

# 4.

## Physique des ions piégés (suite)

20 Février 2006

**4A. Manipulation d'états cohérents de vibration**

**4B. Environnements sur mesure et décohérence**

## 4A

# Manipulation d'états cohérents de vibration

Rappel sur les états cohérents de l'oscillateur harmonique. Comment préparer un mode de vibration ionique dans un état cohérent. Oscillations de Rabi d'un ion dans un état cohérent: effondrement et résurgence du signal. Préparer et détecter des superpositions d'états cohérents: chats de Schrödinger. Mesure de la fonction de Wigner par déplacement du mode de vibration dans le plan de phase.

# Rappel sur les états cohérents de vibration

Ce sont les états obtenus par translation de l'état fondamental dans l'espace des phases:

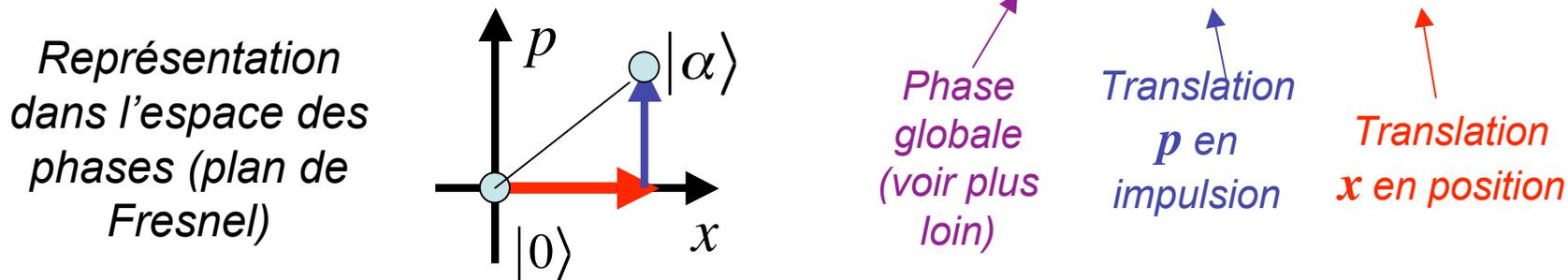
$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \quad ; \quad D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} \quad (4-1)$$

$$\alpha = \frac{x}{2x_0} + i \frac{p}{2p_0} \quad ; \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_x}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{\hbar M\omega_x}{2}} \quad (4-2)$$

*Fluctuations de l'état fondamental*

$$D(\alpha) = \exp\left(\frac{x}{2x_0}(a^\dagger - a) + i \frac{p}{2p_0}(a^\dagger + a)\right) = \exp\frac{i}{\hbar}(pX - xP_x)$$

*Théorème de Glauber\**  $\rightarrow$   $= e^{-ipx/2\hbar} e^{ipX/\hbar} e^{-ixP_x/\hbar} \quad (4-3)$



---

(\*)  $e^A e^B = e^{A+B} e^{[A,B]/2}$  si  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$

# Propriétés des états cohérents

Les déplacements s'ajoutent vectoriellement, avec un déphasage lorsqu'ils ne sont pas parallèles (phase topologique-voir leçon 6)

$$D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha) \quad (4-4)$$

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\alpha + \beta)e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2} \quad (4-5)$$

$$D(\alpha)|\beta\rangle = e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2}|\beta + \alpha\rangle \quad (4-6)$$

$$D(\alpha)aD(-\alpha) = a - \alpha I \quad (4-7)$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (4-8)$$

La distribution des phonons dans un état cohérent suit une loi de Poisson:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad ; \quad \bar{n} = |\alpha|^2, \quad \Delta n = |\alpha| = \sqrt{\bar{n}} \quad (4-9)$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} e^{\alpha^*\beta} \quad (4-10)$$

$$\text{évolution libre : } |\alpha(t)\rangle = |\alpha(0)e^{-i\omega t}\rangle; \quad (4-11)$$

$$\text{amortissement "naturel" : } |\alpha(t)\rangle = |\alpha(0)e^{-i(\omega - i\Gamma/2)t}\rangle \quad (4-12)$$

**Comportement classique. Pas d'intrication avec l'environnement « naturel »**

# Préparer un état cohérent de vibration d'un ion piégé: application d'une force résonnante

Ion soumis à un champ  $E_0 \sin(\omega t - \varphi)$  uniforme le long de la direction  $Ox$  du mode à exciter, à la fréquence  $\omega$  de la vibration (modulation du potentiel des électrodes). La force dérive du potentiel:

$$V = -qE_0 X \sin(\omega t - \varphi) = i \frac{qx_0 E_0}{2} (a + a^\dagger) (e^{i(\omega t - \varphi)} - e^{-i(\omega t - \varphi)}) \quad (4 - 13)$$

L'approximation séculaire conduit à ne conserver en représentation d'interaction que 2 termes (analogie avec RWA):

$$\tilde{V} = i \frac{qx_0 E_0}{2} (ae^{-i\varphi} - a^\dagger e^{i\varphi}) \quad (4 - 14)$$

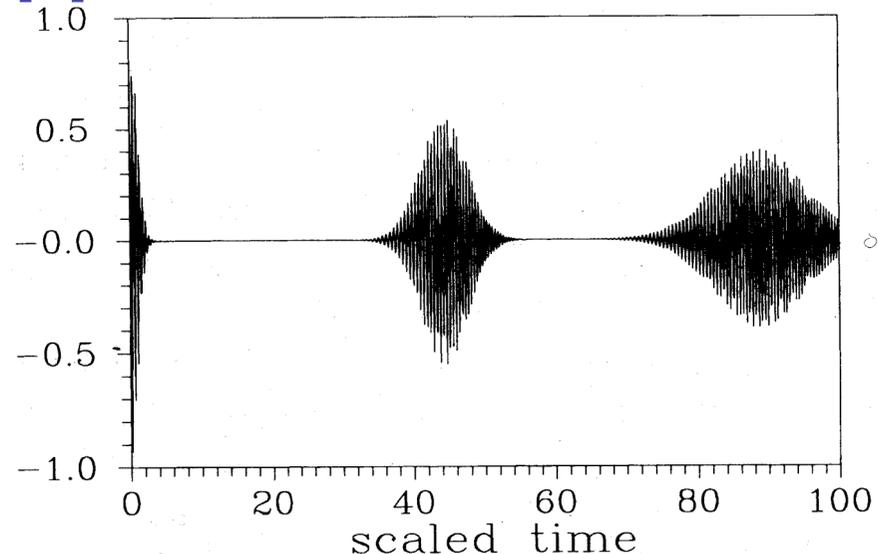
L'évolution de l'état de vibration pendant un temps  $\tau$  est alors décrite par l'opérateur unitaire:

$$\tilde{U}(\tau) = e^{-i\tilde{V}\tau/\hbar} = e^{\frac{qx_0 E_0 \tau}{2\hbar} (ae^{-i\varphi} - a^\dagger e^{i\varphi})} = D(\alpha) \quad ; \quad \alpha = -\frac{qx_0 E_0 \tau}{2\hbar} e^{i\varphi} \quad (4 - 15)$$

**A partir de  $|0\rangle$ , on prépare ainsi l'état  $|\alpha\rangle$  le plus général.**

# Oscillation de Rabi induite par un état cohérent: rappel de CQED

En CQED, l'oscillation de Rabi entre les états  $|e, n\rangle$  et  $|g, n+1\rangle$  induite par le couplage atome - champ s'effectue à la fréquence  $\Omega\sqrt{n+1}$ . Lorsque le champ est initialement dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$  (distribution de Poisson du nombre de photons) la superposition des composantes de Rabi de



$$P_e(t) = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} [1 + \cos(\Omega\sqrt{n+1} t)]$$

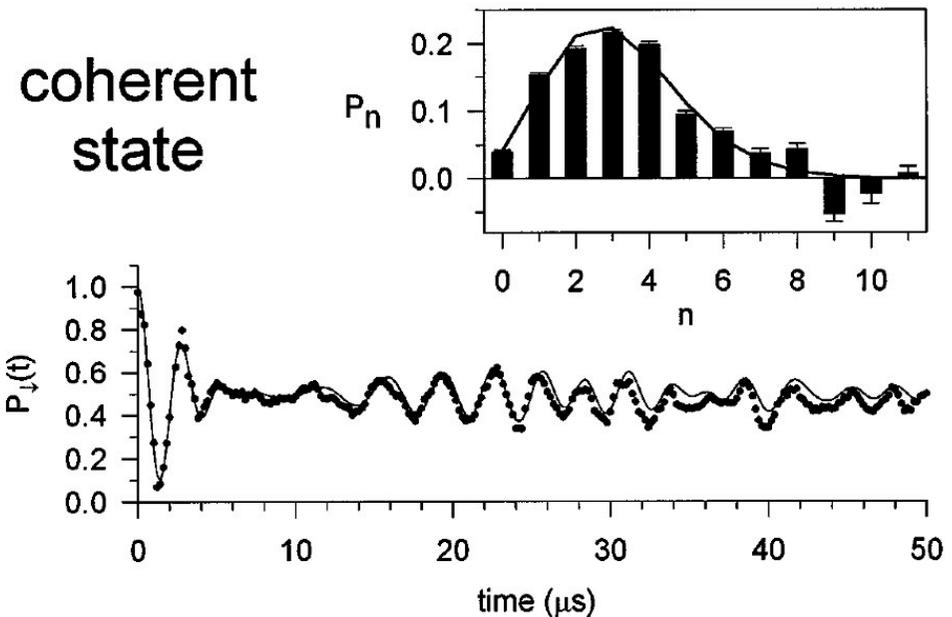
fréquences incommensurables produit un effondrement (au bout d'un temps de l'ordre de  $1/\Omega$ ) et une résurgence de l'oscillation au bout d'un temps  $\sim |\alpha|$  fois plus long. Le même effet est attendu avec un ion. Le couplage avec un laser sur la 1<sup>ère</sup> bande latérale rouge (ou bleue) d'un ion préparé dans un état cohérent doit produire une oscillation de Rabi avec *effondrement et résurgence* de la probabilité de détecter finalement l'ion dans un de ses états qubit (voir leçon précédente pour l'analyse de l'oscillation de Rabi avec des états initiaux de vibration différents: états de Fock et vibration thermique).

