

# 5.

## Logique quantique avec des ions piégés (I)

27 Février 2006

5A. Portes de phase et C-not à deux qubits

5B. Téléportation quantique (une expérience à trois qubits)

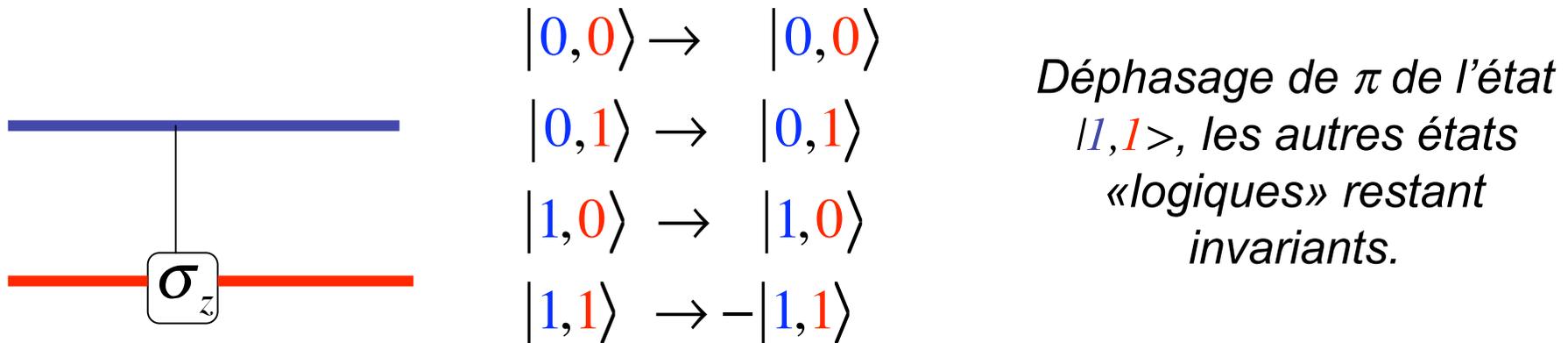
## 5A.

### Portes de phase et C-not à deux qubits

Définition des portes de phase et C-not. Lien entre elles. Principe de la porte de Cirac-Zoller. Réalisation partielle (Boulder 1995) et complète (Innsbruck 2003). Utilisation des impulsions composites. Tomographie complète de l'opération de la porte. Mesure de sa fidélité.

# Définition d'une porte de phase à 2 qubits

Les états propres de valeurs propres  $\pm 1$  de  $\sigma_z$  sont notés  $0$  et  $1$ . La porte de phase agissant sur les états « logiques »  $|0,0\rangle$ ,  $|0,1\rangle$ ,  $|1,0\rangle$ ,  $|1,1\rangle$  fait l'opération  $\sigma_z$  sur le *qubit cible* ssi le *qubit contrôle* est dans  $|1\rangle$ . Le *contrôle* reste dans son état initial:



Comme toute porte à deux qubits, la porte de phase peut générer de l'intrication quand les états initiaux sont des superpositions de  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ :

$$(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle + (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle \quad (5-1)$$

***On réalise ainsi des états maximalement intriqués des qubits***

# De la porte de phase à la porte C-not

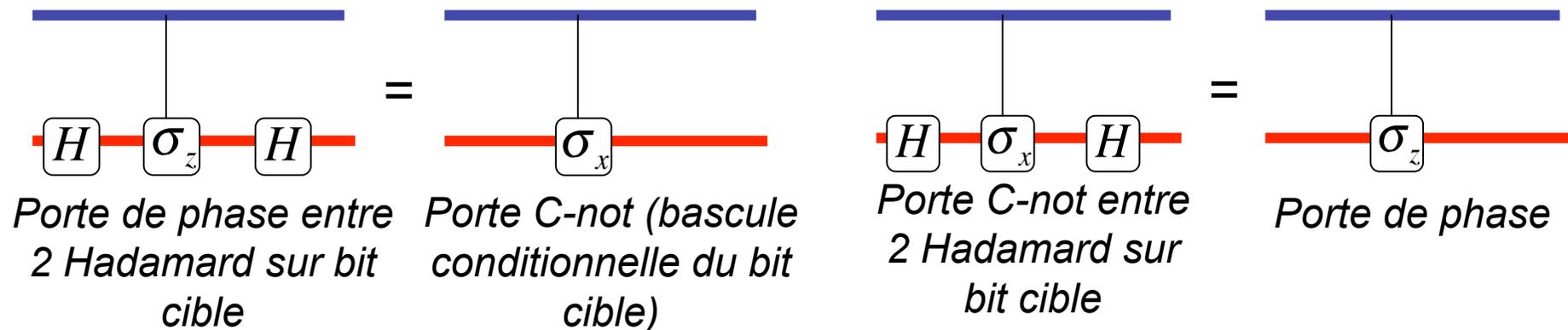
En combinant la porte de phase avec des portes à un bit, on peut réaliser d'autres portes logiques. Considérons la transformation de Hadamard:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

qui obéit aux relations suivantes (déduites des propriétés des opérateurs  $\sigma_i$ ):

$$H^2 = I \quad ; \quad H\sigma_z H = \sigma_x \quad , \quad H\sigma_x H = \sigma_z \quad (5-3)$$

D'où les relations réciproques entre porte de phase (opération  $\sigma_z$  conditionnelle) et porte c-not (opération  $\sigma_x$  conditionnelle):



# Autre réalisation de porte C-not à partir de porte de phase

On obtient aussi une C-not avec une porte de phase en «sandwich» entre 2 rotations  $\pi/2$  du qubit cible (plus faciles à réaliser que des H). Rappelons l'expression générale de la rotation d'un qubit de l'angle de Rabi  $\Omega\tau$  autour de l'axe  $n$  de la sphère de Bloch (angles polaires  $\theta, \varphi$ ) en fonction de la combinaison d'opérateurs  $\sigma_n = \sigma_z \cos\theta + \sigma_x \sin\theta \cos\varphi + \sigma_y \sin\theta \sin\varphi$ :

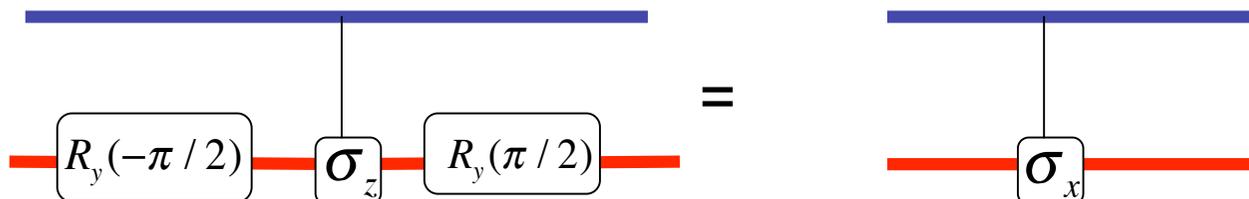
$$R_{\vec{n}}(\Omega\tau) = \exp\left(-i \frac{\Omega\tau}{2} \sigma_{\vec{n}}\right) = \cos \frac{\Omega\tau}{2} I - i \sin \frac{\Omega\tau}{2} \sigma_{\vec{n}} \quad (5-4)$$

Les rotations d'angle  $\Omega\tau = \pm\pi/2$  autour de  $0_y$  (réalisées par impulsions résonantes sur la porteuse de durée et phase appropriées) correspondent à:

$$R_y(\pm\pi/2) = e^{\mp i \frac{\pi}{4} \sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (I \mp i \sigma_y)$$

avec  $R_y(+\pi/2)R_y(-\pi/2) = I$  et  $R_y(+\pi/2)\sigma_z R_y(-\pi/2) = \sigma_x$  (5-5)

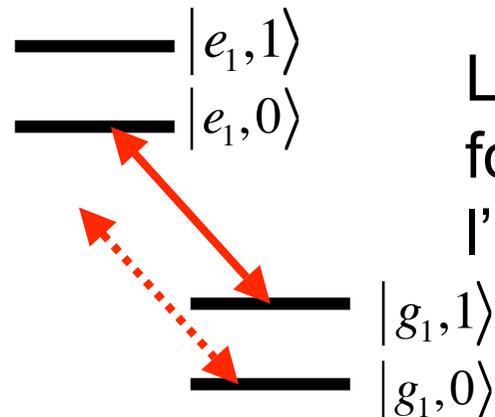
D'où la correspondance:



# Principe de la porte de Cirac et Zoller (C-Z)

La première proposition de réalisation de logique quantique avec une chaîne d'ions piégés (*Cirac et Zoller (PRL, 74, 4091 (1995))*) peut se résumer ainsi: deux ions d'une chaîne communiquent par l'intermédiaire de leur couplage au même mode de phonon collectif. La porte est réalisée en trois étapes: (i) Une impulsion laser accordée sur la première bande latérale (rouge ou bleue) copie l'état du qubit contrôle (ion 1) sur un mode de vibration collectif, dans une superposition d'états à 0 et 1 phonon. (ii) une impulsion laser appliquée à l'ion cible 2 réalise une oscillation de Rabi qui dépend de l'état de vibration induit par l'ion 1. Les paramètres de cette impulsion sont réglés pour réaliser une porte de phase dans laquelle la vibration est le contrôle et l'ion 2 la cible. (iii) une dernière impulsion appliquée à l'ion 1 recopie sur lui l'état de vibration, remettant ainsi le bit contrôle dans son état initial et complétant la logique de la porte. Nous allons maintenant détailler les étapes successives de cette procédure.

