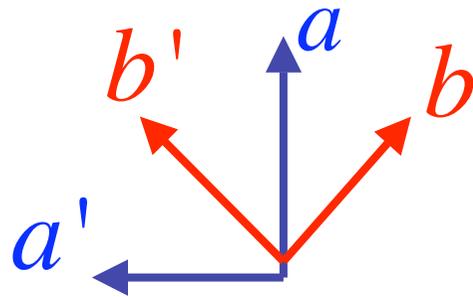
$$|S_{Bell}| = \left| \langle \sigma_a^A \sigma_b^B \rangle - \langle \sigma_{a'}^A \sigma_b^B \rangle + \langle \sigma_a^A \sigma_{b'}^B \rangle + \langle \sigma_{a'}^A \sigma_{b'}^B \rangle \right| \leq 2$$

# La réponse de la mécanique quantique

Pour certains choix des directions de mesure, la physique quantique donne des résultats violant l'inégalité de Bell précédente. Choisissons par exemple la configuration ci contre (angles entre directions adjacentes égaux à  $\pi/4$ ).

Un calcul quantique élémentaire donne:

$$\langle \sigma_a^A \sigma_b^B \rangle = \langle \sigma_a^A \sigma_{b'}^B \rangle = \langle \sigma_{a'}^A \sigma_b^B \rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



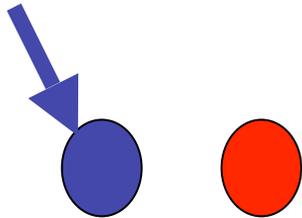
$$\langle \sigma_{a'}^A \sigma_b^B \rangle = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow S_{Bell} = 2\sqrt{2} > 2$$

Cette violation de l'inégalité de Bell prouve que la physique quantique est incompatible avec l'existence de variables cachées locales (les  $\varepsilon$ ). Il est impossible de raisonner sur des quantités non mesurées (« **une mesure non faite n'a pas de résultat** » ). Les expériences sur des paires de photons corrélées (Clauser et al, Aspect et al et autres réalisées depuis) ont toutes donné raison à la physique quantique. Les ions piégés donnent maintenant la possibilité d'étendre ces tests à **des particules intriquées massives**.

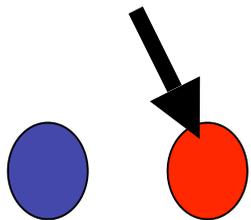
# Etats de Bell de deux ions: expérience d'Innsbruck (analogie avec préparation d'états de Bell en CQED)

L'intrication de deux ions dans l'état de Bell  $|\Psi^+\rangle = (1/\sqrt{2})(|S,D\rangle + |D,S\rangle)$  est réalisée comme suit (après initialisation de la paire d'ions dans l'état  $|S,S,0\rangle$ ):



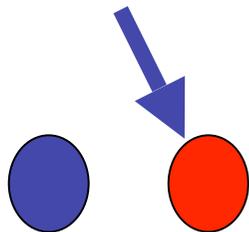
Pulse  $\pi/2$  sur 1<sup>ère</sup> bande latérale bleue intrique l'ion 1 avec la vibration (mode accordéon):

$$|S_1, (S_2); 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_1, (S_2); 0\rangle + |D_1, (S_2); 1\rangle)$$



Pulse  $\pi$  porteuse échange les deux états de l'ion 2 sans affecter l'ion 1 et le mode de vibration:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|(S_1), S_2; (0)\rangle + |(D_1), S_2; (1)\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|(S_1), D_2; (0)\rangle + |(D_1), D_2; (1)\rangle)$$