# Oscillation de Rabi associée à un état de vibration cohérent: «collapse» et «revival»

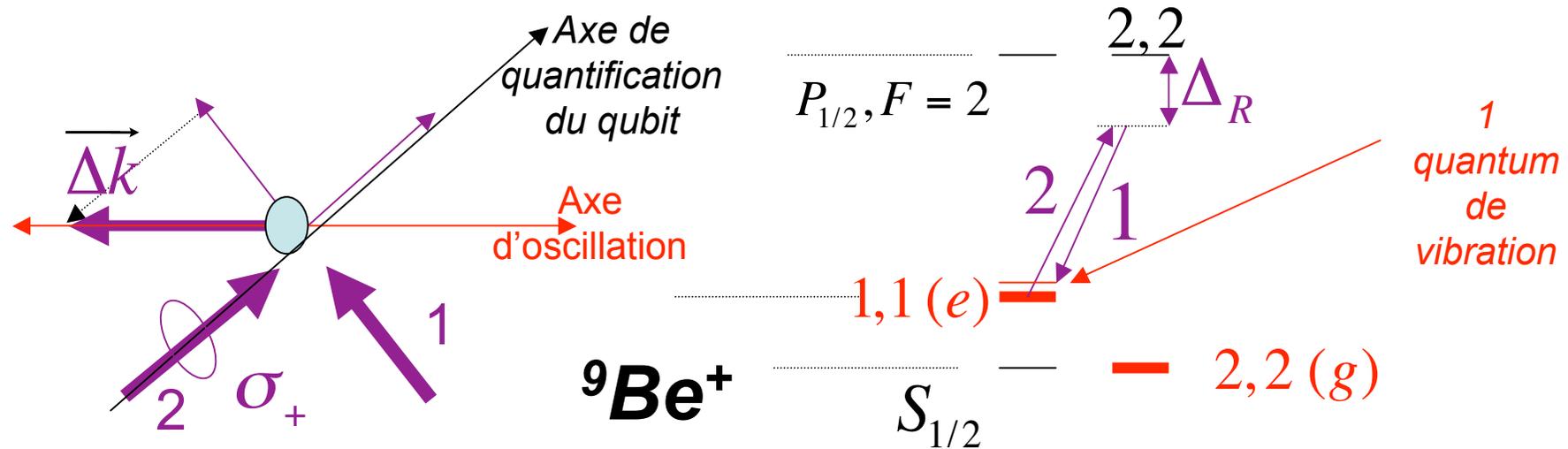
*D.Meekhof, C.Monroe, B.King, W.Itano et D.Wineland, PRL, 76, 1796 (1996).*

L'état cohérent initial est préparé suivant la méthode décrite plus haut. Le battement des fréquences de Rabi conduit au phénomène de «*collapse et revival*». Noter que les fréquences varient en  $\sqrt{n+1}$  seulement pour  $\eta \ll 1$  (voir leçon précédente). Sinon, des corrections doivent être appliquées, ce qui ne change pas qualitativement le signal. La transformée de Fourier du signal de Rabi permet de reconstruire la distribution du nombre de phonons (analogie avec CQED - voir cours antérieurs)

$$P_e(t) = \sum_n e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos^2 \left( \frac{\Omega_n^1 t}{2} \right) \approx \sum_n e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos^2 \left( \frac{\Omega_L \eta' \sqrt{n+1} t}{2} \right)$$



# Préparation d'un état de vibration cohérent, conditionné à l'état interne: transition Raman à un phonon avec lasers polarisés



Les lasers 1 et 2 ont une différence de fréquence  $\omega_2 - \omega_1 = \omega$  (conversion d'un photon-2 en un photon-1 **plus un phonon**). Le laser 2 a une polarisation interdisant la transition Raman à partir de  $g$  (2,2). La vibration de l'ion est excitée **conditionnellement à sa préparation dans  $e$  (1,1)**. L'orientation des lasers rend le facteur de Lamb-Dicke maximum ( $\Delta k$  le long de la vibration).

# L'interaction Raman réalise la translation de l'état de vibration dans son espace de phase

Hamiltonien Raman (si ion dans  $e$ ):

$$\tilde{H}_{Raman} = -i\hbar \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Delta_R} \eta \left( a e^{-i\varphi} - a^\dagger e^{i\varphi} \right) \quad (4-16)$$

*Phase relative (ajustable)  
des 2 lasers*

Evolution de la vibration pendant une impulsion de durée  $\tau$ :

$$\tilde{U}(\tau) = e^{-i \frac{\tilde{H}_{Raman} \tau}{\hbar}} = e^{-\frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Delta_R} \eta \tau (a e^{-i\varphi} - a^\dagger e^{i\varphi})} = D(\alpha) \quad ; \quad \alpha = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Delta_R} \eta \tau e^{i\varphi} \quad (4-17)$$

Effet analogue à celui produit par un champ oscillant unique de basse fréquence  $\omega$ , *mais la translation est maintenant conditionnée à l'état interne de l'ion*. La phase de l'état cohérent obtenu est contrôlée par la phase relative des deux lasers induisant l'effet Raman (différence de fréquence et de phase réglable par méthode acousto- ou électro-optique)

# Préparation d'une superposition d'états cohérents de vibration d'un ion: chat de Schrödinger

1. Pompage et refroidissement de l'ion dans l'état  $|g, 0\rangle$  (finissant par un pompage Raman sur la bande rouge  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg} - \omega$ ).
2. Préparation de l'ion-qubit dans une superposition symétrique de  $e$  et  $g$ , sans affecter la vibration: application d'une impulsion  $\pi/2$  Raman porteuse ( $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg}$ ). Les lasers, colinéaires, correspondent à  $\eta = 0$  (couplage nul aux phonons):

$$|g, 0\rangle \xrightarrow[\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg}]{\text{pulse Raman } \pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 0\rangle + |e, 0\rangle)$$

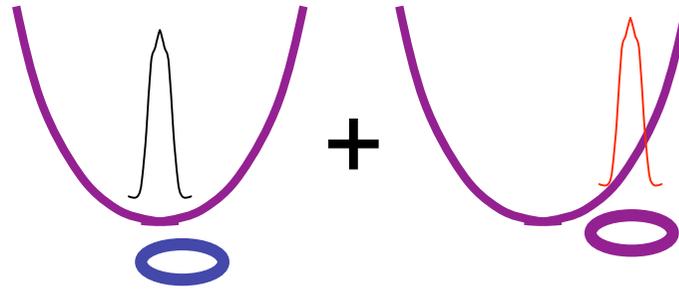
3. Réalisation de la translation de l'état de vibration: application d'une impulsion Raman  $\omega_2 - \omega_1 = \omega$  qui n'affecte la vibration de l'ion que s'il est dans  $e$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 0\rangle + |e, 0\rangle) \xrightarrow[\omega_2 - \omega_1 = \omega]{\text{pulse Raman durée } \tau} \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 0\rangle + |e, \alpha\rangle)$$

*Amplitude et phase réglables*

# Préparation d'un chat de Schrödinger d'un ion (suite)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 0\rangle + |e, \alpha\rangle)$$



Une partie de la fonction d'onde reste immobile et l'autre oscille. Intrication entre l'état du mouvement et l'état interne: «chat d'amplitude».

4. Echange des états internes: application d'une impulsion  $\pi$  Raman porteuse ( $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg}$ ) qui ne change pas l'état de vibration (lasers colinéaires avec  $\eta=0$ ):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 0\rangle + |e, \alpha\rangle) \xrightarrow[\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg}]{\text{pulse Raman } \pi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, 0\rangle + |g, \alpha\rangle)$$

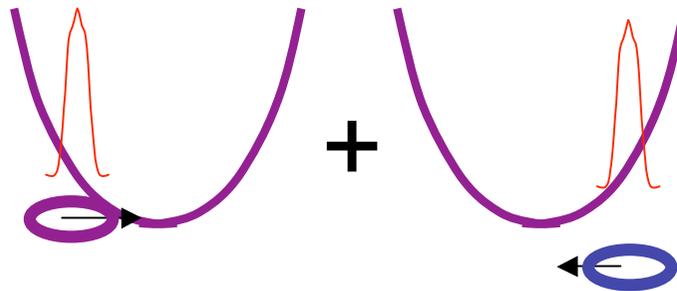
5. Nouvelle translation de l'état de vibration analogue à (3): elle affecte seulement la partie  $e$  de la fonction d'onde. La phase de cette translation diffère de celle de (3) par un angle ajustable  $\varphi$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e, 0\rangle + |g, \alpha\rangle) \xrightarrow[\omega_2 - \omega_1 = \omega]{\text{pulse Raman durée } \tau} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, \alpha e^{i\varphi}\rangle + |g, \alpha\rangle)$$

