

Contrôle de la décohérence: théorie et expériences

Le cours de cette année est la suite d'un enseignement pluriannuel sur l'information quantique, la décohérence et la frontière classique-quantique. Nous avons commencé (2001-2002) par une présentation générale, en rappelant les concepts de superposition d'états et d'intrication et en décrivant comment les propriétés qui en découlent permettent en principe d'utiliser des systèmes quantiques simples (qubits) pour manipuler et traiter l'information de façon plus puissante que par des méthodes classiques. Ces manipulations conduisent à préparer des superpositions d'états impliquant un grand nombre de particules (états de type «chat de Schrödinger»). Nous avons (2002-2003) montré comment l'optique quantique et le domaine nouveau de l'optique atomique permettent de préparer différents systèmes dans des états de ce type et analysé leur fragilité. Ils sont très sensibles au phénomène de décohérence lié au couplage des systèmes étudiés à leur environnement. Pour analyser de façon plus précise la décohérence, nous avons été conduits en 2003-2004 à décrire de façon formelle le comportement quantique des systèmes ouverts, couplés à l'environnement le plus général possible. Nous abordons cette année l'étude des méthodes permettant de réduire et de contrôler la décohérence dans différents types de systèmes.

Plan du cours

1. Rappels sur les systèmes ouverts, la décohérence et l'information quantique
(5 Octobre)
2. Revue des différentes stratégies de contrôle de la décohérence
(5 et 19 Octobre)
3. Observation de l'environnement: gomme et «feed back» quantiques
(19 Octobre)
4. Modification de l'environnement: électrodynamique quantique en cavité
(26 Octobre)
5. Couplage symétrique à l'environnement: superradiance en cavité
(26 Octobre)
6. Découplage symétrique de l'environnement: sub-radiance en cavité
(2 Novembre)
7. Modification de la dynamique du couplage à l'environnement: méthodes pulsées et effet Zénon *(2 Novembre)*
8. Environnements artificiels pour des ions piégés et protection d'états choisis
(9 Novembre)
9. Au delà du contrôle de l'environnement: les codes correcteurs d'erreurs
(23 Novembre)

Références générales

Quantum Computation and Quantum Information

M.A.Nielsen and I.L.Chuang, Cambridge University Press, 2000

Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory

D.Giulini, E.Joos, C.Kiefer, J.Kupsch, I-O.Stamatescu, H.D.Zeh, Springer, 1996

An open systems approach to quantum optics

H. Carmichael, Springer, 1993

Quantum theory: concepts and methods

A.Peres, Kluwer Academic Publishers, 1995

Decoherence, einselection and the quantum origins of the classical

W.H.Zurek, Reviews of Modern Physics, 75, 715 (2003)

Cours d'information quantique

J.Preskill, www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229

Cours du Collège de France, années 2001-2002, 2002-2003 et 2003-2004

S.Haroche, www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/college/college.html

(Notes du cours à partir du jour de chaque leçon à la même adresse)

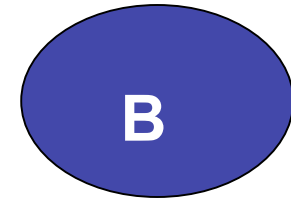
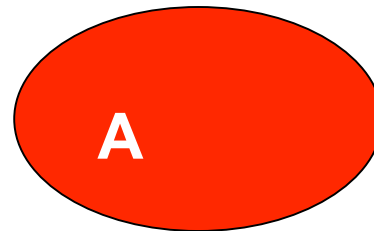
1.

Systemes ouverts, décohérence et information quantique (rappels des cours antérieurs)

Comment décrire les systèmes ouverts, interagissant avec un environnement. L'évolution de ces systèmes et l'équation pilote. Les sauts quantiques. Les états classiques (« pointer states »). Les superpositions d'états classiques (chats de Schrödinger). Les portes quantiques et le calcul universel de fonctions par combinaison de portes.

Formes équivalentes de l'opérateur densité

L'opérateur densité ρ_A d'un système physique A couplé à un environnement possède une infinité de formes possibles, toutes déductibles d'une fonction d'onde unique définie dans un espace étendu, obtenu en adjoignant à A un système auxiliaire B. Les différentes expressions de ρ_A correspondent à divers types de mesures non lues effectuées sur B. La physique de A peut se décrire simplement en envisageant des expériences de type EPR effectuées par Alice (agissant sur A) et Bob (agissant sur B).