## Première étape: copie du qubit contrôle sur le mode de vibration



Le mode de vibration est refroidi dans son état fondamental. L'état initial le plus général de l'ion qubit 1 en présence du mode est:

$$|\Psi_0\rangle = [c_g |g_1\rangle + c_e |e_1\rangle] \otimes |0\rangle \quad (5-6)$$

On applique une impulsion sur la première bande rouge qui couple de façon résonnante  $|e_1, 0\rangle$  à  $|g_1, 1\rangle$ , mais laisse  $|g_1, 0\rangle$  non affecté (voir figure). On règle la durée de l'impulsion pour réaliser un pulse  $\pi$ , et la phase du laser pour avoir:

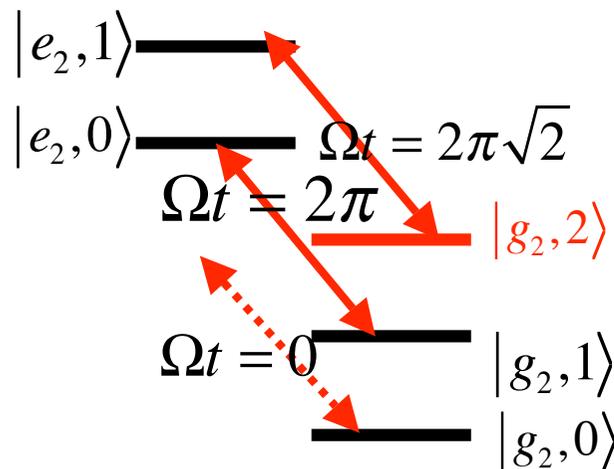
$$|e_1, 0\rangle \rightarrow |g_1, 1\rangle \quad ; \quad |g_1, 0\rangle \rightarrow |g_1, 0\rangle \quad (5-7)$$

On en déduit la transformation induite sur l'ion 1, qui laisse le qubit 1 dans son état fondamental, non intriqué avec la vibration:

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow [c_g |0\rangle + c_e |1\rangle] \otimes |g_1\rangle \quad (5-8)$$

L'état du qubit contrôle a bien été copié sur le mode de vibration.

## 2<sup>ème</sup> étape: comment faire la porte de phase entre le mode de vibration et le 2<sup>nd</sup> qubit?



L'ion 2 et le mode de vibration sont dans un état appartenant à l'espace sous-tendu par les 4 états  $|g_2,0\rangle$ ,  $|g_2,1\rangle$ ,  $|e_2,0\rangle$  et  $|e_2,1\rangle$ . Il faut les faire interagir pour réaliser entre eux une porte de phase. L'idée est d'appliquer à l'ion 2, à l'aide d'un laser sur la première bande rouge une impulsion de Rabi  $2\pi$  dont l'effet est de déphaser de  $\pi$  les états impliqués dans la transition. Cette impulsion conduit à:

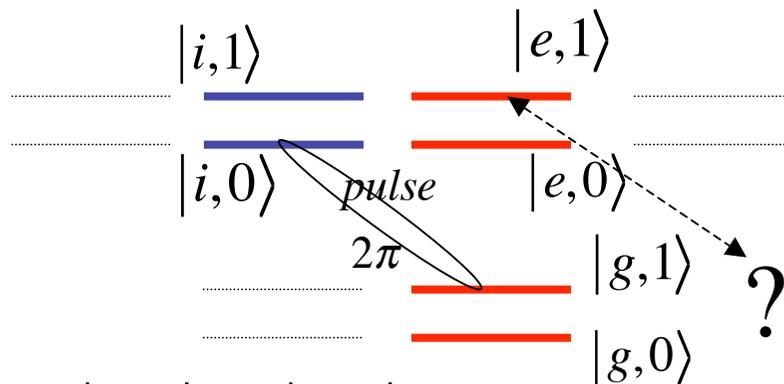
$$|g_2,0\rangle \rightarrow |g_2,0\rangle ; |g_2,1\rangle \xrightarrow{\text{pulse } 2\pi} -|g_2,1\rangle \quad (5-9)$$

$$|e_2,0\rangle \xrightarrow{\text{pulse } 2\pi} -|e_2,0\rangle ; |e_2,1\rangle \xrightarrow{\text{pulse } 2\pi\sqrt{2}} \cos(\pi\sqrt{2})|e_2,1\rangle + \sin(\pi\sqrt{2})|g_2,2\rangle$$

Les 3 premières relations ont la bonne forme, mais la dernière fait sortir le «qubit de vibration» de son espace à 2 dimensions (le couplage laser entre l'état  $|e\rangle$  de l'ion et l'état à 1 phonon sur la bande rouge crée un second phonon car la condition de pulse  $2\pi$  n'est réalisée que dans la multiplicité  $|e,0\rangle$ ,  $|g,1\rangle$ . Comment résoudre cette difficulté?

# La méthode C-Z: appliquer le laser sur une transition ne couplant qu'un des états du bit

Pour éviter que l'état  $|e\rangle$  du qubit cible interagisse avec l'état  $|1\rangle$  du mode de vibration contrôle (conduisant de  $|e,1\rangle$  à  $|g,2\rangle$ ), on effectue une transition laser qui couple (sur la première bande latérale rouge)  $|g\rangle$  à un état troisième état auxiliaire  $|i\rangle$  (sous niveau Zeeman appartenant au niveau électronique de l'état  $|e\rangle$ ). La polarisation de ce laser est telle que les niveaux  $|g\rangle$  et  $|i\rangle$  sont couplés alors que  $|e\rangle$  n'est couplé à aucun état (voir figure).



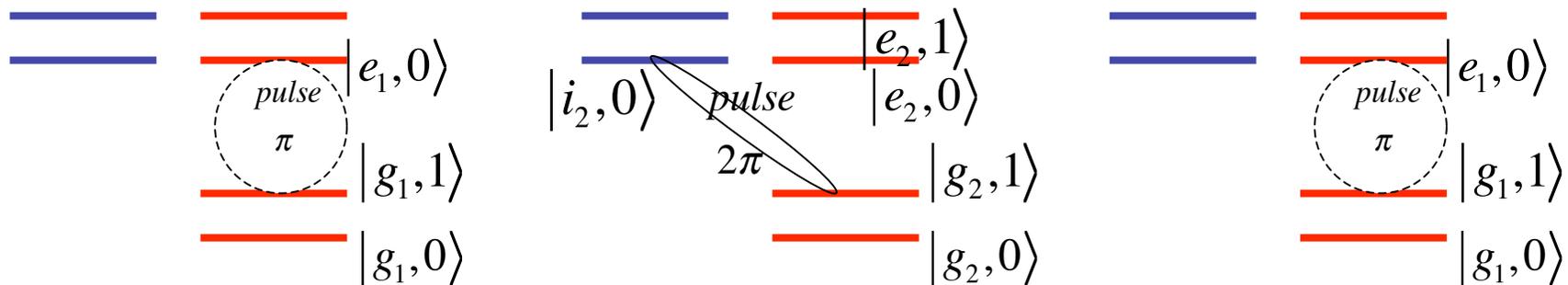
$$\begin{aligned}
 |g,0\rangle &\rightarrow |g,0\rangle \\
 |g,1\rangle &\xrightarrow[\text{passage dans } |i,0\rangle]{\text{pulse } 2\pi \text{ (pol } \sigma_-)} -|g,1\rangle \\
 |e,0\rangle &\rightarrow |e,0\rangle \quad ; \quad |e,1\rangle \rightarrow |e,1\rangle
 \end{aligned}$$

(5 – 10)

**Qubit défini sur une transition  $F=1/2 \rightarrow F=3/2$ :** Les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  sont couplés par transition polarisée en  $\pi$ . Le niveau auxiliaire  $|i\rangle$ , dans  $F=3/2$ , est couplé à  $|g\rangle$  par transition  $\sigma_-$ . Un pulse Rabi  $2\pi$  sur cette transition fait passer intermédiairement le système de  $|g,1\rangle$  à  $|i,0\rangle$  avec retour final dans  $|g,1\rangle$  (et changement de phase de  $\pi$ ). L'état  $|e,1\rangle$  n'est couplé en  $\sigma_-$  à aucun état de  $F=1/2$  et reste (comme  $|e,0\rangle$ ) non affecté.

# Troisième étape et récapitulation

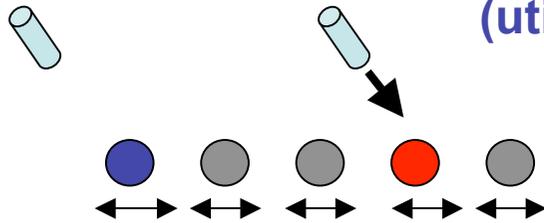
La méthode C-Z utilise 2 transitions de polarisations différentes:  $\pi$  pour copier l'état de l'ion 1 sur le mode de vibration et  $\sigma_-$  pour intriquer ce mode avec l'ion 2. La 3<sup>ème</sup> étape, identique à la 1<sup>ère</sup>, recopie enfin l'état du mode sur l'ion 1 (laissé dans l'état  $|g\rangle$  après la 1<sup>ère</sup> impulsion). Elle est à nouveau réalisée par un pulse d'angle  $\pi$ , avec un laser sur la 1<sup>ère</sup> bande rouge en polarisation  $\pi$  (ne pas confondre les 2 sens de « $\pi$ »). Elle réalise la transformation  $|g_1, 1\rangle \rightarrow -|e_1, 0\rangle$ . La séquence des 3 impulsions est résumée ci-dessous (l'état du qubit non concerné à chaque étape est entre parenthèses). L'ensemble réalise la table d'*une porte de phase*, le mode revenant à l'état initial ( $|0\rangle$ ).



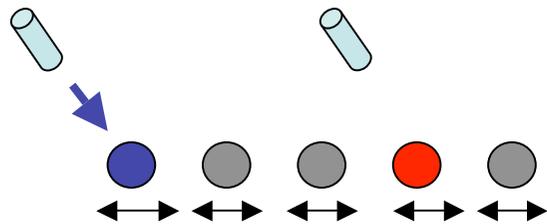
$$\begin{aligned}
 |g_1, (g_2); 0\rangle &\rightarrow |g_1, (g_2); 0\rangle = |(g_1), g_2; 0\rangle \rightarrow |(g_1), g_2; 0\rangle = |g_1, (g_2); 0\rangle \rightarrow |g_1, g_2; 0\rangle \\
 |g_1, (e_2); 0\rangle &\rightarrow |g_1, (e_2); 0\rangle = |(g_1), e_2; 0\rangle \rightarrow |(g_1), e_2; 0\rangle = |g_1, (e_2); 0\rangle \rightarrow |g_1, e_2; 0\rangle \\
 |e_1, (g_2); 0\rangle &\rightarrow |g_1, (g_2); 1\rangle = |(g_1), g_2; 1\rangle \rightarrow -|(g_1), g_2; 1\rangle = -|g_1, (g_2); 1\rangle \rightarrow |e_1, g_2; 0\rangle \\
 |e_1, (e_2); 0\rangle &\rightarrow |g_1, (e_2); 1\rangle = |(g_1), e_2; 1\rangle \rightarrow |(g_1), e_2; 1\rangle = |g_1, (e_2); 1\rangle \rightarrow -|e_1, e_2; 0\rangle
 \end{aligned}$$

# Schéma d'une porte C-not entre 2 ions

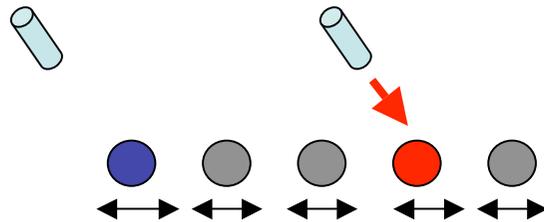
(utilisation du mode de vibration CM)



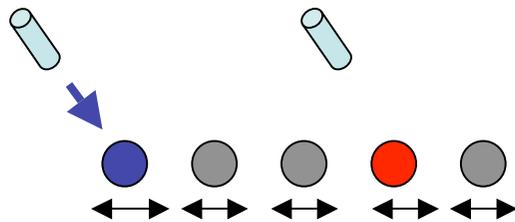
1. **Porte  $R_y(-\pi/2)$  sur ion 2:** pulse laser angle de Rabi  $\pi/2$  polarisation  $\pi$ , fréquence  $\omega_L = \omega_{eg}$  (porteuse).