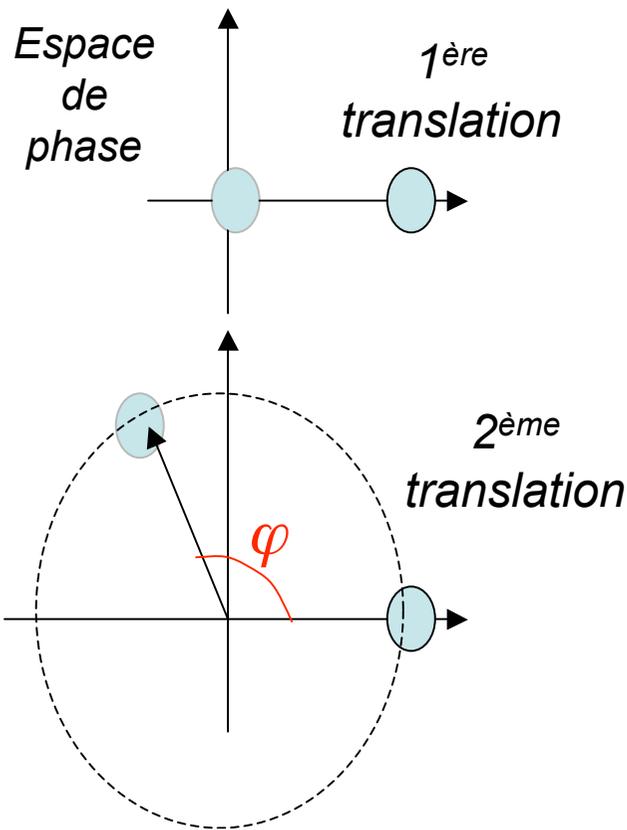
# Préparation d'un chat de Schrödinger d'un ion (suite)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e, -\alpha\rangle + |g, \alpha\rangle);$$

(cas  $\varphi = \pi$ )



Pour  $\varphi = \pi$ , superposition de 2 paquets d'onde oscillant en opposition de phase, avec corrélation du mouvement à l'état interne: «chat de phase»



En variant  $\varphi$ , on modifie continûment la distance des deux composantes du chat de phase. Pour  $\varphi = 0$ , les deux composantes se superposent et le chat disparaît. La recombinaison des composantes se manifeste par une interférence quantique (voir page suivante) qui prouve la cohérence de la superposition obtenue après la première translation.

# Tester la cohérence de la superposition des états de vibration: une expérience d'interférence atomique

6. Mélange à poids égaux des états  $e$  et  $g$ : application d'une impulsion  $\pi/2$  Raman sur la porteuse ( $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg}$ ), avec  $\eta = 0$  (lasers colinéaires):

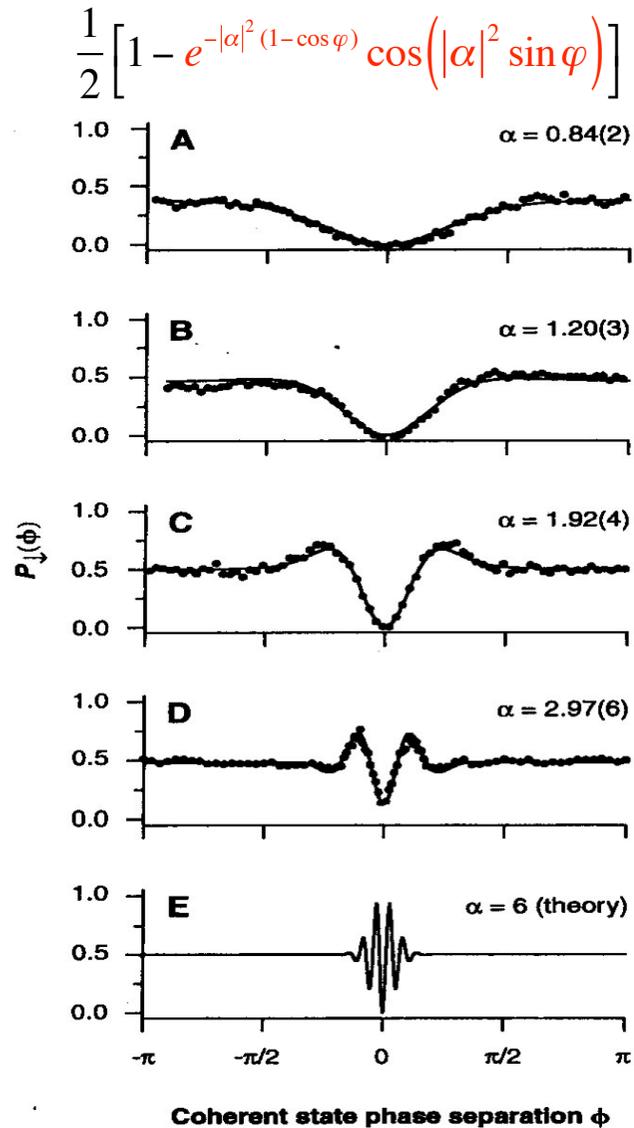
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |e, \alpha e^{i\varphi}\rangle + |g, \alpha\rangle \right) \xrightarrow[\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg}]{\text{pulse Raman } \pi/2} \frac{1}{2} |e\rangle \otimes \left( |\alpha\rangle + |\alpha e^{i\varphi}\rangle \right) + \frac{1}{2} |g\rangle \otimes \left( |\alpha\rangle - |\alpha e^{i\varphi}\rangle \right)$$

7. On détecte finalement par cycle de fluorescence l'atome dans  $g$  et, en répétant un grand nombre d'expériences pour chaque valeur de  $\varphi$ , on obtient la probabilité  $P_g(\varphi)$  de trouver l'ion dans  $g$  en fonction de  $\varphi$  (en utilisant l'expression du produit scalaire des états cohérents (4-10):

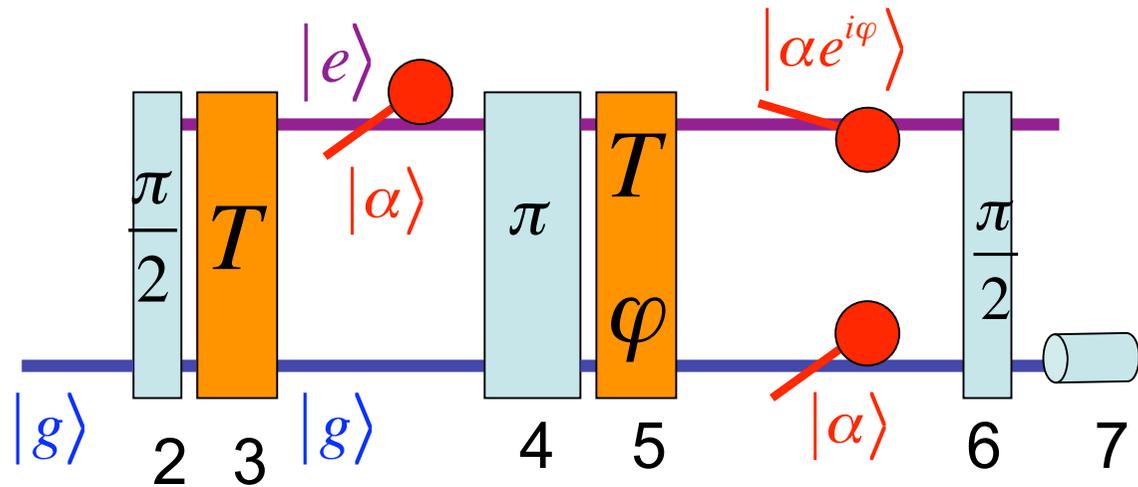
$$P_g(\varphi) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{Re}(\langle \alpha | \alpha e^{i\varphi} \rangle) \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - e^{-|\alpha|^2 (1 - \cos \varphi)} \cos(|\alpha|^2 \sin \varphi) \right]$$

*Franges autour de  $\varphi = 0$*

# Franges d'interférence démontrant la cohérence du «chat»: complémentarité



**Interfrange inversement proportionnel à l'amplitude du chat**



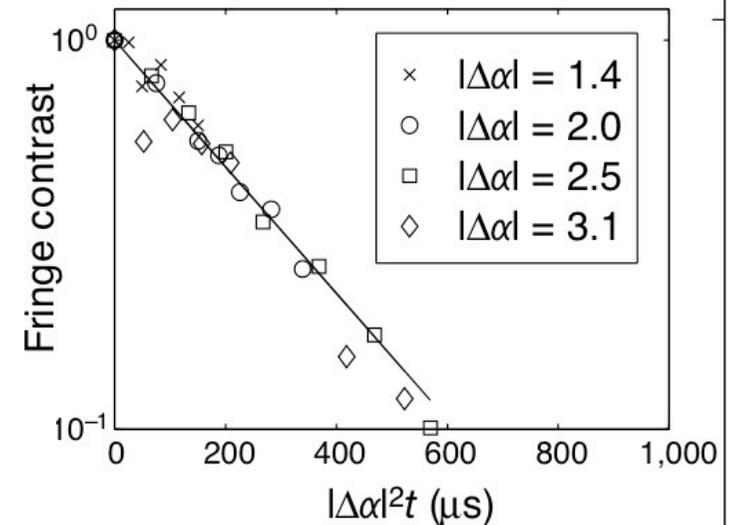
**Expérience de type Ramsey:** l'état interne de l'ion suit 2 chemins qui interfèrent, à condition que son état de vibration ne donne pas une information sur ce chemin («which-path»), ce qui exige que les deux états cohérents se recouvrent (autour de  $\varphi=0$ ). (Les chiffres sous le diagramme renvoient aux étapes décrites pages précédentes)