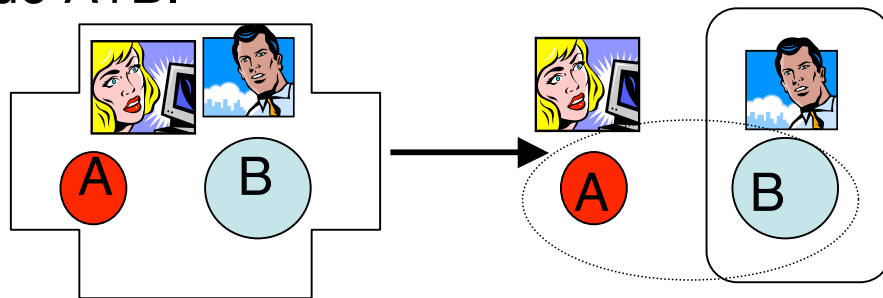


$$\begin{aligned} \rho_A &= \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i| \\ &= \sum_j q_j |j\rangle_A \langle j| = \dots \\ &= \text{Tr}_B | \rangle_{AB} \langle | \quad (1 \quad 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} | \rangle_{AB} &= \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A |i\rangle_B \\ &= \sum_j \sqrt{q_j} |j\rangle_A |j\rangle_B = \dots \quad (1 \quad 2) \end{aligned}$$

Mesures généralisées

On définit **des mesures généralisées de A** (ou POVM) comme résultant d'une intrication de A avec B suivie d'une mesure projective dans B. Ces mesures sont définies par un ensemble de générateurs M_i , opérateurs de A satisfaisant une relation de complétude. On peut aussi les réaliser en mettant en contact A et B sans intrication, suivi d'une mesure projective non-locale de A+B.



Intrication de A et B

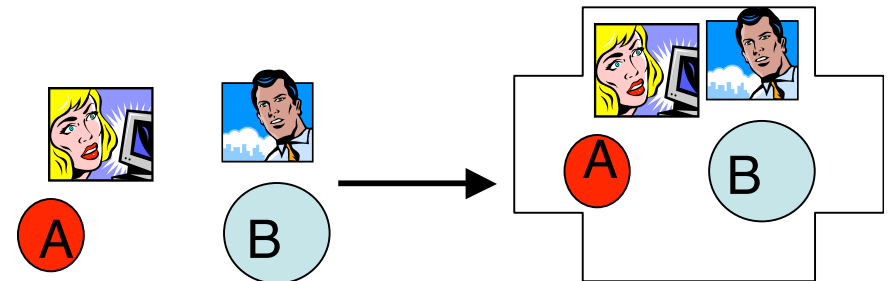
Mesure projective effectuée sur B

Méthode 1

$$A \text{ mesure } i \quad P_{A/i} = \frac{M_i^\dagger M_i}{\text{Tr}(M_i^\dagger M_i)} = \frac{M_i^\dagger M_i}{\text{Tr}(M_i^\dagger M_i)} \quad (1 \quad 3)$$

$$M_i^\dagger M_i = I \quad (1 \quad 4)$$

Les mesures projectives ordinaires sont un cas particulier (les M_i sont alors les projecteurs sur les sous espaces propres orthogonaux de l'observable de A mesurée)



Mise en contact de A et B sans intrication

Mesure projective non locale effectuée sur A+B

Méthode 2

Forme de Kraus du super-opérateur d'évolution

Toute évolution physique de ρ_A (exceptée une mesure lue) peut se décrire comme le résultat d'une mesure généralisée dont le résultat ne serait pas enregistré, comptant au plus N^2 générateurs où N est la dimension de l'espace de A (forme de Kraus du super-opérateur d'évolution du système).

$$\rho_A(t) = \mathcal{E}[\rho_A(0)] = \sum_{i=1}^{N^2} M_i(t) \rho_A(0) M_i^\dagger(t) \quad (1 \quad 5)$$