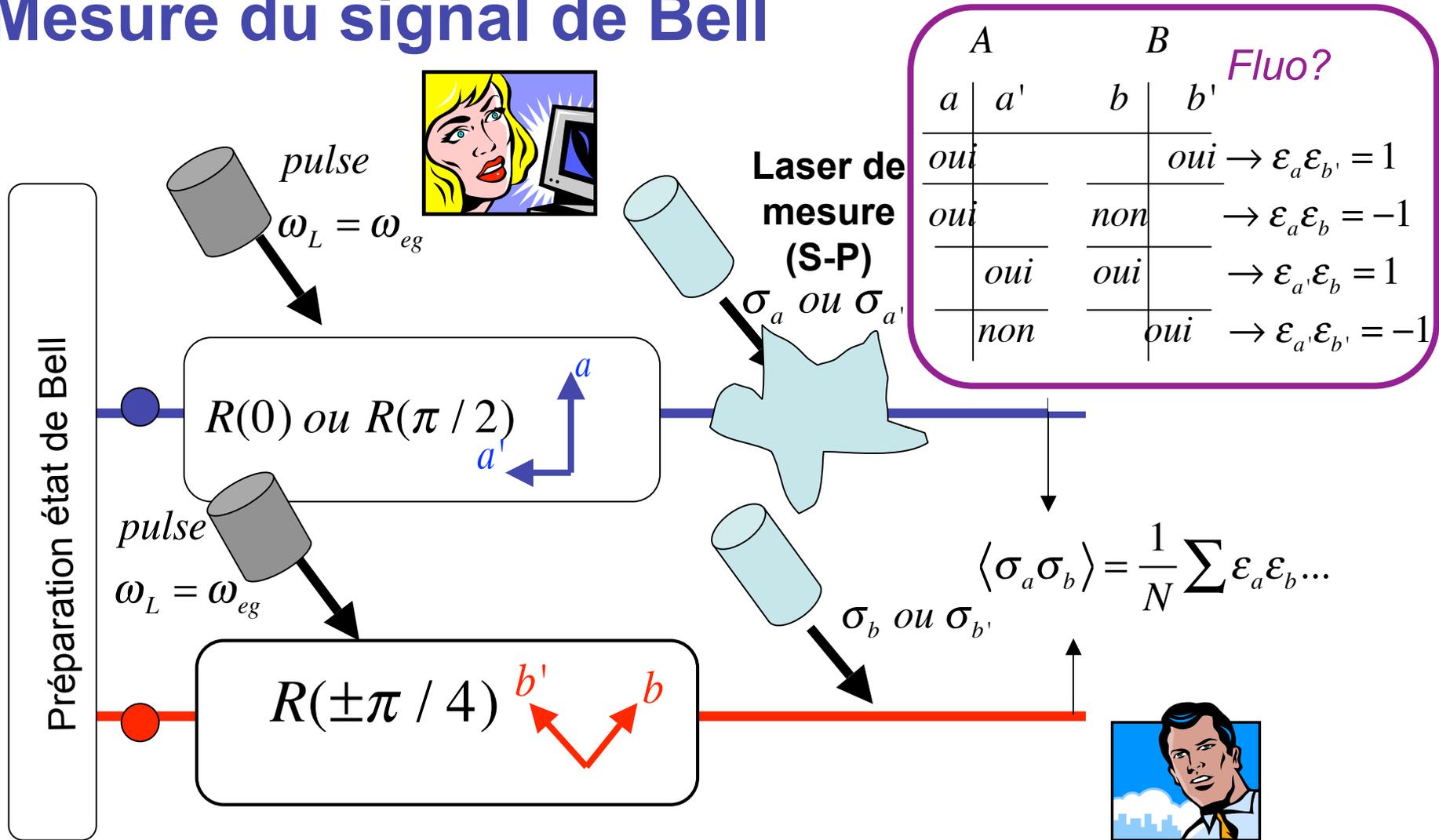


Pulse  $\pi$  sur 1<sup>ère</sup> bande latérale bleue recopie l'état du mode de vibration sur l'ion 2:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|(S_1), D_2; 0\rangle + |(D_1), D_2; 1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|(S_1), D_2; 0\rangle + |(D_1), S_2; 0\rangle)$$

Le mode se retrouve désintriqué dans l'état 0. Variantes simples pour préparer les autres états de Bell.