*C.Monroe, D.Meekhof, B.King et D.Wineland, Science, 272,1131 (1996).*

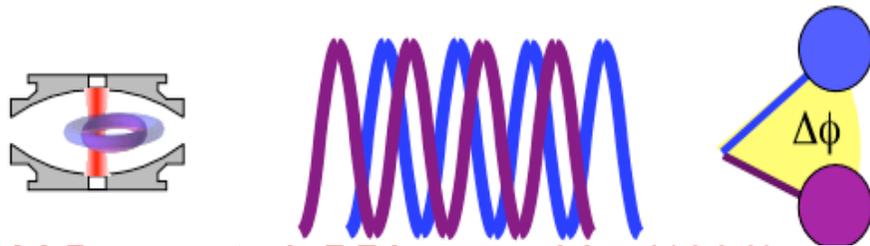
# Décohérence du chat ionique

La superposition des états de vibration est couplée à l'environnement des champs électriques ambiants. Il s'agit ici d'une décohérence «classique», les champs parasites constituant un «bruit» en principe mesurable et réversible (contrairement au réservoir des modes vides en CQED). Le résultat est cependant le même: la durée de vie d'une superposition  $|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle$  est

inversement proportionnelle au carré de la distance des composantes dans l'espace des phases  $|\Delta\alpha|^2 = |\alpha_1 - \alpha_2|^2$  ce qui rend la génération de ces états difficiles lorsque le nombre moyen de phonons dépasse quelques unités. La décohérence a été étudiée en mesurant la décroissance du contraste des franges d'interférence en fonction du temps séparant la préparation du système de sa détection. La figure ci contre porte tous les résultats normalisés (axe des temps en  $|\Delta\alpha|^2 t$ ). Tous les points tombent sur une même droite (en échelle log). D'autres études ont été faites par le même groupe en simulant des réservoirs (bruit artificiel ajouté). [C.Myatt, B.King, Q.Turchette, C.Sackett, D.Kielinski, W.Itano, C.Monroe et D.Wineland, Nature, 403, 269 (2000)]



# Chats de Schrödinger en CQED et en physique des ions piégés

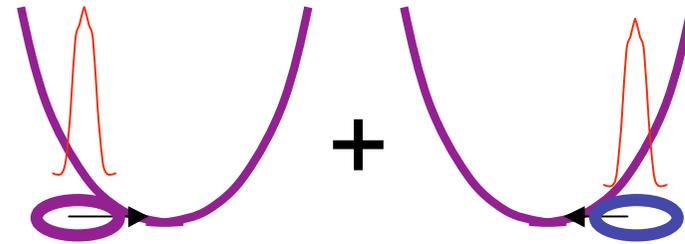


*M.Brune et al, PRL, 77, 4887 (1996).*

En CQED, un champ cohérent est introduit dans une cavité en la couplant à une source classique résonnante réalisant un déplacement du vide.

Ce champ est ensuite déphasé dans deux directions différentes par couplage à un atome à deux niveaux placé dans une superposition d'états et produisant un effet d'indice dépendant de l'état. Il y a intrication entre l'état du champ et celui de l'atome.

Les composantes de la superposition sont recombinaées, donnant lieu à des interférences atomiques de type Ramsey.



*C.Monroe et al, Science, 272, 1131 (1996).*

Un état de vibration cohérent est produit en couplant l'ion à une force lumineuse classique résonnante réalisant un déplacement de l'état fondamental.

La force dépend de l'état interne de l'ion. Lorsqu'il est préparé dans une superposition d'états, l'oscillation de l'ion se produit dans deux directions différentes à la fois, avec intrication entre la vibration et l'état interne de l'ion

Le recouvrement spatial des paquets cohérents se traduit par des effets d'interférence atomique à la Ramsey.

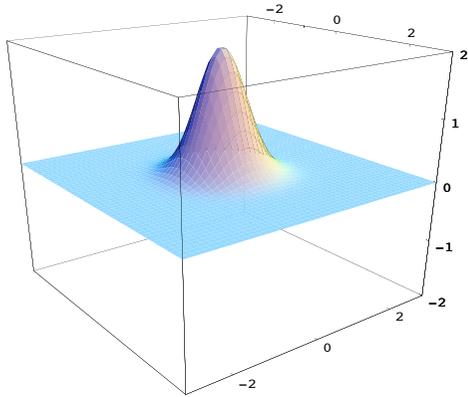
# Tomographie de l'état de vibration d'un ion

L'état le plus général d'un mode de vibration d'un ion unique est donné par son opérateur densité  $\rho^{(v)}$ , obtenu en traçant l'opérateur densité global  $\rho$  sur les variables internes de l'ion. Une façon de déterminer cet opérateur consisterait à mesurer tous les éléments de matrice  $\rho^{(v)}_{nn}$ , (distribution du nombre de phonons  $P(n) = \rho^{(v)}_{nn}$  et cohérences  $\rho^{(v)}_{nn+q}$ ). Si le nombre de phonons est limité (existence d'une borne supérieure sur  $n$ ), cet opérateur a un nombre fini d'éléments de matrice, mais leur mesure directe est loin d'être évidente. Plutôt que de mesurer directement  $\rho^{(v)}$ , on préfère en général déterminer la distribution de Wigner  $W$  de l'état de vibration de l'ion. Elle est définie comme une quasi-distribution de probabilité dans l'espace de phase et sa connaissance est équivalente à celle de  $\rho^{(v)}$  (voir cours des années antérieures). Nous partirons de la définition:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int du e^{-2ipu} \langle x + u / 2 | \rho^{(v)} | x - u / 2 \rangle \quad (4 - 18)$$

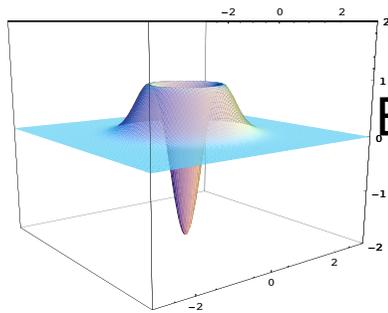
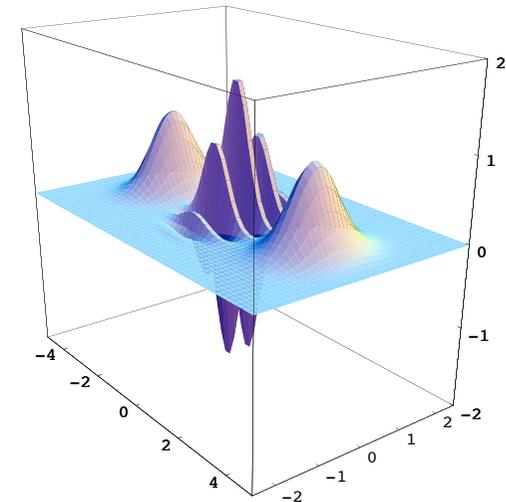
qui exprime  $W$  au point  $x, p$  de l'espace des phases comme la transformée de Fourier ( $TF$ ) de la fonction  $\langle x+u/2 | \rho^{(v)} | x-u/2 \rangle$  construite sur les éléments non-diagonaux de  $\rho^{(v)}$  en représentation  $X$ . On peut exprimer ces éléments en fonction de  $W$  par  $TF$  inverse, ce qui montre bien que la fonction de Wigner détermine complètement l'état de vibration.

# Fonctions de Wigner de quelques états de vibration remarquables



*Etat fondamental: gaussienne centrée à l'origine. Un état cohérent  $|\alpha\rangle$  est représenté par la même fonction dont le maximum est translaté de  $\alpha$  dans le plan complexe.*

Superposition d'états cohérents  $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$ : les gaussiennes représentent les deux composantes et les franges au centre (avec des parties négatives) décrivent la cohérence.



Etat de Fock à un photon: fonction à symétrie cylindrique (pas de phase) en forme de volcan avec cratère négatif au centre.

**Les valeurs  $< 0$  de  $W$  traduisent le caractère non-classique de l'état.**

# Une expression utile de $W$ en fonction de l'opérateur parité $\mathcal{P}$

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int du \langle u/2 | D(-\alpha) \rho^{(v)} D(\alpha) \mathcal{P} | u/2 \rangle = \frac{2}{\pi} \text{Tr} [ D(-\alpha) \rho^{(v)} D(\alpha) \mathcal{P} ] \quad ; \alpha = x + ip \quad (4-19)$$

avec

$$\mathcal{P} | x \rangle = | -x \rangle \text{ (opérateur Parité)} \quad (4-20) \quad (x \text{ et } p \text{ en unités } 2x_0 \text{ et } 2p_0)$$

La distribution  $W$  au point  $\alpha (x, p)$  est égale à  $2/\pi$  fois la valeur moyenne de l'opérateur parité dans l'état de vibration déplacé de  $-\alpha$ . Comme nous savons réaliser en pratique ces déplacements sur un état quelconque (application d'une force résonnante à l'ion pendant un temps approprié), il ne nous reste plus qu'à trouver une méthode pratique pour mesurer l'opérateur  $\mathcal{P}$ .