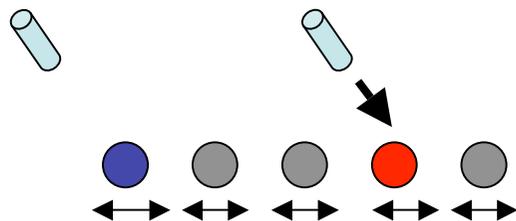
2. **Copie du qubit 1 sur mode de vibration:** pulse laser angle de Rabi  $\pi$ , polarisation  $\pi$ , fréquence  $\omega_L = \omega_{eg} - \omega_z$  (1ère bande latérale rouge)



3. **Intrication de l'ion 2 avec le mode de vibration:** pulse laser angle de Rabi  $2\pi$ , polarisation  $\sigma_-$ , fréquence  $\omega_L = \omega_{eg} - \omega_z$  (1ère bande latérale rouge).



4. **Recopie du mode de vibration sur qubit 1:** pulse laser angle de Rabi  $\pi$ , polarisation  $\pi$ , fréquence  $\omega_L = \omega_{eg} - \omega_z$  (1ère bande latérale rouge)



5. **Porte  $R_y(\pi/2)$  sur ion 2 inverse de l'opération 1:** pulse laser angle de Rabi  $\pi/2$ , polarisation  $\pi$ , fréquence  $\omega_L = \omega_{eg}$  (porteuse).

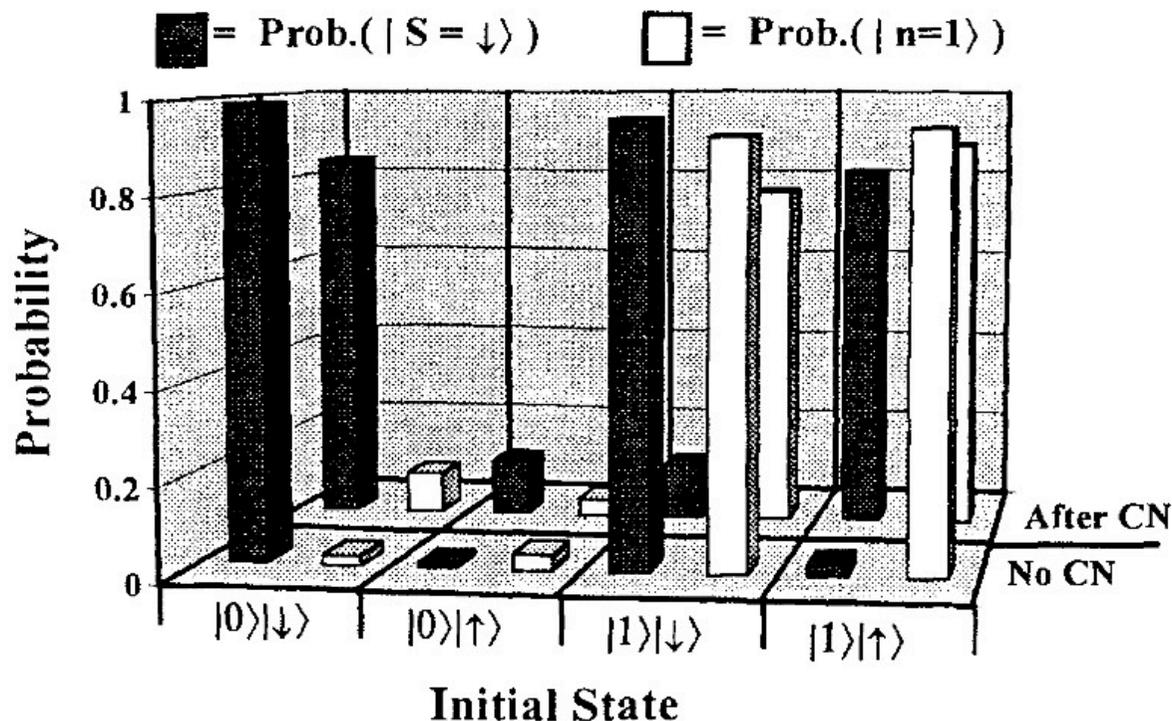
# Première démonstration (partielle) sur un ion

*C.Monroe, D.Meekhof, B.King, W.Itano et D.Wineland (PRL, 75, 4714 (1995))*

Expérience réalisée avec un seul ion, démontrant le «cœur» du processus Cirac-Zoller: intrication de la vibration avec l'état interne du qubit. La procédure est à quelques détails près identique à celle analysée plus haut concernant l'ion 2 et le mode de vibration. Manquent les étapes 2 et 4 (copie de l'ion 1 sur le mode de vibration et vice versa). Les états qubits sont les deux sous-niveaux hyperfins du  $Be^+$   $|1,1\rangle$  ( $|g\rangle$ ) et  $|2,2\rangle$  ( $|e\rangle$ ) décrits à la leçon 3. Les transitions laser directes sont remplacées par des processus Raman. L'état auxiliaire  $|i\rangle$  est le sous niveau Zeeman  $|2,1\rangle$ .

L'opération est testée en préparant les états initiaux  $|g,0\rangle, |g,1\rangle, |e,0\rangle$  et  $|e,1\rangle$  et en mesurant l'état final dans chacun de ces cas. La mesure de l'état du qubit se fait suivant la méthode de fluorescence. Celle de la vibration est réalisée dans une deuxième séquence, en répétant la procédure, en «copiant»  $|n\rangle$  sur l'état interne du qubit (dont l'état est connu grâce à la première série de mesures), puis en mesurant à nouveau le qubit par fluorescence. Les résultats (page suivante) démontrent la bonne fidélité de la porte.

# La table de vérité de la porte expérimentale Cirac-Zoller à un ion



*La vibration (0 ou 1 phonon) est le bit contrôle et l'état interne de l'ion le bit cible.*

**Rangée horizontale avant: pas d'application de la porte.**

**Rangée horizontale arrière: la porte est appliquée.**

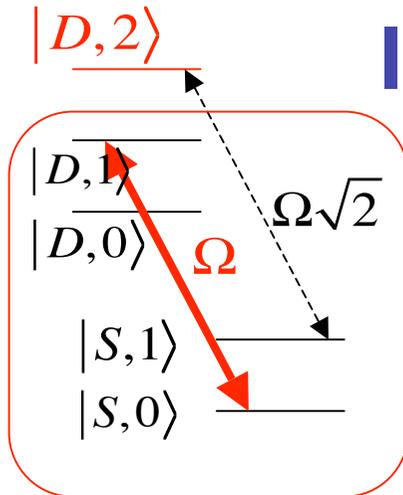
L'état final correspondant à chacun des 4 états initiaux possibles est mesuré par la probabilité de trouver le qubit phonon (histogramme blanc) dans l'état 1 et le qubit ion (histogramme noir) dans l'état  $|g\rangle$  (noté ici  $|S = \downarrow\rangle$ ). Les résultats permettent d'évaluer la fidélité de la porte (idéalement, les petites barres devraient être nulles et les grandes égales à l'unité).

# Réalisation d'une porte C-Z à 2 ions (Innsbruck)

*F.Schmidt-Kaler, H.Häffner, M.Riebe, S.Gulde, G.Lancaster, T.Deuschle, C.Becher, C.Roos, J.Eschner et R.Blatt, Nature, 422, 408 (2003).*

La première réalisation complète d'une porte C-not à deux ions suivant une procédure voisine de celle proposée par CZ a été faite sur deux ions  $Ca^+$ . La méthode utilisée pour éviter de sortir de l'espace de calcul (en générant des états à 2 phonons) est cependant différente de celle imaginée par CZ. Elle ne nécessite plus de faire intervenir un troisième état interne auxiliaire des ions, mais se base sur les propriétés de *pulses de Rabi composites* couramment utilisés en RMN. Nous allons détailler l'étape 3 modifiée du processus CZ, les autres étapes étant identiques à celles décrites plus haut. Notons que  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  sont maintenant appelés  $|S\rangle$  et  $|D\rangle$  respectivement (notation du  $Ca^+$  voir leçon 2). Le mode de vibration utilisé est le mode accordéon.