# Mesure du signal de Bell



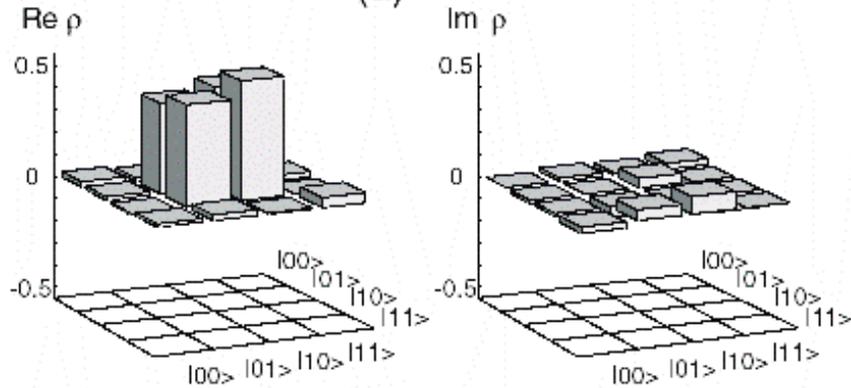
## Violation de l'inégalité de Bell:

$$S_{Bell} = \langle \sigma_a^A \sigma_b^B \rangle - \langle \sigma_{a'}^A \sigma_b^B \rangle + \langle \sigma_a^A \sigma_{b'}^B \rangle + \langle \sigma_{a'}^A \sigma_{b'}^B \rangle = 2.52(6) > 2$$

C.Roos, G.Lancaster, M.Riebe, H.Haffner, W.Hansel, S.Gulde, C.Becher, J.Eischner, F.Schmidt-Kaler et R.Blatt, PRL 92, 220402 (2004)

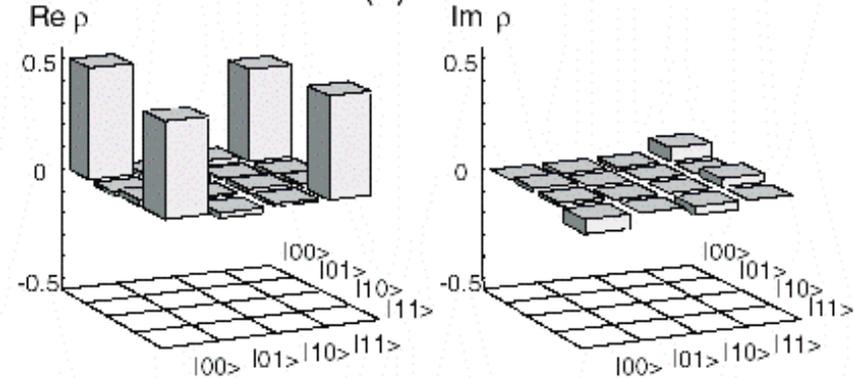
# Tomographie des quatre états de Bell

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle)$$

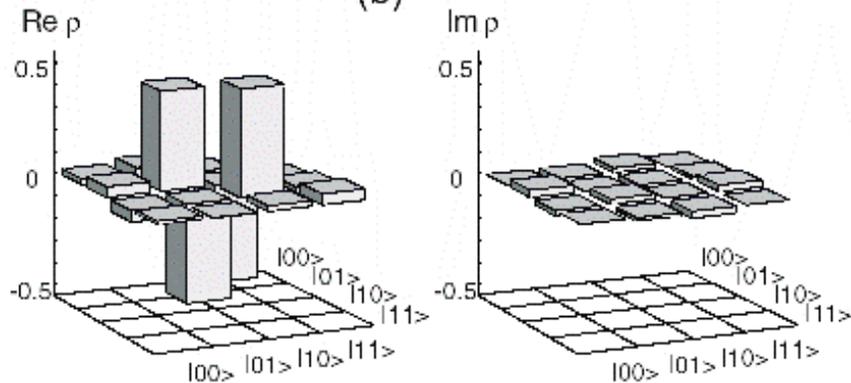


(a)