Pour justifier (4-19), on démontrera en exercice les égalités suivantes à partir desquelles (4-18) est facilement transformée en (4-19):

$$| x - u/2 \rangle = e^{-i(x-u)p} D(x+ip) | -u/2 \rangle \quad ; \quad \langle x + u/2 | = \langle u/2 | D(-x-ip) e^{i(x+u)p} \quad (4-21)$$

# L'opérateur $\mathcal{P}$ comme parité du nombre de phonons: une méthode pour le mesurer

En remarquant que la fonction d'onde d'un état de Fock  $|n\rangle$  a une parité  $(-1)^n$  on déduit simplement les relations:

$$\langle n | \mathcal{P} | x \rangle = \langle n | -x \rangle = (-1)^n \langle n | x \rangle \quad \forall x \rightarrow \mathcal{P} | n \rangle = (-1)^n | n \rangle \quad (4 - 22)$$

La valeur moyenne de  $\mathcal{P}$  dans un état de vibration ayant la loi de distribution de phonon  $P(n)$  est donc:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \sum_n (-1)^n P(n) \quad (4 - 23)$$

D'où le principe d'une recette pour mesurer  $W(x,p)$  pour un état de vibration quelconque (un mode):

(1) Translater cet état de  $-\alpha = -x-ip$  par application d'une force résonnante appropriée. (2)

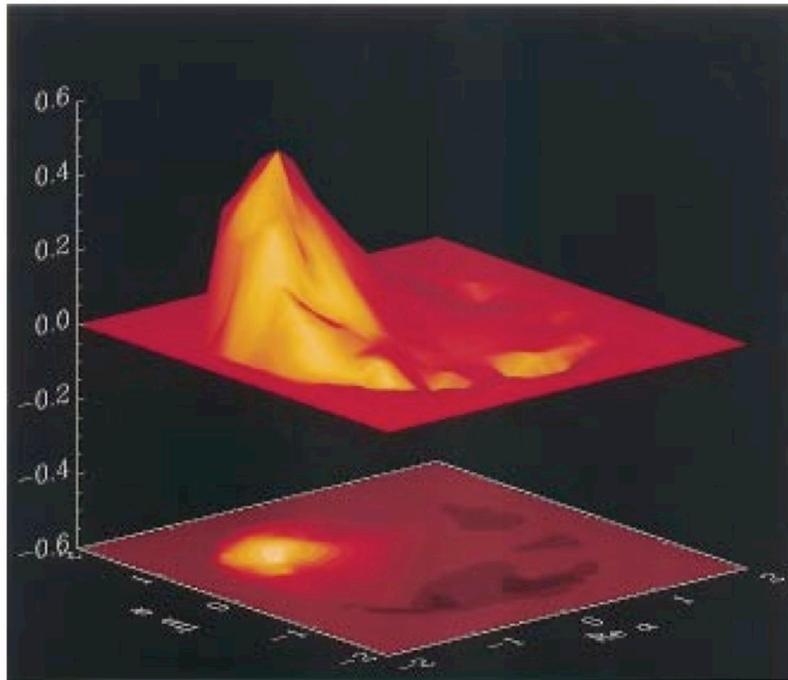
soumettre l'ion à une excitation sur 1<sup>ère</sup> bande latérale et détecter l'oscillation de Rabi. (3) par

transformée de Fourier, en déduire  $P(n)$ , puis  $\langle \mathcal{P} \rangle$ , ce qui donne  $W$  au point cherché. (4)

recommencer pour d'autres points....

# Reconstruction de la fonction de Wigner

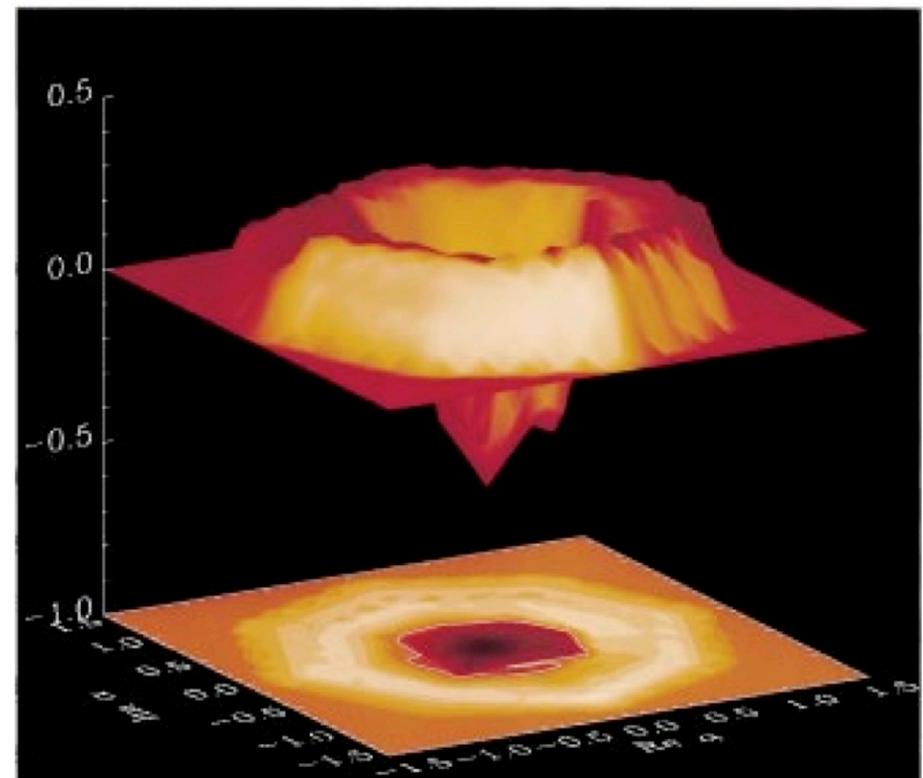
*D.Leibfried, D.Meekhof, B.King,  
C.Monroe, W.Itano et D.Wineland,  
PRL, 77, 4281 (1996)*



Etat cohérent de vibration

Etat de Fock à un phonon

*Analogie avec des méthodes de  
reconstruction de fonction de Wigner  
en CQED*

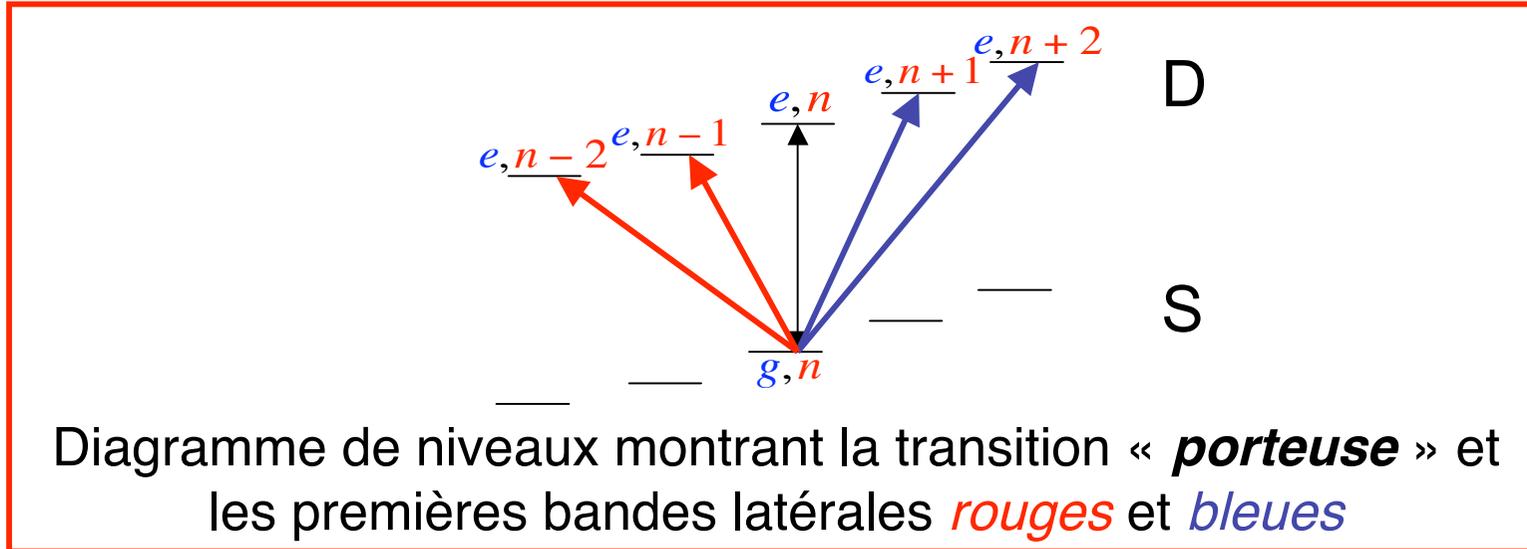


## 4B.

# Environnements sur mesure et décohérence d'un ion piégé

Comment réaliser des environnements artificiels pour l'état de vibration d'un ion piégé, en présence d'une émission spontanée contrôlée du qubit: schémas d'excitation laser «protégeant» des états spécifiques (voir aussi cours 2004-2005)

# Couplage ion-laser sur bandes latérales et porteuse (rappel)



Hamiltoniens d'interaction correspondant aux *bandes rouges*, *bleues* et à la porteuse (amplitude  $\Omega_L$ , phase  $\varphi$  du champ et inclinaison  $\theta_L$  sur  $O_z$  réglables):