# Intrication par impulsion composite



Comment éviter que l'impulsion  $2\pi$  qui intrique l'ion 2 et le mode de vibration ne fasse sortir le système de l'espace de calcul? L'intrication est réalisée maintenant sur la bande bleue du mode de vibration choisi ( $\omega_L = \omega_{eg} + \omega_v$ ). Une impulsion  $2\pi$  directe conduirait aux transformations:

$$|D,0\rangle \rightarrow |D,0\rangle \quad ; \quad |S,0\rangle \xrightarrow[\omega_L = \omega_{DS} + \omega_v]{\text{pulse } 2\pi} -|S,0\rangle \quad ; \quad |D,1\rangle \xrightarrow[\omega_L = \omega_{DS} + \omega_v]{\text{pulse } 2\pi} -|D,1\rangle$$

$$|S,1\rangle \xrightarrow[\omega_L = \omega_{DS} + \omega_v]{\text{pulse } 2\pi\sqrt{2}} \cos(\pi\sqrt{2})|S,1\rangle + \sin(\pi\sqrt{2})|D,2\rangle \quad (5-11)$$

En scindant en quatre l'impulsion sur bande bleue et en ajustant les durées et phases de chaque partie, on décompose l'opération en *produit de 2 rotations d'un angle  $\pi$  autour de  $Ox$  dans l'espace de Bloch du «spin composite»  $|S,0\rangle$ ,  $|D,1\rangle$ , combinées à 2 rotations d'un angle  $\varphi$  (à préciser) autour de  $Oy$*  :

$$R_y^b(\varphi) R_x^b(\pi) R_y^b(\varphi) R_x^b(\pi) =$$

$$\left[ \left( \cos \frac{\varphi}{2} I - i \sin \frac{\varphi}{2} \sigma_y \right) (-i\sigma_x) \right]^2 = -I \quad (5-12)$$

(Identité géométrique sur les rotations établie par simple exercice sur les  $\sigma_i$ )

*Pour un angle  $\varphi$  quelconque, le «pseudo-spin» ( $|S,0\rangle$ ,  $|D,1\rangle$ ) retourne à son état de départ, avec déphasage de  $\pi$ . Peut-on choisir  $\varphi$  pour qu'il en soit de même sur la transition  $|S,1\rangle \rightarrow |D,2\rangle$ ?*

# Choix de la séquence composite

Lorsqu'on passe du couple  $(|S,0\rangle, |D,1\rangle)$  à  $(|S,1\rangle, |D,2\rangle)$ , les angles de Rabi sont multipliés par  $\sqrt{2}$ . La transformation effectuée sur  $|S,1\rangle, |D,2\rangle$  est donc:

$$R_y^b(\varphi\sqrt{2}) R_x^b(\pi\sqrt{2}) R_y^b(\varphi\sqrt{2}) R_x^b(\pi\sqrt{2}) \quad (5-13)$$

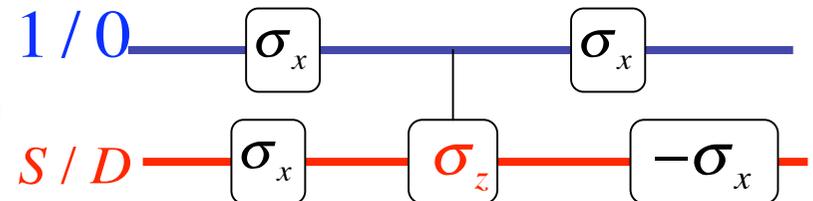
En choisissant  $\varphi=\pi/\sqrt{2}$ , on réalise donc maintenant deux rotations d'angle  $\pi$  autour de  $O_y$  combinés à deux rotations d'angle  $\pi\sqrt{2}$  autour de  $O_x$ :

$$R_y^b(\pi) R_x^b(\pi\sqrt{2}) R_y^b(\pi) R_x^b(\pi\sqrt{2}) = \left[ (-i\sigma_y) \left( \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} I - i \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sigma_x \right) \right]^2 = -I \quad (5-14)$$

On a encore un retour du système à l'état initial, avec déphasage de  $\pi$ :  $|S,1\rangle \rightarrow -|S,1\rangle$ ;  $|D,2\rangle \rightarrow -|D,2\rangle$ . Même si l'ion, partant de  $|S,1\rangle$ , acquiert transitoirement 2 phonons, son état de vibration revient finalement dans l'espace à 0 et 1 phonons. La séquence change donc les états  $|S,0\rangle, |D,0\rangle, |S,1\rangle, |D,1\rangle$  suivant:

$$\begin{aligned} |S,0\rangle &\rightarrow -|S,0\rangle; |D,0\rangle \rightarrow |D,0\rangle \\ |S,1\rangle &\rightarrow -|S,1\rangle; |D,1\rangle \rightarrow -|D,1\rangle \end{aligned}$$

correspondant à

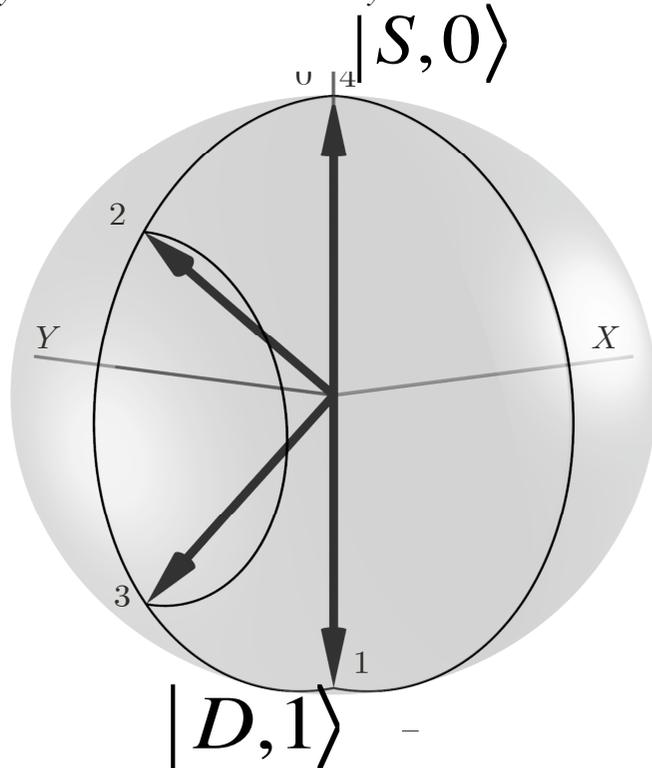


Appelant 1 et 0 les états  $S$  et  $D$  du bit cible, on reconnaît, combinée à des portes à un qubit, la porte de phase contrôle- $\sigma_z$  (porte inversée dans laquelle les rôles des bits 0 et 1 sont échangés par les opérateurs  $\sigma_x$ ).

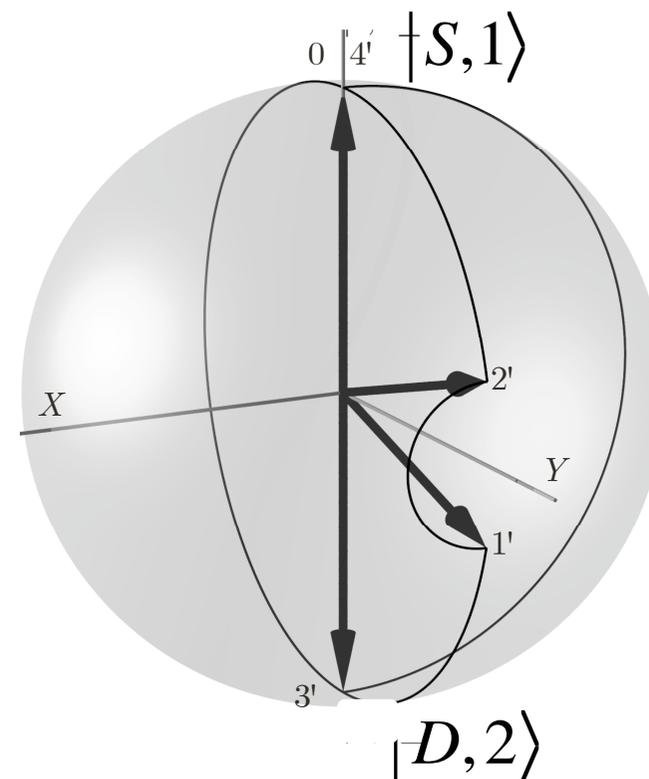
# Comment deux tours différents sur la sphère de Bloch reviennent au même point de départ

La séquence de pulses lasers correspond à deux boucles différentes sur les sphères de Bloch associées aux deux transitions, qui toutes les deux ramènent le système à son état initial avec changement de phase de  $\pi$ :