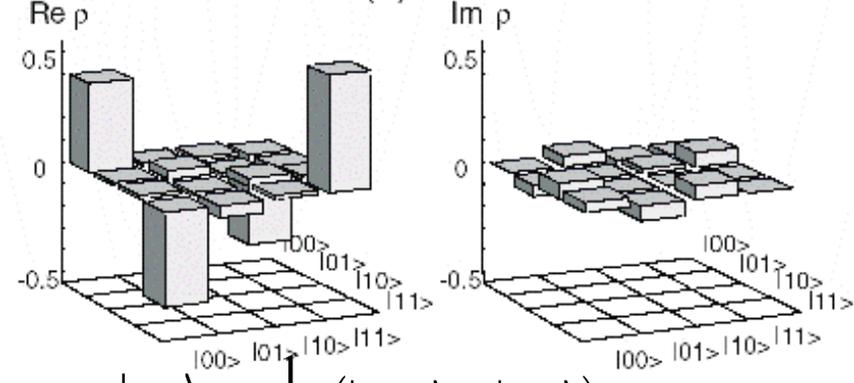
$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)$$



(c)



(b)



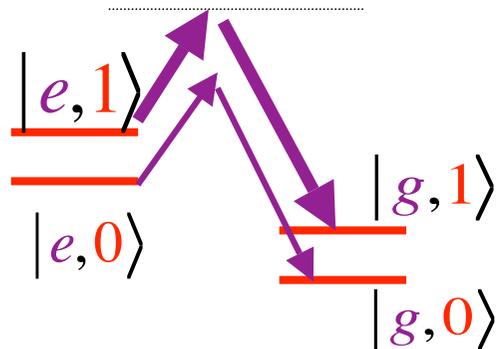
(d)

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle)$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle - |1,1\rangle)$$

La mesure nécessite, avant de réaliser les cycles de fluorescence, d'appliquer 9 combinaisons de paires de pulses sur la porteuse de chaque ion de façon à mesurer toutes les corrélations  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ . Voir leçon 1.

## Remarque: intrication possible entre le qubit et l'état de vibration par transition porteuse



$$\sum_n c_n |n\rangle \otimes |e\rangle \rightarrow \sum_n c_n \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n^0 t}{2}\right) |e,n\rangle + \sin\left(\frac{\Omega_n^0 t}{2}\right) |g,n\rangle \right]$$

$$\Omega_n^0 = \Omega_L \langle n | f_0 (a^\dagger a) | n \rangle = \Omega_L [1 - \eta'^2 n + \dots]$$

Choix de paramètres:

$$c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}, \quad c_{n>1} = 0 \quad ; \quad \Omega_L t = \frac{\pi}{2} + 4k\pi; \quad \eta'^2 = \frac{1}{4k + 1/2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |e\rangle \rightarrow \frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |e\rangle + \frac{1}{2} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |g\rangle$$

On peut avoir *intrication maximale entre l'état du qubit et l'état de vibration*.

Mécanisme différent de celui des bandes latérales. Il n'y a pas création de phonons, mais déphasage de Rabi dépendant de  $n$  à cause du terme de saturation de la fréquence de Rabi en  $\eta^2$ . L'effet est important pour  $\Omega_L \eta^2 t \sim 1$ .

Quand la porteuse est utilisée pour faire une porte à un bit, on évite cet effet en prenant un pulse assez court pour qu'il ne se manifeste pas.

## Conclusion de la troisième leçon

Nous avons mis en place l'essentiel des outils de l'information quantique avec des ions piégés. Nous avons décrit comment initialiser les états de vibration (par Doppler et side-band cooling) ainsi que les états internes des ions-qubit (par pompage optique). Nous disposons d'opérateurs à un bit (rotations réalisées par impulsions sur porteuse). Nous savons comment intriquer 2 ions avec un mode collectif de vibration comme intermédiaire. Les transitions sur bande latérale servent à intriquer un des ions qubit à la vibration (impulsion  $\pi/2$ ) puis à effectuer la copie de ce mode sur l'autre ion (impulsion  $\pi$ ). L'oscillation de Rabi qui sert à effectuer ces opérations est aussi utile pour mesurer l'état de vibration. Par son analyse de Fourier, on en déduit la distribution des phonons. Nous verrons la semaine prochaine qu'on peut aussi exploiter le signal de Rabi pour déterminer entièrement l'état du mode de vibration. Il nous manque pour cela une autre technique importante, *la manipulation des états cohérents de vibration* dont l'étude va se révéler riche d'effets physiques.