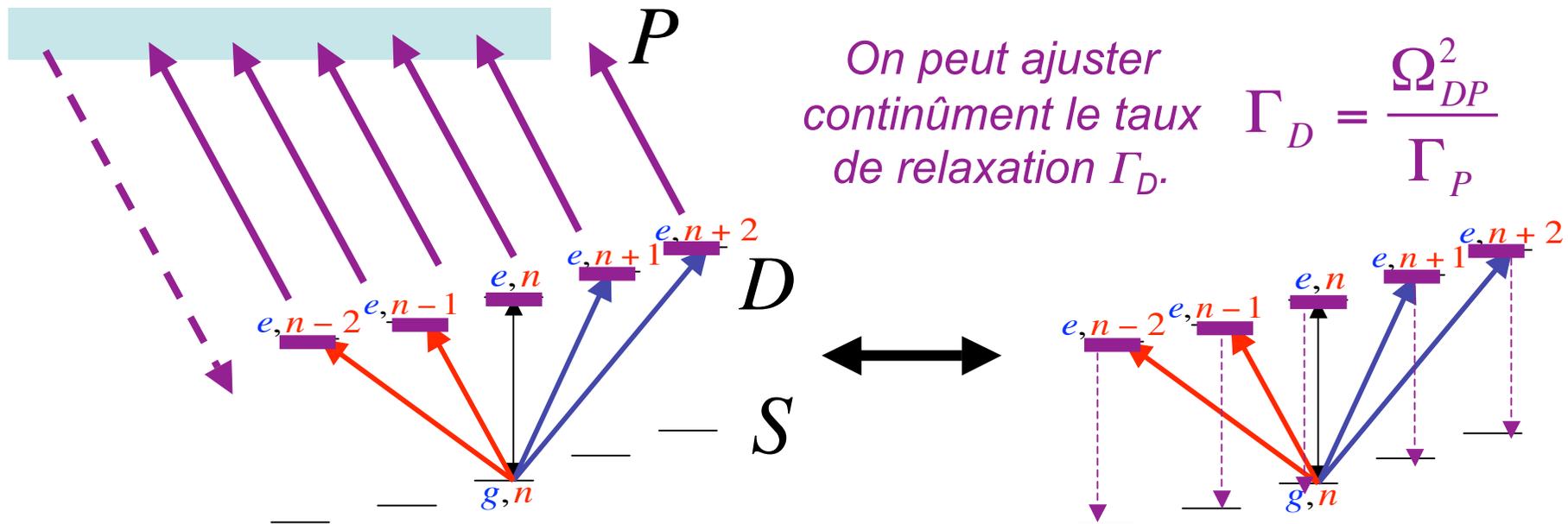
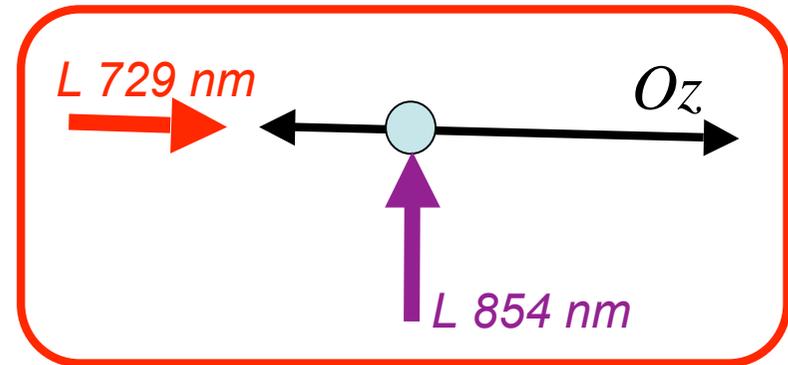
$$\hat{H}_{rq} \approx \hbar g_q \left( \sigma_+ D_q e^{-i\varphi} + \sigma_- D_q^\dagger e^{i\varphi} \right) \quad ; \quad \hat{H}_{bq} \approx (-1)^q \hbar g_q \left( \sigma_+ D_q^\dagger e^{-i\varphi} + \sigma_- D_q e^{i\varphi} \right)$$

$$g_q = -\frac{\Omega_L}{2} (\eta \cos \theta_L)^q e^{-(\eta^2 \cos^2 \theta_L)/2} \quad ; \quad D_q = f_q(a^\dagger a) (ia)^q \quad (4-24)$$

$$\tilde{H}_{porteuse} = \hbar g_0 (\sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{i\varphi}) D_0 \quad ; \quad g_0 = -\frac{\Omega_L}{2} e^{-(\eta^2 \cos^2 \theta_L)/2}, \quad D_0 = f_0(a^\dagger a)$$

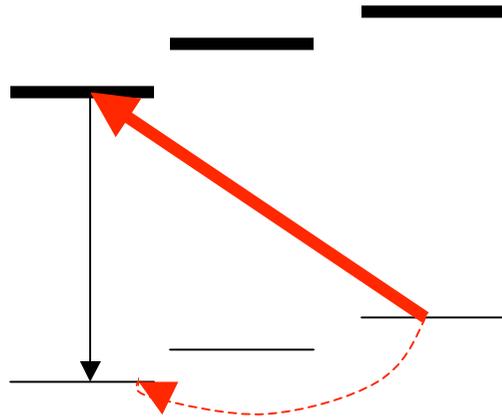
# Ajustement de la durée de vie radiative du niveau excité du qubit ( $^{40}\text{Ca}^+$ )

Destruction de la métastabilité (quenching) du niveau excité  $D$  du qubit: Le couplage (fréquence de Rabi  $\Omega_{DP} < \Gamma_P$ ) avec le niveau instable  $P$  ramène une fraction de l'instabilité  $\Gamma_P$  dans  $D$ .



Le transfert radiatif de  $D$  vers  $S$  s'effectue, pour  $\eta \ll 1$ , essentiellement par transition  $\Delta n=0$  (voir leçon 2).

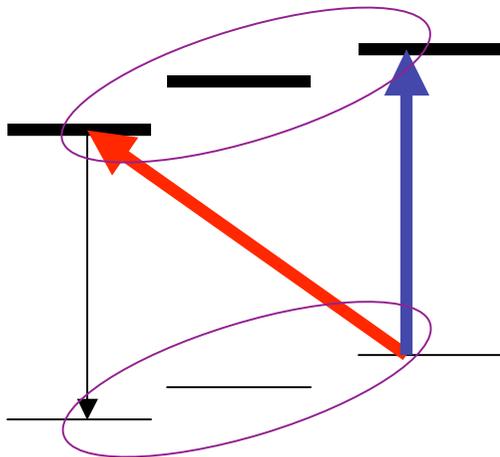
# Principe des réservoirs sur mesure



*Perte de phonons par paires*

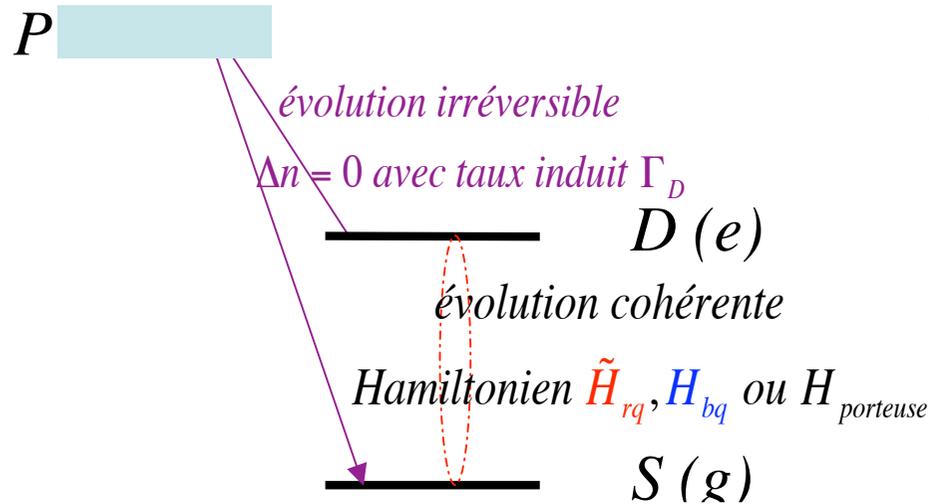
En éclairant un ion sur une bande latérale rouge d'ordre  $q$ , vers un niveau excité  $D$  ayant une durée de vie finie ajustable, on force l'ion à subir un processus dissipatif dans lequel il perd  $q$  phonons à chaque «saut». On crée ainsi un nouveau type d'environnement artificiel absorbant plusieurs phonons à la fois, généralisant le réservoir «naturel» d'un oscillateur dans lequel les quanta de vibration

disparaissent un à un. On peut également combiner plusieurs lasers sur bande latérale et porteuse pour «synthétiser» des opérateurs de saut de la forme  $a^q + \alpha I$  qui correspondent à des transitions ou deux (ou plusieurs) processus élémentaires interférent. L'exemple ci-contre montre que l'absorption cohérente



de 2 lasers sur bande rouge et porteuse suivie d'émission spontanée fait «sauter» un état initial de Fock sur une superposition cohérente d'états à nombre de phonons différents. Ces réservoirs artificiels sont intéressants pour protéger de la décohérence certains états de vibration (cours 2004-2005). Nous en rappelons la théorie dans les pages suivantes.

# Evolution de l'opérateur densité de l'ion sous l'effet de l'excitation laser $S-D$ et de la relaxation induite par le laser $D-P$



$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}, \tilde{\rho}] + \Gamma_D \sigma_- \tilde{\rho} \sigma_+ - \frac{\Gamma_D}{2} (\tilde{\rho} \sigma_+ \sigma_- + \sigma_+ \sigma_- \tilde{\rho}) \quad (4-25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^{(SS)}}{dt} &= -ig_q (D_q^\dagger \rho^{(DS)} e^{i\varphi} - \rho^{(SD)} D_q e^{-i\varphi}) + \Gamma_D \rho^{(DD)} \\ \frac{d\rho^{(DS)}}{dt} &= -ig_q (D_q \rho^{(SS)} e^{-i\varphi} - \rho^{(DD)} D_q^\dagger e^{i\varphi}) - \frac{\Gamma_D}{2} \rho^{(DS)} \\ \frac{d\rho^{(DD)}}{dt} &= -ig_q (D_q \rho^{(SD)} e^{-i\varphi} - \rho^{(DS)} D_q^\dagger e^{i\varphi}) - \Gamma_D \rho^{(DD)} \end{aligned} \quad (4-27)$$

Excitation de la bande rouge d'ordre  $q$ . Les  $\rho^{(a,a')}$  sont des opérateurs pour la variable de vibration. Attention à leur ordre avec les  $D_q$ .