$$R_y^b(\pi / \sqrt{2}) R_x^b(\pi) R_y^b(\pi / \sqrt{2}) R_x^b(\pi)$$

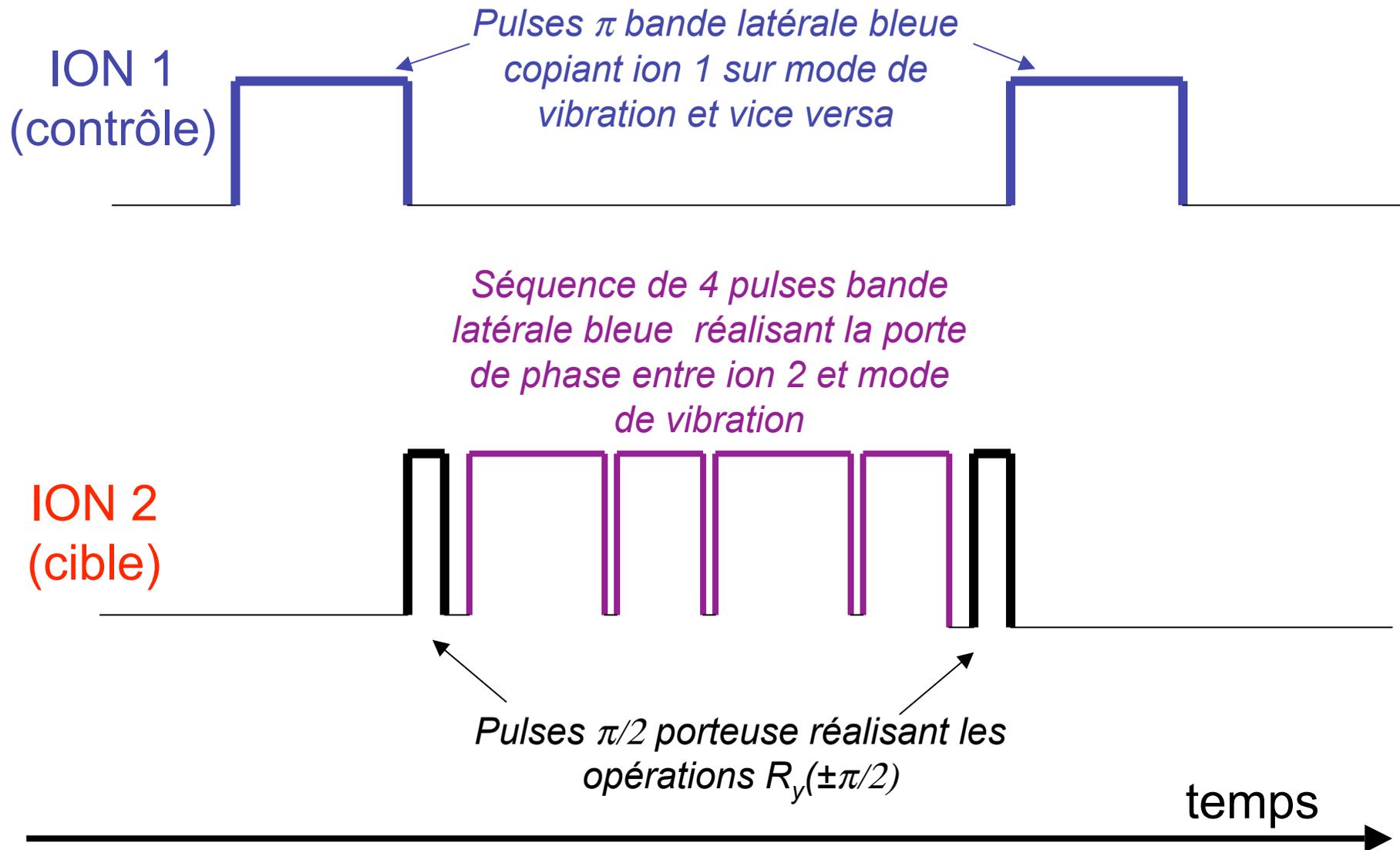


$$R_y^b(\pi) R_x^b(\pi\sqrt{2}) R_y^b(\pi) R_x^b(\pi\sqrt{2})$$

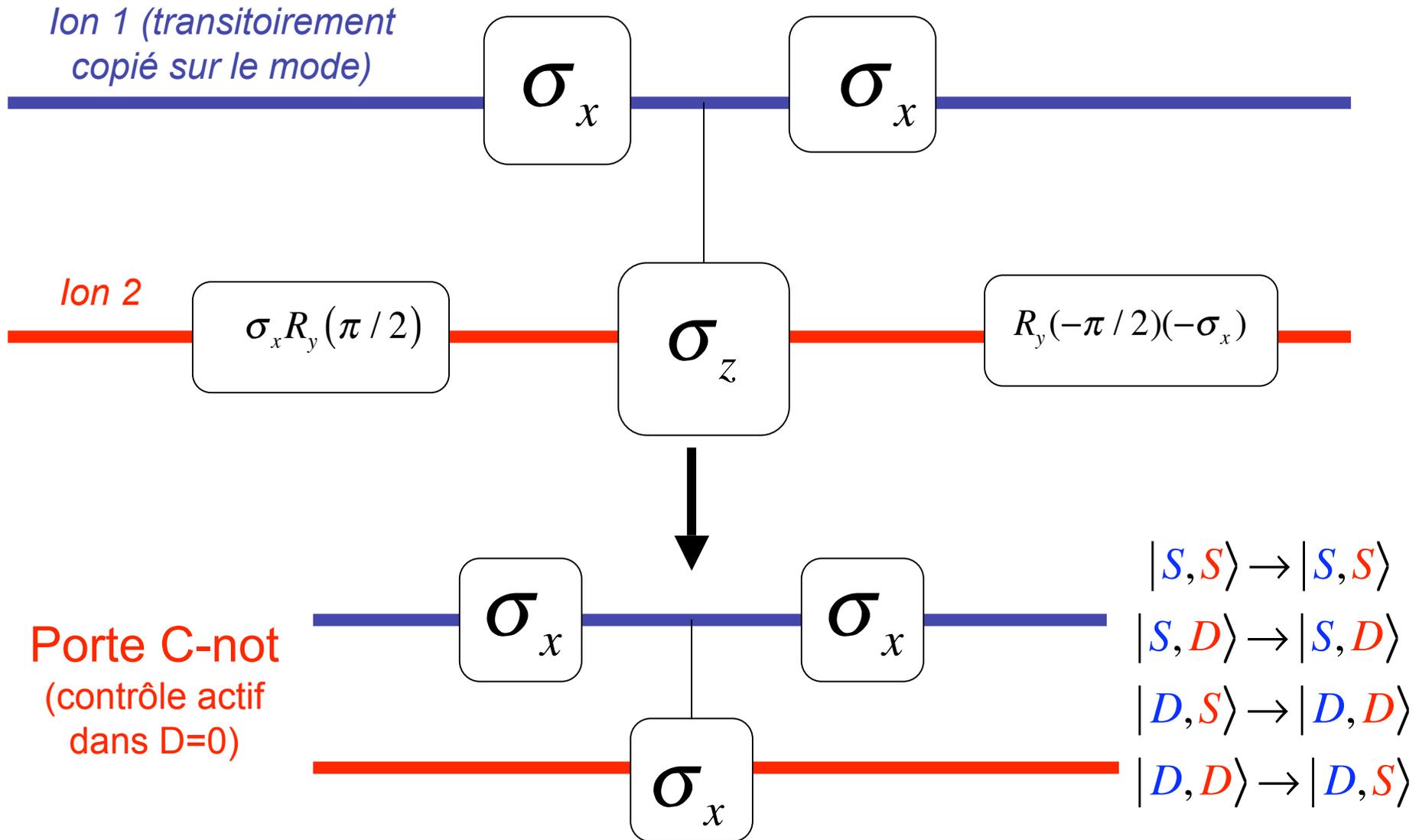


**Attention: rotations sur bande latérale impliquant les états internes et de vibration: sphères de Bloch de pseudo-spins mixtes « qubit + phonon »**

# Récapitulation des opérations (huit impulsions lasers) réalisant la porte CNOT

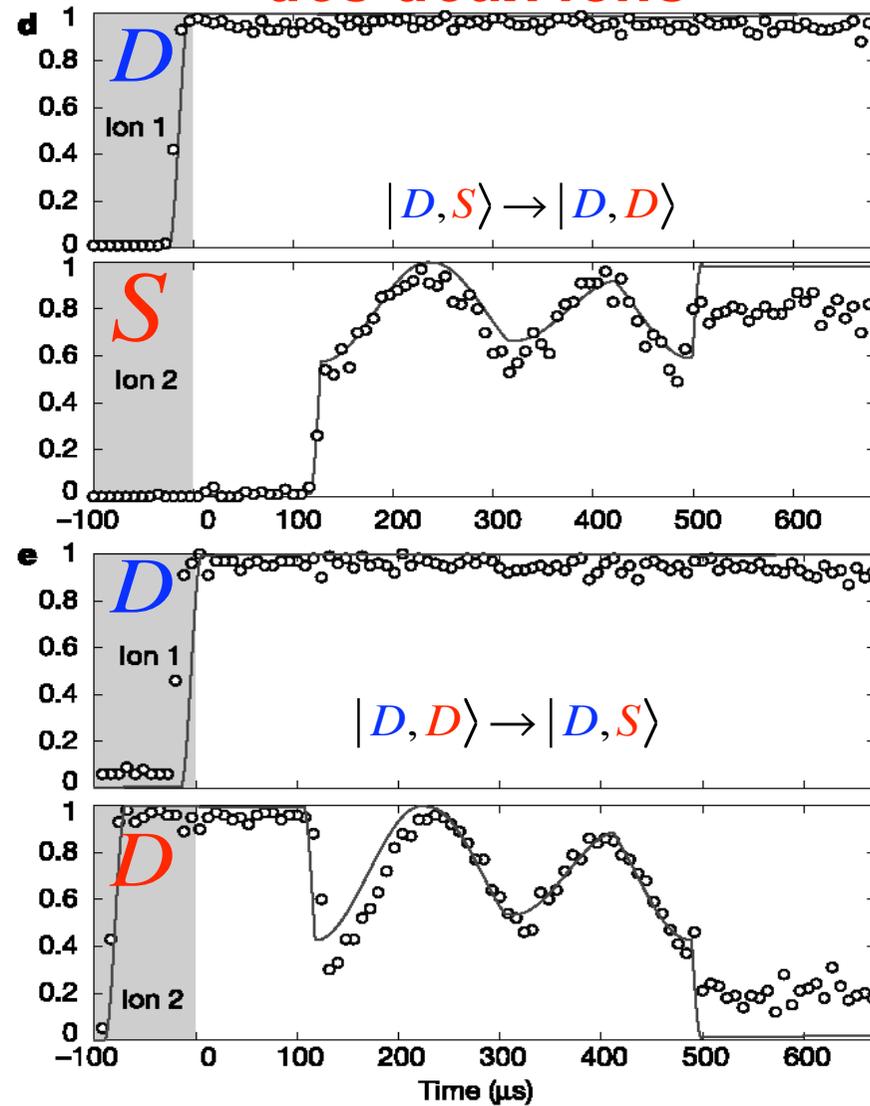
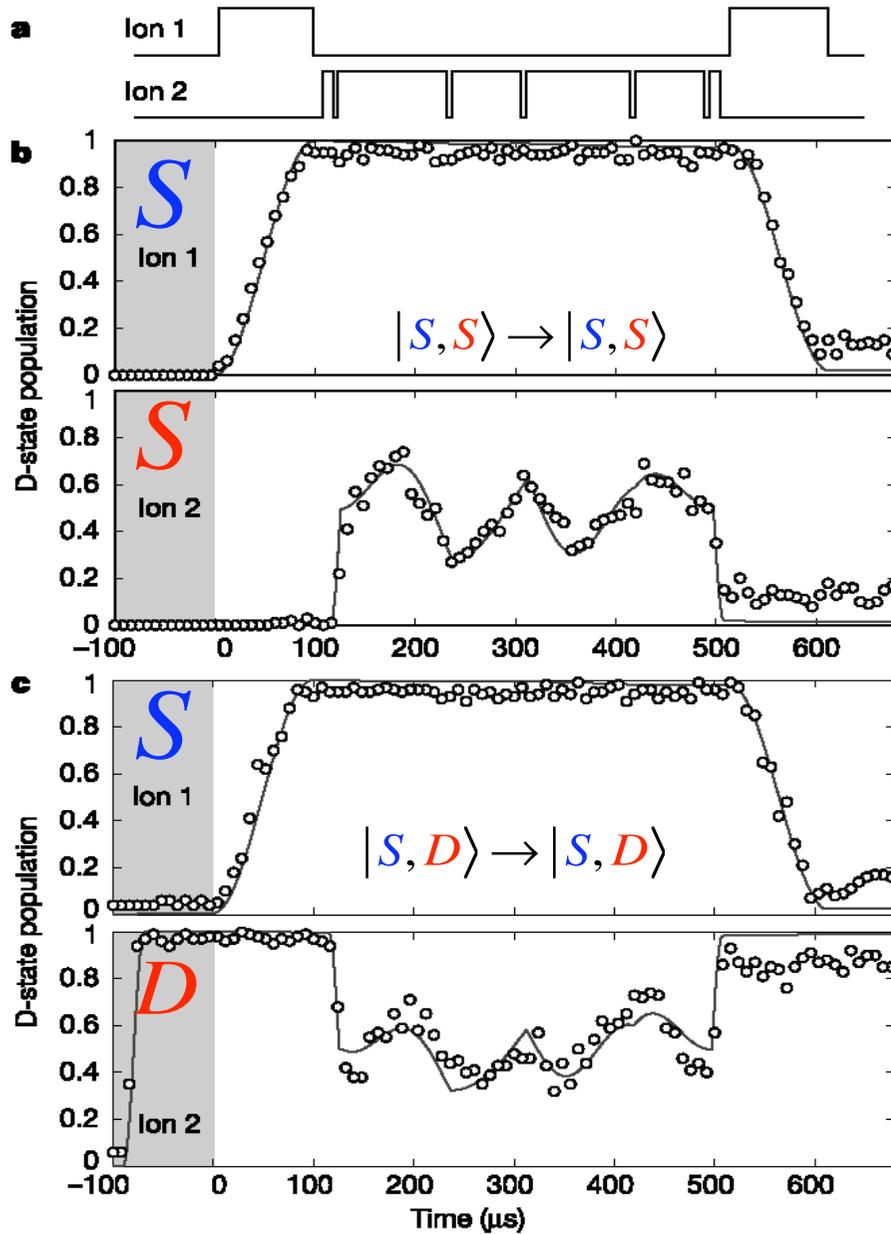