Les opérateurs de Kraus peuvent prendre différentes formes équivalentes se déduisant les unes des autres par des transformations linéaires décrites par des matrices unitaires. Les opérateurs de Kraus décrivant l'effet de divers modes de décohérence d'un qubit peuvent être représentés simplement par les matrices de Pauli (et la matrice unité). Exemple du basculement de phase:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z \quad ; \quad (Z = \sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \quad (1 \quad 6)$$

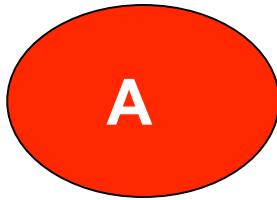
Equation pilote sous forme de Lindblad

Lorsque A est couplé à un grand environnement, celui-ci perd très vite la mémoire de son interaction avec A et l'approximation de Markov permet de décrire l'évolution de ρ_A par une équation pilote, équation différentielle du premier ordre en temps, qui peut toujours s'exprimer à l'aide d'au plus N^2-1 opérateurs de sauts quantiques de A, notés L (forme de Lindblad de l'équation pilote, directement déduite de la forme de Kraus du super-opérateur d'évolution infinitésimale):

$$\frac{d\rho_A(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \rho_A(t)] + \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} L_{\alpha} \rho_A(t) L_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} (L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha} \rho_A(t) + \rho_A(t) L_{\alpha}^{\dagger} L_{\alpha}) \quad (17)$$

Les opérateurs de Lindblad permettent de simuler l'évolution stochastique de l'opérateur densité du système, telle qu'on l'observerait en effectuant une lecture continue de son environnement (sauts quantiques).

Sauts quantiques



Environnement
effectif E_f
(états $0, \dots$)

Etat initial: $| \rangle_A | 0 \rangle_E$

Environnement mesuré dans $| \rangle$ à l'instant (infinitésimal) avec probabilité:

$$p(\tau) = \langle L^\dagger L | \rangle_A \quad (1.8)$$

$$| \rangle_A = \frac{\sqrt{L} | \rangle_A}{\sqrt{p(\tau)}} \quad (1.9)$$

*Sauts quantiques
(évolution
irréversible)*

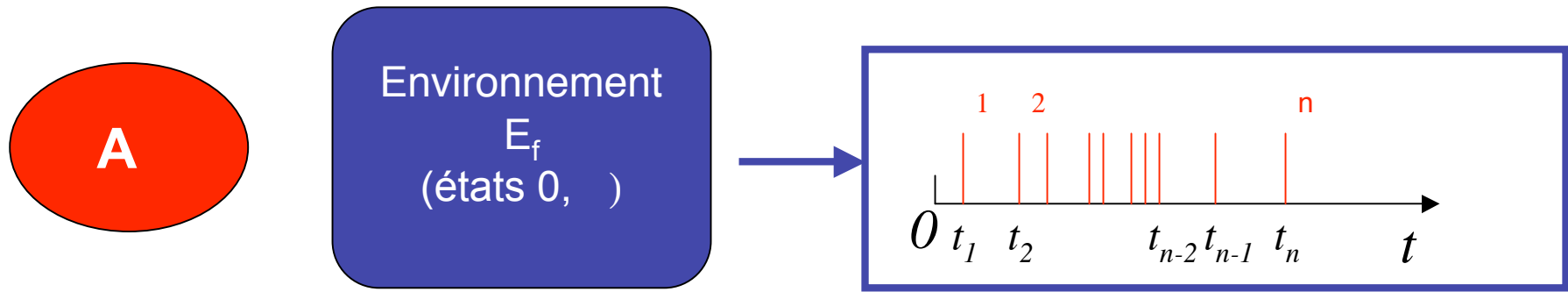
Environnement inchangé dans intervalle avec probabilité

$$p_0(\tau) = \langle L^\dagger L | \rangle_A \quad (1.10)$$

$$| \rangle_A = \frac{1 - \frac{i}{\hbar} H - \frac{L^\dagger L}{2} | \rangle_A}{\sqrt{p_0(\tau)}} \quad (1.11)$$

*L'absence de
saut est, elle
aussi, une
information
qui change
l'état du
système*