# Elimination adiabatique des variables internes

Plaçons nous dans le régime où  $|g_q| \ll \Gamma_D$ . Le couplage cohérent induit par le laser  $S-D$  est alors dominé par l'évolution irréversible due au laser  $D-P$ . La probabilité de trouver l'ion dans  $D$  reste alors très petite avec la hiérarchie:

$$|\rho^{(DD)}| \ll |\rho^{(DS)}| \ll |\rho^{(SS)}| \quad (4-28)$$

En annulant les petites dérivées temporelles de  $\rho^{(DD)}$  et  $\rho^{(DS)}$  dans les équations (4-27), on obtient des relations algébriques reliant  $\rho^{(DD)}$  à  $\rho^{(DS)}$  puis  $\rho^{(DS)}$  au terme dominant  $\rho^{(SS)}$ . Physiquement,  $\rho^{(DD)}$  et  $\rho^{(DS)}$  s'ajustent adiabatiquement à la variation lente de  $\rho^{(SS)}$ . On obtient successivement:

$$\rho^{(DS)} = -\frac{2ig_q}{\Gamma_D} D_q \rho_{SS} e^{-i\varphi} \quad \text{puis} \quad \rho^{(DD)} = \frac{4g_q^2}{\Gamma_D^2} D_q \rho^{(SS)} D_q^\dagger \quad (4-29)$$

## Elimination des variables internes (suite)

En reportant ces expressions dans (4-27), on obtient finalement l'équation fermée d'évolution de  $\rho^{(SS)}$ , qui est une bonne approximation de celle de l'opérateur densité  $\rho^{(v)}$  du degré de vibration de l'ion (on a  $\rho^{(v)} = Tr_{S,D}(\rho) = \rho^{(SS)} + \rho^{(DD)} \approx \rho^{(SS)}$ ). D'où:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho^{(v)}}{dt} &\approx -\frac{2g_q^2}{\Gamma_D} \left( D_q^\dagger D_q \rho^{(v)} + \rho^{(v)} D_q^\dagger D_q \right) + \frac{4g_q^2}{\Gamma_D} D_q \rho^{(v)} D_q^\dagger \\ &= -\frac{1}{2} \left( L_q^\dagger L_q \rho^{(v)} + L_q^\dagger L_q \rho^{(v)} \right) + L_q \rho^{(v)} L_q^\dagger \\ \text{avec } L_q &= \frac{2g_q}{\sqrt{\Gamma_D}} D_q = \sqrt{\Gamma_q} D_q \quad \left( \Gamma_q = 4g_q^2 / \Gamma_D \right) \quad (4-30) \end{aligned}$$

L'évolution est décrite par une équation de Lindblad définie par un opérateur de saut quantique  $L_q$  annihilant  $q$  phonons. On obtient des équations de Lindblad similaires pour une excitation de bande latérale bleue (opérateur de saut  $L_q^\dagger$  créant  $q$  phonons).

# Premier exemple: un cryostat radiatif réalisé par excitation de la première bande rouge

Commençons par une excitation  $S$ - $D$  satisfaisant la condition de résonance  $\omega_L = \omega_{ds} - \omega_z$ . L'opérateur  $L$  correspondant s'écrit:

$$L_1 = \frac{2g_1}{\sqrt{\Gamma_D}} D_1 = -i \frac{\Omega_L}{\sqrt{\Gamma_D}} \eta \cos \theta_L e^{-\eta^2 \cos^2 \theta_L / 2} f_1(a^\dagger a) a \quad (4 - 31)$$

*(la phase globale de l'opérateur de Lindblad n'a pas de manifestation physique)*

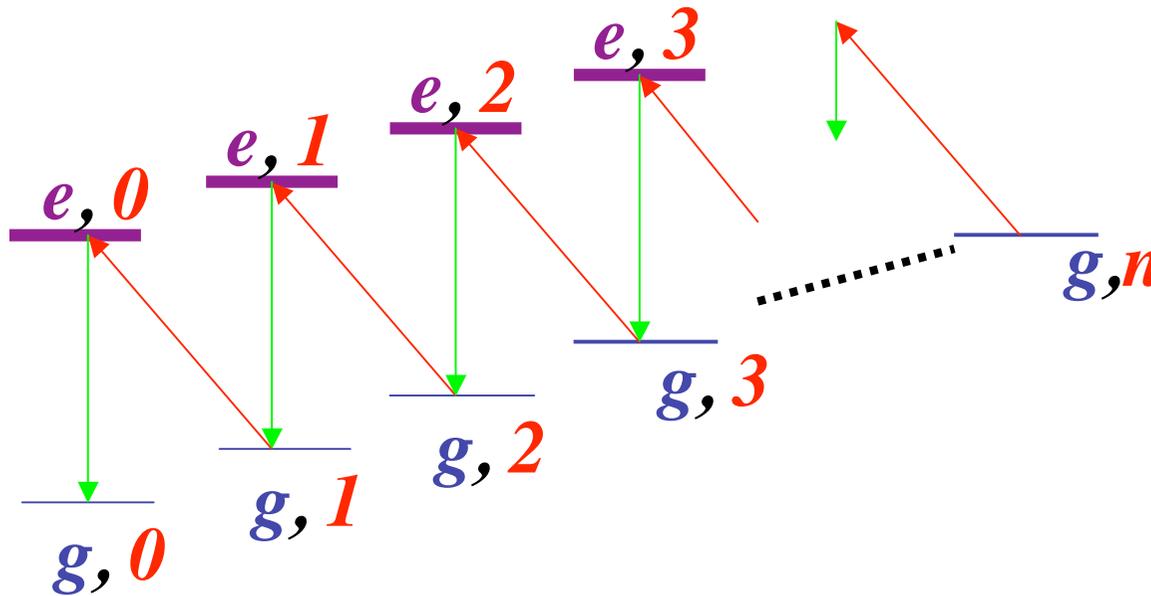
soit pour  $\eta \ll 1$  et  $\theta_L = 0$ :  $L_1 \approx \frac{\eta \Omega_L}{\sqrt{\Gamma_D}} a \quad (4 - 32)$

On a ainsi créé un environnement vibrationnel absorbant les phonons un à un avec un taux:

$$\Gamma_1 \approx \frac{\eta^2 \Omega_L^2}{\Gamma_D} \quad (4 - 33)$$

Il s'agit du refroidissement par bande latérale rouge décrit à la leçon 2. La vitesse du processus est réglable en jouant sur  $\Omega_L$ ,  $\eta$  et  $\Gamma_D$ .

# Cryostat radiatif idéal: un réservoir à T=0K



$$\begin{aligned} \frac{d\rho^{(v)}}{dt} &= \Gamma_1 a \rho^{(v)} a^\dagger \\ &\quad - \frac{\Gamma_1}{2} (a^\dagger a \rho^{(v)} + \rho^{(v)} a^\dagger a) \\ \Gamma_1 &= \frac{\eta^2 \Omega_L}{\Gamma_D} \quad (4-34) \end{aligned}$$

Evolution du nombre moyen de phonons:

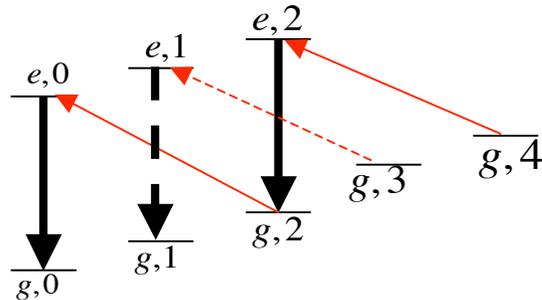
$$\begin{aligned} \frac{d\langle n \rangle}{dt} &= \sum_n n \frac{d\rho_{nn}^{(v)}}{dt} = -\Gamma_1 \langle n \rangle \\ \rightarrow \langle n(t) \rangle &= \langle n(0) \rangle e^{-\Gamma_1 t} \quad (4-35) \end{aligned}$$

et d'un état cohérent de vibration:

$$\begin{aligned} |\alpha(0)\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ \rightarrow |\alpha(t)\rangle &= |\alpha(0) e^{-\Gamma_1 t/2}\rangle \end{aligned}$$

Constante de temps du refroidissement:  $1/\Gamma_1 = \Gamma_D / \eta^2 \Omega_L$ . (Calcul valable pour  $\Gamma_D \gg \eta^2 \Omega_L$ ).

## Deuxième exemple: environnement absorbant les photons par paires



Laser accordé sur la 2<sup>nd</sup>e bande rouge ( $q=2$ ). Les états à nombre pair de phonons sont couplés entre eux ainsi que les états à nombre impair, sans interaction entre les deux familles ( $\eta$  assez petit pour négliger les processus spontanés changeant  $n$ ). On a:

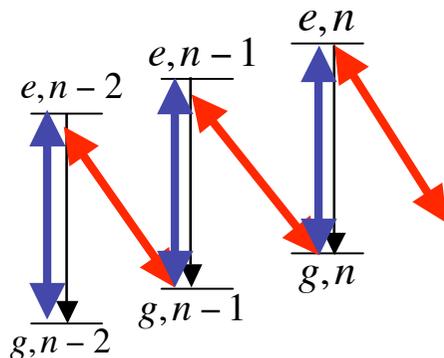
$$L_2 = -\frac{\Omega_L \eta^2 e^{-\eta^2/2}}{\sqrt{\Gamma}} f_2(a^\dagger a) a^2 \approx -\frac{\Omega_L \eta^2}{2\sqrt{\Gamma}} a^2 \quad (4-36)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_v = \Gamma_2 a^2 \tilde{\rho}_v a^{\dagger 2} - \frac{\Gamma_2}{2} [\tilde{\rho}_v a^{\dagger 2} a^2 + a^{\dagger 2} a^2 \tilde{\rho}_v] \quad \text{avec} \quad \Gamma_2 = \frac{\Omega_L^2 \eta^4}{4\Gamma} \quad (4-37)$$

L'ion aboutit dans un mélange de  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  qui dépend de l'état initial. De façon générale, l'ion soumis à une équation pilote avec opérateur de Lindblad  $L$  évolue vers un état stationnaire  $|\Psi\rangle_s$  propre de valeur propre nulle de  $L$ . Lorsque cet état est atteint sur une trajectoire de Monte Carlo, le système n'évolue plus (les sauts n'ont plus d'effet). Pour un environnement absorbant les photons 1 à 1, l'état stable est l'état fondamental qui satisfait  $a|0\rangle=0$ . Pour un environnement supprimant les photons par paires, c'est un état  $c_0|0\rangle+c_1|1\rangle$ . Cette analyse néglige l'existence de relaxation «ordinaire» à un phonon (on suppose que son taux  $\gamma$  est très petit devant  $\Gamma_2$ ; voir plus loin).