# Opération équivalente en notation logique



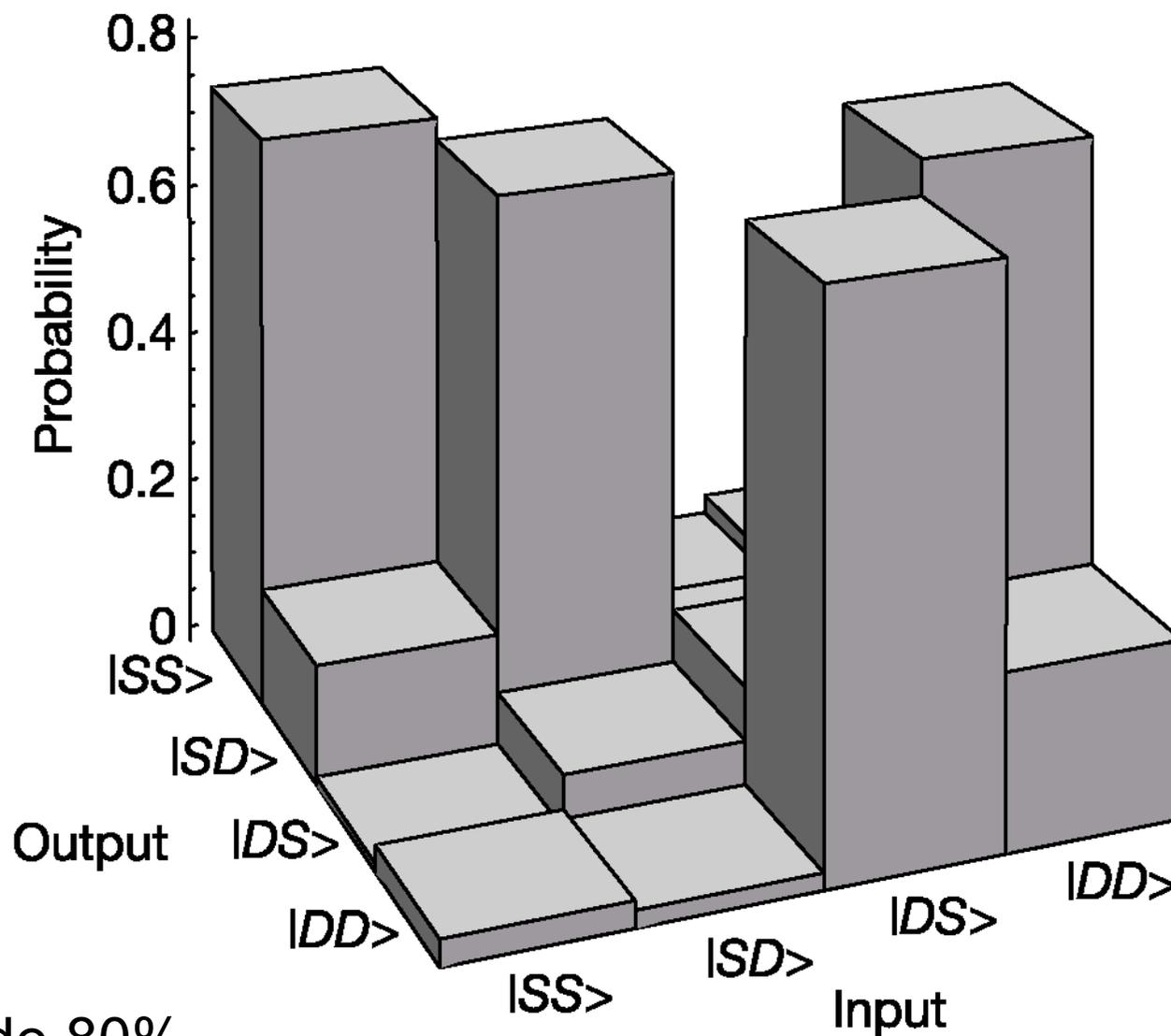
*Pour retrouver la porte C-not ordinaire, il suffit de redéfinir les états qubits en prenant  $S=0, D=1$*

## Tomographie de l'évolution des deux ions



Logique d'une porte CNOT dans laquelle l'état «actif» du qubit contrôle est D

# Mesure de la table de vérité de la porte



Fidélité de 80%

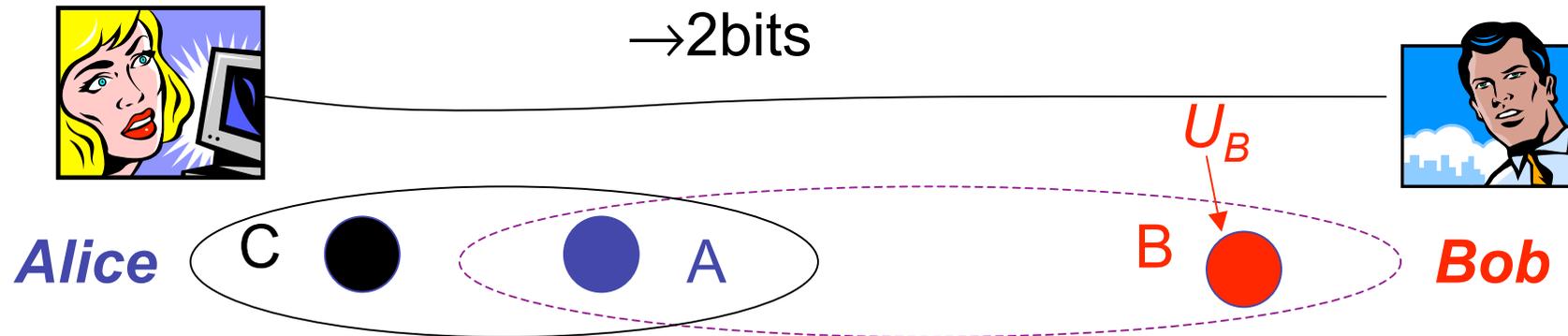
**5B.**

**Téléportation quantique (une  
expérience à trois qubits)**

Rappel sur la téléportation et la mesure des états de Bell. Les caractéristiques générales de la téléportation. Réalisation de l'expérience sur trois ions  $Ca^+$ . Test de la fidélité de l'opération.

# Rappel sur la téléportation (cours 2001-2002)

*C.Bennet, G.Brassard, C.Crépeau, R.Josza, A.Peres et W.Wooters, PRL, 70, 1895 (1993)*



Alice et Bob, à une distance arbitraire l'un de l'autre partagent une paire de qubits **A** et **B** dans un état de Bell. Alice possède un qubit **C** dans un état quantique  $|\chi\rangle$  (inconnu et inconnaissable d'elle et de Bob). Elle veut transmettre cet état à Bob. Elle fait une mesure dans la base des états de Bell du système **A**+**C**. La mesure donne une parmi quatre valeurs possibles et projette l'état de **B** dans un état corrélé à ce résultat. Alice le communique à Bob sous forme de deux bits classiques. Celui-ci, par une transformation unitaire appropriée, reconstitue sur **B** l'état initial de **C**.

*Expérience décrite dans cette leçon: M.Riebe, H.Häffner, C.Roos, W.Hänsel, J.Benhelm, G.Lancaster, T.Körber, C.Becher, F.Schmidt-Kaler, D.James et R.Blatt, Nature, 429, 734 (2004).*

# Les caractéristiques de la téléportation

Rappelons les aspects importants de ce type d'expérience:

1. Ni Alice, ni Bob ne peuvent, dans une expérience unique connaître l'état qu'ils échangent s'il a été préparé à leur insu par un troisième «acteur» (impossibilité de mesurer un état quantique unique). Ils sont cependant sûrs, avec une probabilité idéale de *100%*, que l'état reçu par Bob est celui qui était initialement en la possession d'Alice. Pour évaluer la fidélité réelle de leur expérience, il leur faut accumuler des statistiques sur un grand nombre de réalisations. Il est impossible d'estimer la fidélité à partir d'une expérience unique puisque ni l'état initial, ni l'état final ne peuvent alors être déterminés.
2. L'état quantique possédé par Alice est détruit par la procédure. Si ce n'était pas le cas, il y aurait deux copies de l'état initial à la fin, ce qui violerait le théorème de non - clonage et serait en contradiction avec l'impossibilité de mesurer un état quantique unique. La destruction de l'original distingue la téléportation quantique de la transmission classique (par fax par exemple).
3. L'information contenue dans l'état quantique correspond à un nombre infini de bits classiques (nécessaires à la définition des amplitudes *du qubit C*) et pourtant la téléportation ne requiert que l'échange classique de deux bits. L'intrication partagée entre Bob et Alice («*canal quantique*») permet cette grande économie dans la quantité d'information à transférer classiquement. .

## Les caractéristiques de la téléportation (suite)

4. La corrélation quantique seule (sans communication classique entre Alice et Bob) ne donne aucune information à Bob. S'il ne communique pas avec Alice, sa connaissance du qubit B est décrite par l'opérateur densité complètement dépolarisé  $\rho = I/2$ . Il y a, avant mesure par Alice, intrication maximale entre le qubit B et le système d'Alice, et aucune information n'est portée par B seul. En définissant la fidélité du processus par  $F = \langle \chi | \rho | \chi \rangle$  où  $|\chi\rangle$  est l'état à téléporter et  $\rho$  l'opérateur densité final du qubit B, l'absence de canal «classique» entre Alice et Bob correspond à  $F_0 = 1/2$ .

5. Inversement, en absence de corrélation quantique, Alice et Bob peuvent par des moyens classiques transférer une partie de l'information du qubit C sur B, mais la fidélité du processus est limitée. Au mieux, Alice mesure au hasard une composante de Pauli de C et envoie le résultat à Bob, qui prépare l'état correspondant. Ce faisant, Alice détruit une partie de l'information contenue dans C. Il est facile de montrer que la fidélité moyenne de cette méthode est  $F_{cl} = 2/3$ .

6. Dans le processus de téléportation complet, le canal de communication classique limite la vitesse de transmission. L'information ne peut être transférée de façon super-luminale. L'état quantique ne peut apparaître chez Bob instantanément. Il n'y a donc pas violation de la causalité.

# Procédure théorique de téléportation

Etat initial des trois qubits:

$$|\psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A, 1_B\rangle + |1_A, 0_B\rangle)$$

$$|\chi\rangle_C = \alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C \quad (5-15)$$

Définition  
complète des  
états de Bell:  
Eq. (3-19)  
leçon 3

Ecriture de cet état dans la base de Bell des bits C et A:

$$|\psi^+\rangle_{AB} \otimes |\chi\rangle_C = \frac{1}{2}|\psi^+\rangle_{CA} [\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B] + \frac{1}{2}|\psi^-\rangle_{CA} [\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B] \quad (5-16)$$

$$+ \frac{1}{2}|\phi^+\rangle_{CA} [\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B] + \frac{1}{2}|\phi^-\rangle_{CA} [\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B]$$

$$= \frac{1}{2} [ |\psi^+\rangle_{CA} \otimes |\chi\rangle_B + |\psi^-\rangle_{CA} \otimes \sigma_z |\chi\rangle_B + |\phi^+\rangle_{CA} \otimes \sigma_x |\chi\rangle_B + |\phi^-\rangle_{CA} \otimes (-i\sigma_y) |\chi\rangle_B ]$$

(CA) mesuré dans  $|\psi^+\rangle \rightarrow$  appliquer  $I$  à  $B \rightarrow |\chi\rangle_B$

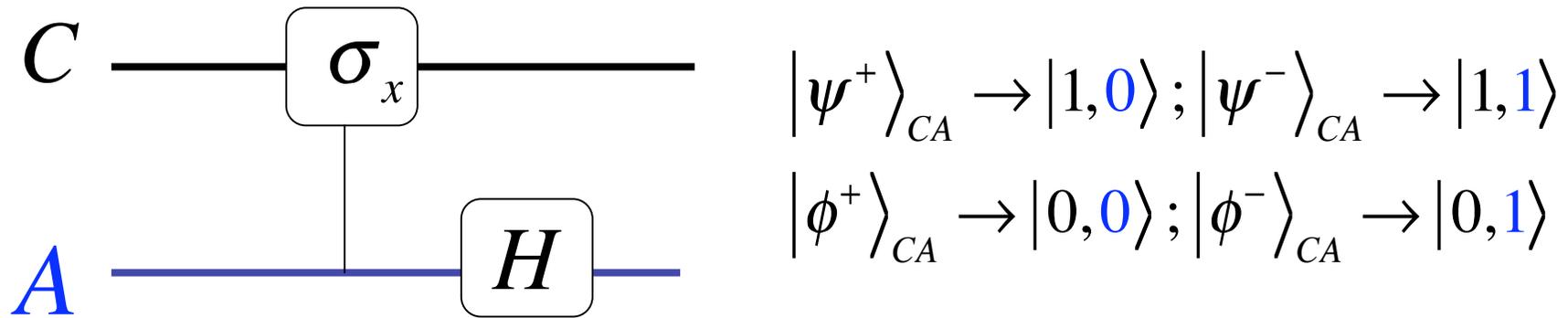
(CA) " "  $|\psi^-\rangle \rightarrow$  appliquer  $\sigma_z$  à  $B \rightarrow |\chi\rangle_B$

(CA) " "  $|\phi^+\rangle \rightarrow$  appliquer  $\sigma_x$  à  $B \rightarrow |\chi\rangle_B$

(CA) " "  $|\phi^-\rangle \rightarrow$  appliquer  $\sigma_z \sigma_x$  à  $B \rightarrow |\chi\rangle_B$

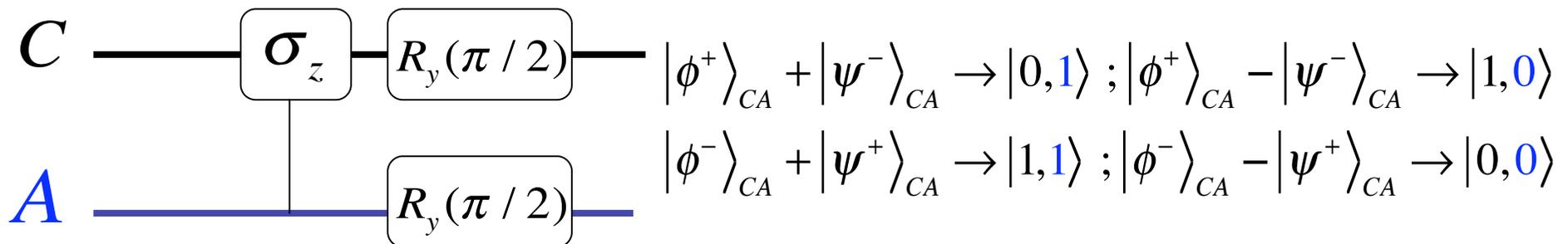
Comment mesurer (CA) dans la base de Bell?

# Mesure des états de Bell: deux variantes



La mesure des qubits C et A après l'opération de ce circuit donne 4 résultats possibles, conduisant à choisir l'une de quatre opérations à appliquer au qubit B pour reconstituer l'état  $|\chi\rangle_B$ .

L'expérience d'Innsbruck a utilisé pour mesurer les états de Bell, au lieu d'une porte C-not, une porte de phase suivie par une rotation  $R_y(\pi/2) = (1 - i\sigma_y)/\sqrt{2}$  des deux qubits. Le circuit est représenté ci-dessous. Il mesure en fait *des superpositions d'états de Bell* suivant la table facilement vérifiable:



# La procédure expérimentale de téléportation

Evolution du système des trois ions sous l'effet du circuit (avant la mesure):

$$|\Psi\rangle_{ABC} = \frac{1}{2} \left[ |\psi^+\rangle_{CA} \otimes |\chi\rangle_B + |\psi^-\rangle_{CA} \otimes \sigma_z |\chi\rangle_B + |\phi^+\rangle_{CA} \otimes \sigma_x |\chi\rangle_B + |\phi^-\rangle_{CA} \otimes (-i\sigma_y) |\chi\rangle_B \right]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ -|0,0\rangle \otimes (1+i\sigma_y) + |0,1\rangle \otimes (\sigma_x + \sigma_z) + |1,0\rangle \otimes (\sigma_x - \sigma_z) + |1,1\rangle \otimes (1-i\sigma_y) \right] |\chi\rangle_B$$

soit après une dernière rotation  $R_y(\pi/2) = (1-i\sigma_y)/\sqrt{2}$  sur l'ion B:

$$|\Psi\rangle_{ABC} = \frac{1}{2} \left[ -|0,0\rangle \otimes I + |0,1\rangle \otimes \sigma_x - |1,0\rangle \otimes \sigma_z + |1,1\rangle \otimes \sigma_x \sigma_z \right] |\chi\rangle_B$$

On mesure finalement la fluorescence des deux ions. Si l'ion se trouve dans  $|0\rangle$ , il ne fluoresce pas. S'il est dans  $|1\rangle$ , il rayonne un grand nombre de photons. D'où la règle de reconstruction de l'état téléporté (en ne tenant pas compte de sa phase globale facilement ajustable) :

*Aucun ion ne fluoresce*  $\rightarrow$  *aucune opération*

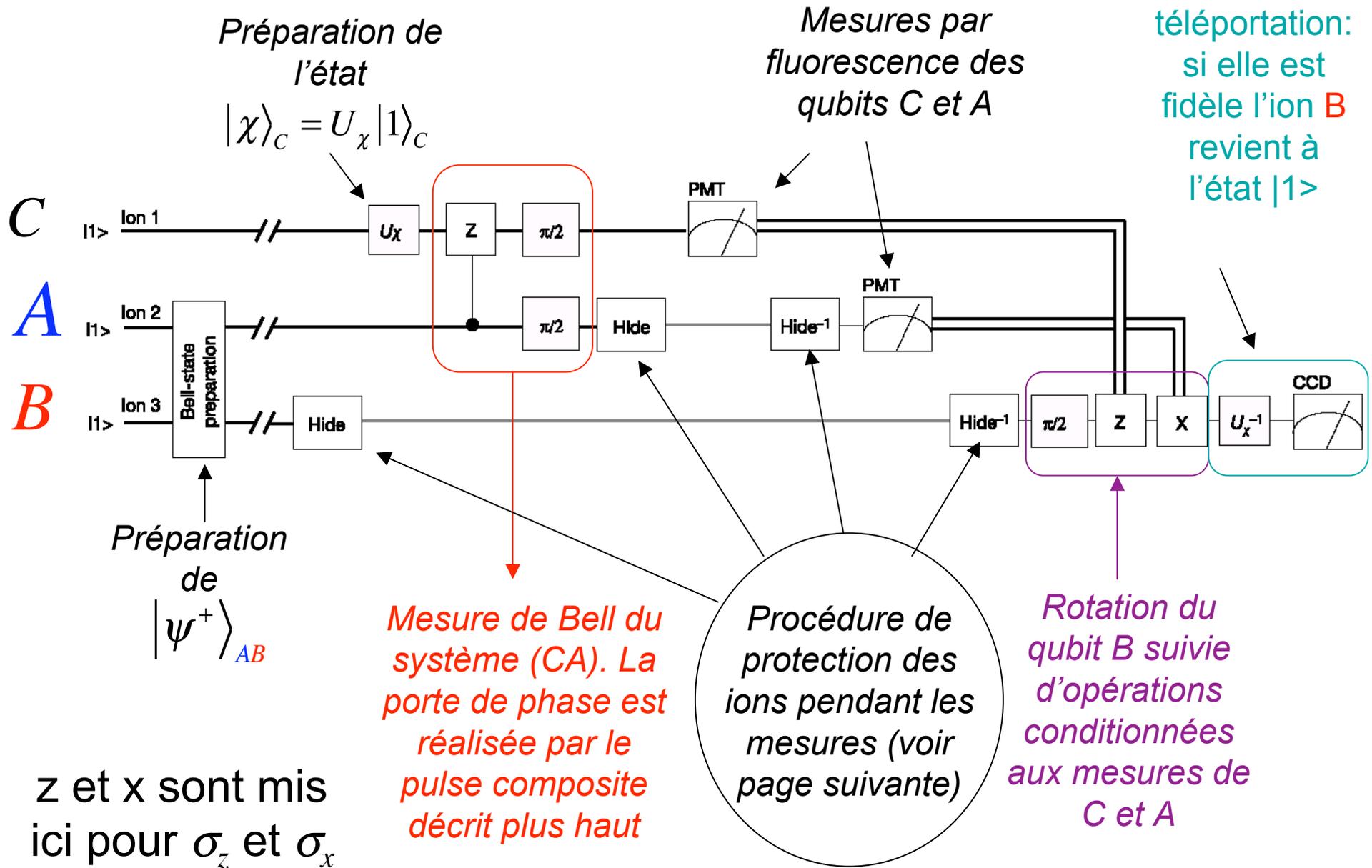
*A seul fluoresce*  $\rightarrow$   $\sigma_x$  appliqué à B