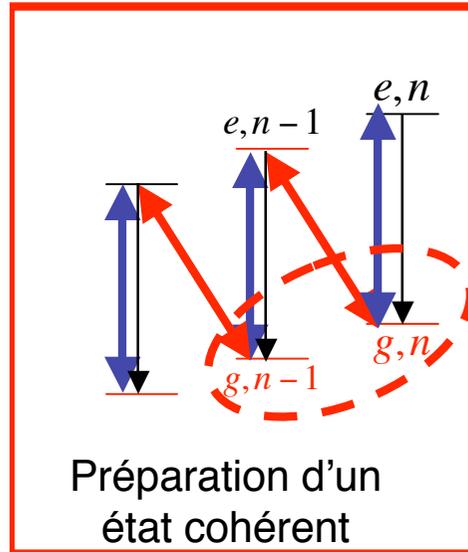
## Troisième exemple: stabilisation d'un état cohérent

Une condition suffisante pour qu'un état de vibration soit stable sous l'effet de l'environnement est qu'il soit état propre de valeur propre 0 de son opérateur de saut. Pour protéger de façon idéale un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , il suffit donc de réaliser l'environnement correspondant à l'opérateur de saut  $L \sim a - \alpha$  qui satisfait la condition  $L|\alpha\rangle = 0$ . Cet environnement est réalisé par la combinaison de deux lasers (dont la phase relative doit rester stable à l'échelle de la période de vibration de l'ion), de fréquences de Rabi  $\Omega_L^{(0)}$  et  $\Omega_L^{(1)}$ , respectivement accordés sur la porteuse et la première bande latérale rouge, dans le rapport d'amplitude  $\Omega_L^{(0)} / \Omega_L^{(1)} = -\alpha\eta$ . L'équation pilote en présence de cet environnement n'ayant qu'un état stationnaire, celui-ci ne peut être que l'état  $|\alpha\rangle$ , atteint après un temps de l'ordre de  $\Gamma / [\Omega_L^{(0)}]^2$ , à partir d'un état initial arbitraire. On peut en particulier partir de l'état de vibration fondamental  $|0\rangle$ . Lorsque cet état stationnaire est atteint, la fréquence des sauts s'annule, ce qui signifie que l'ion cesse d'émettre: la fluorescence disparaît.



Le processus préparant l'état cohérent résulte de la compétition entre un effet Raman (flèches bleue et rouge) induit par le laser et l'émission spontanée (flèches noires).

# Les états cohérents protégés sont des «états noirs»



La configuration de laser que nous venons de décrire produit en combinaison avec l'émission spontanée (qui en première approximation ne change pas  $n$ ), des cohérences  $\Delta n=1$  entre états de vibration de l'ion dans l'état  $g$ . L'état qui se construit progressivement finit par avoir des relations de phase entre états  $n$  telles qu'il ne peut plus, en raison d'interférence destructrice entre amplitudes de transition, absorber le rayonnement. L'ion tombe dans un « **état noir** » (état cohérent). Il y a ainsi un lien entre la fabrication d'environnements artificiels et **le piégeage cohérent de population**, un effet qui joue

un rôle important dans d'autres domaines de l'optique quantique. Dans le cas de la protection d'un état cohérent, l'état noir est atteint lorsque les amplitudes d'excitation de l'état  $|e, n-1\rangle$  à partir des états  $|g, n\rangle$  et  $|g, n-1\rangle$  se compensent. Appelant  $c_n$  l'amplitude de l'état  $|n\rangle$ , on a alors:

$$c_n \Omega_L^{(1)} \eta \sqrt{n} + c_{n-1} \Omega_L^{(0)} = 0 \quad \text{soit} \quad c_n / c_{n-1} = -\Omega_L^{(0)} / \Omega_L^{(1)} \eta \sqrt{n} \quad (4-38)$$

ce qui définit bien les rapports des amplitudes dans l'état cohérent  $|\alpha = -\Omega_L^{(0)} / \Omega_L^{(1)} \eta\rangle$ .

# Environnement protégeant un chat de Schrödinger?

Comme généralisation immédiate du cas précédent, considérons la combinaison d'un laser sur la deuxième bande bleue et d'un laser résonnant avec la porteuse, tel que le rapport de leurs fréquences de Rabi réalise l'opérateur de Lindblad artificiel:

$$L = \sqrt{\Gamma_2} (a^2 - \alpha^2 I) \quad (4 - 39)$$

Les états propres de valeur propre nulle de cet opérateur de saut sont de type chat de Schrödinger:

$$(a^2 - \alpha^2 I)(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) = 0 \quad (4 - 40)$$

L'ion dans l'état de vibration  $|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$  (ou dans une combinaison linéaire de ces états) ne subit plus de saut (et n'évolue pas non plus sous l'effet du hamiltonien non unitaire  $-ih\Gamma_2 L^\dagger L/2$ ). Il reste stable vis à vis du processus de relaxation artificiel. S'il n'y est pas initialement, il va tendre vers l'un de ces états. Cette description néglige cependant l'effet de la dissipation ordinaire (avec opérateur de saut  $\sim a$ ) qui va «mélanger» les deux états «chat» entre eux et produire une décohérence que l'environnement artificiel ne peut pas empêcher. La situation est différente dans le cas d'un opérateur de saut possédant une valeur propre nulle *non dégénérée* (voir page suivante).

# Environnement artificiel et naturel (*cas du Ca<sup>+</sup>*)

Le modèle d'environnement artificiel correspond à une hiérarchie de constantes de temps décrite par les inégalités:

$$\gamma \ll \frac{g_q^2}{\Gamma_D} \ll \Gamma_D \ll \Gamma_P \quad (4 - 41)$$

Le taux d'amortissement  $\gamma$  correspond à la constante de temps de relaxation de vibration «naturelle», typiquement de l'ordre de  $10 \text{ s}^{-1}$  (100 ms est le temps caractéristique d'apparition ou de perte spontanée de phonons thermiques). A l'autre extrémité, la largeur naturelle  $\Gamma_P$  du niveau excité  $P$  de l'ion est  $\sim 10^8 \text{ s}^{-1}$ . Une petite partie de ce taux est ramenée dans  $D$ , donnant le taux de recyclage  $\Gamma_D \sim 10^5 \text{ s}^{-1}$ . Ce taux est grand devant celui de la relaxation induite par l'environnement artificiel, fixé par l'amplitude des lasers,  $g_q^2/\Gamma_D \sim 10^4 \text{ s}^{-1}$ . Cette quantité doit être enfin grande devant le taux spontané  $\gamma$  pour que l'effet de l'environnement artificiel domine. Si cet environnement possède un état stable non dégénéré correspondant à une valeur propre nulle de l'opérateur de Lindblad, une solution numérique de l'équation pilote complète montre que cet état est protégé par l'environnement artificiel de la relaxation produite par l'environnement spontané. C'est le cas des états cohérents décrits plus haut, mais pas celui des chats de phase qui sont des états propres dégénérés de  $\alpha^2 - \alpha^2 I$ , et donc ne sont pas protégés de la décohérence ordinaire.

# Conclusion de la quatrième leçon

La manipulation d'états cohérents de vibration d'un ion piégé permet de faire des expériences d'école sur les déplacements d'un oscillateur dans son espace de phase. Les séparations et recombinaisons des paquets d'onde cohérents sont testées par des interférences atomiques observées sur les états internes de l'ion. Les translations de l'ion dans l'espace des phases permettent une reconstitution complète de son état de vibration. Nous verrons (leçon 6) que ces translations, grâce aux déphasages topologiques qu'elles induisent, sont utilisées pour la réalisation de portes de logique quantique.

Nous avons vu aussi que l'irradiation d'un ion par des lasers de fréquence et amplitudes ajustées permet (en conjonction avec un processus d'émission spontanée de l'état excité) de produire un mécanisme de relaxation artificiel pour l'état de vibration avec des opérateurs de saut adaptés à la protection de certains types d'états. Sur la théorie de ces effets: *R.L.de Matos Filho et W.Vogel, Phys.Rev.Lett. 76, 608 (1996); J.F.Poyatos, J.I.Cirac et P.Zoller, Phys.Rev.Lett. 77, 4728 (1996); A.Carvalho, P.Milman, R.L.de Matos Filho et L.Davidovich, Phys.Rev.Lett. 86, 4988 (2001)*. Pour une description de quelques expériences d'environnements artificiels, voir: *C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe, D. J. Wineland, Nature 403, 269 - 273 (2000)*. ***Les leçons suivantes seront consacrées à l'analyse d'expériences exploitant les effets physiques que nous venons d'étudier pour réaliser différents types de portes et d'opérations d'information quantique avec des chaînes d'ions piégés.***