*C seul fluoresce*  $\rightarrow$   $\sigma_z$  appliqué à B

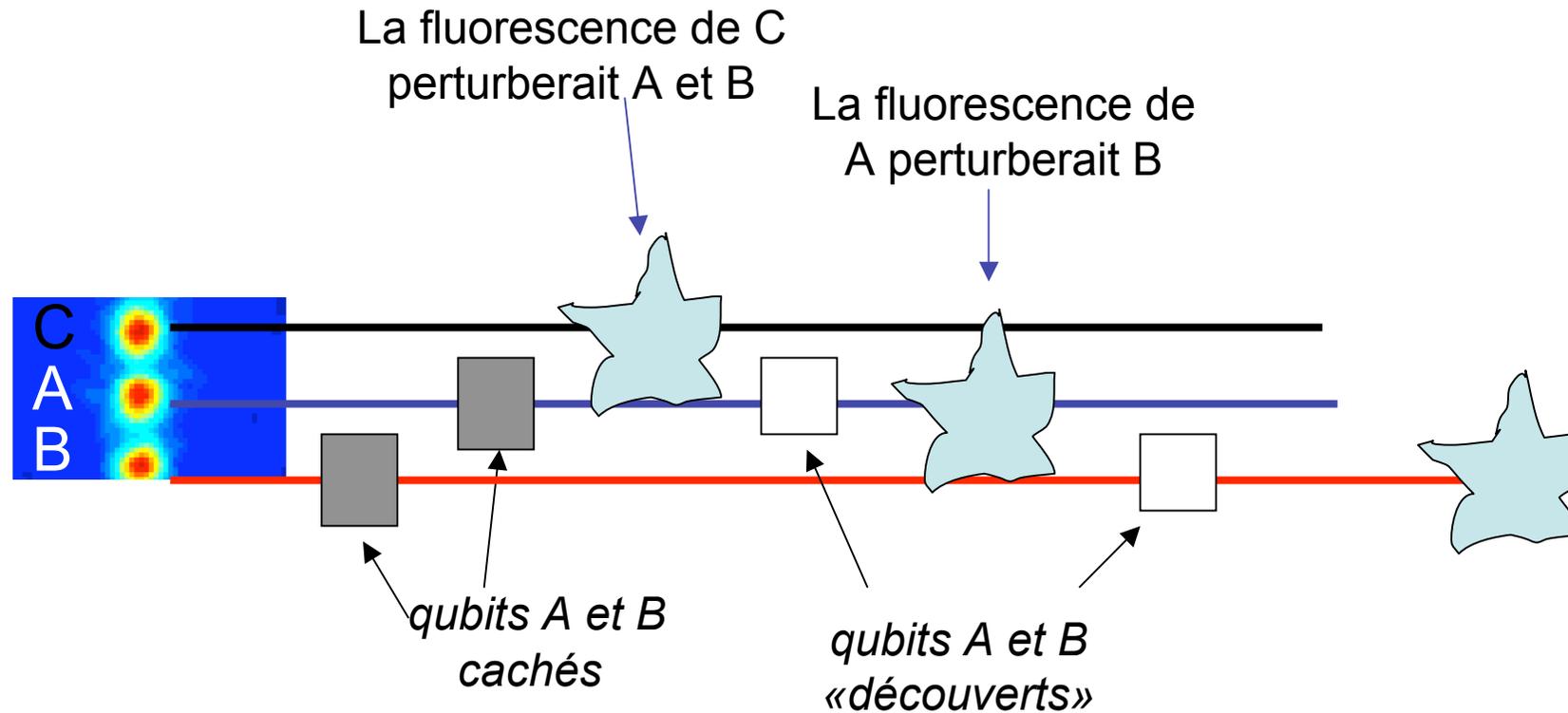
*C et A fluorescent*  $\rightarrow$   $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  appliqués à B

# Schéma expérimental

Analyse de la téléportation: si elle est fidèle l'ion B revient à l'état  $|1\rangle$



# Protection des qubits



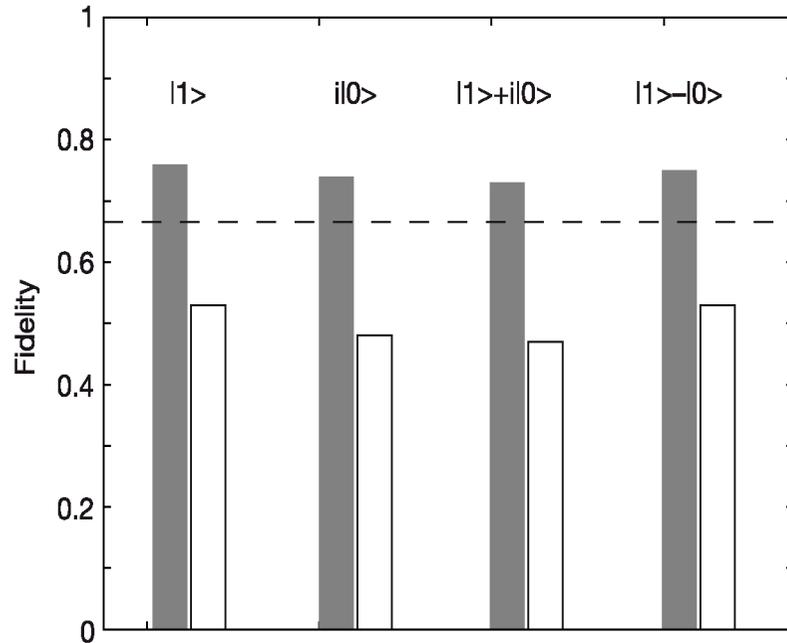
$D'$

\_\_\_\_\_  $D(0)$

\_\_\_\_\_  $S(1)$

L'état 1, sensible au laser de mesure, est caché dans un niveau auxiliaire  $D'$  insensible à cette radiation par une impulsion  $\pi$  de polarisation convenable sur la transition porteuse. La même impulsion échange à nouveau  $D'$  et  $S$  pour reconstituer le qubit avant qu'il soit mesuré.

# Analyse des résultats



Téléportation testée sur 4 états  $|\chi\rangle = |1\rangle$ ,  $|i0\rangle$ ,  $|1\rangle+i|0\rangle$  et  $|1\rangle-|0\rangle$ . Si, dans chaque cas, on applique à l'état obtenu, après la téléportation, l'opérateur  $U_\chi^{-1}$  l'ion doit finir idéalement dans  $|1\rangle$ . La mesure de l'opérateur densité du qubit téléporté  $\rho_{exp}$  permet de définir la fidélité de la procédure:

$$F = \langle 1 | U_\chi^{-1} \rho_{exp} U_\chi | 1 \rangle \quad (5-17)$$

La fidélité obtenue après avoir moyenné sur 300 réalisations dans chaque cas est  $\sim 0,75$  (barres grises sur la figure). En blanc, les fidélités si on ne fait pas de reconstruction finale. La valeur est alors voisine de 0.5, comme on s'y attend (voir plus haut). La ligne en tiret donne la fidélité de la transmission classique optimale ( $2/3$ ). La fidélité expérimentale étant supérieure à cette valeur, le rôle de l'intrication quantique dans la procédure est démontré.

# Conclusion de la cinquième leçon

Le couplage coulombien entre ions dans un piège de Paul permet de réaliser des portes logiques suivant la procédure de Cirac et Zoller, en adressant les ions individuellement à l'aide d'une séquence d'impulsions laser focalisées. Une telle porte a été utilisée pour effectuer la téléportation de l'état d'un qubit. La procédure complète demande une mesure des 4 états de Bell, ce qui n'était pas réalisé dans les premières expériences de ce genre avec des paires de photons. Les expériences sur des ions (celle sur  $Ca^+$  et une expérience faite à Boulder sur trois ions  $Be^+$  avec un type de porte différent (voir leçon 6)) ont mesuré les 4 états de Bell (ou leurs combinaisons) et téléporté un état arbitraire de façon inconditionnelle. En principe, l'état téléporté peut être conservé sur l'ion récepteur et manipulé après la procédure. Ces expériences sont des réalisations complètes de l'idée originale de la téléportation de variables discrètes (Bennet et al).

*Le transport n'a été réalisé avec des ions que sur de très courtes distances (quelques micromètres dans le piège linéaire). La démonstration complète de la téléportation d'une fonction d'onde atomique sur une distance macroscopique reste à faire.*

**La 6<sup>ème</sup> leçon décrira des manipulations de plusieurs ions  $Ca^+$  ( groupe d'Innsbruck) et la réalisation de portes basées sur des méthodes d'adressage collectif des ions (expériences du groupe de Boulder sur  $Be^+$ ) .**