Trajectoires stochastiques et méthode Monte Carlo



$$| (t_n) \rangle_A = L_n e^{iH_{eff}(t_n - t_{n-1})/\hbar} \dots L_2 e^{iH_{eff}(t_2 - t_1)/\hbar} L_1 e^{iH_{eff}t_1/\hbar} | (0) \rangle_A \quad (1 \quad 12)$$

$$H_{eff} = H_A - \frac{i\hbar}{2} L^\dagger L \quad (1 \quad 13)$$

L'observation continue des sauts quantiques par « mesure de l'environnement » permet de suivre une trajectoire du système A, décrite par un état pur (aléatoire d'une réalisation à l'autre de l'« expérience »). La moyenne des trajectoires stochastiques restitue l'opérateur densité, solution de l'équation pilote (méthode Monte Carlo).

$$\rho_A(t_n) = \overline{ | ; \{ i \} \rangle_{AA} \langle ; \{ i \} | } \quad (1 \quad 14)$$

Etats classiques (pointer states)

Ce sont des états qui ne s'intriquent pas avec l'environnement et restent purs au cours de l'évolution du système. Une condition suffisante pour qu'un état $|X\rangle$ soit pointer state parfait est qu'il soit état propre de valeur propre nulle des L *et que ceux-ci commutent avec H* :

$$L |X\rangle = 0 \quad (\forall L) \quad (1 \forall 15a) \quad ; \quad [L, H] = 0 \quad (1 \forall 15b)$$

Un état $|X\rangle$ est également un pointer state s'il est état propre commun de valeur propre quelconque des L lorsque les commutateurs des L avec H **et** avec les L^\dagger sont fonctions des L :

$$L |X\rangle = \lambda |X\rangle \quad ; \quad [L, H] = f(L) \quad , \quad [L, L^\dagger] = g(L) \quad (1 \quad 16)$$

Si les L ne satisfont pas ces relations, leurs états propres sont des pointer states approchés, qui ne s'intriquent que lentement avec l'environnement:

$$L |X\rangle = \lambda |X\rangle \quad (\forall L) \quad ; \quad \rho_x = |X\rangle\langle X| \quad \frac{d}{dt} T_r \left(\rho_x^2 \right) = 0 \quad \text{au 1er ordre en } t \quad (1 \quad 17)$$

Les états propres de position d'une particule Brownienne interagissant avec un bain thermique de molécules sont des pointer states approchés.

Les états cohérents: pointer states de l'optique quantique

L'équation pilote d'un oscillateur harmonique amorti à $T=0K$ peut s'exprimer à l'aide d'un opérateur de Lindblad unique, l'opérateur d'annihilation de quanta

\mathbf{a} :

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}(a^\dagger \tilde{\rho} + \tilde{\rho} a^\dagger) + \gamma a \tilde{\rho} a^\dagger \quad (1 \quad 18)$$

Les états cohérents, états propres de \mathbf{a} , sont des pointer states parfaits de l'oscillateur:

$$a| \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle ; | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1 \quad 19)$$

Ces états s'amortissent en restant purs, sans intrication avec leur environnement. Ils tendent vers l'état fondamental de l'oscillateur:

$$| \alpha(t) \rangle = | \alpha e^{-\gamma t/2} \rangle \quad (1 \quad 20)$$

Un état cohérent d'un mode du rayonnement dans une cavité à $T=0K$ est un exemple de pointer state particulièrement important en optique quantique. Les propriétés classiques des états cohérents du champ en découlent.

Décohérence des superpositions de pointer states

Des pointer states différents se corrélient classiquement à des états différents de l'environnement sans intrication:

$$|X_i(0)\rangle_A |0\rangle_E \quad |X_i(t)\rangle_A |e_i(t)\rangle_E \quad (1 \quad 21)$$

alors qu'une superposition de deux pointer states s'intrique à l'environnement (linéarité de la physique quantique):

$$(c_1 |X_1(0)\rangle_A + c_2 |X_2(0)\rangle_A) |0\rangle_E \quad c_1 |X_1(t)\rangle_A |e_1(t)\rangle_E + c_2 |X_2(t)\rangle_A |e_2\rangle_E \quad (1 \quad 22)$$

Lorsque les états finals de E sont devenus orthogonaux, la décohérence est complète et la superposition remplacée par un mélange statistique:

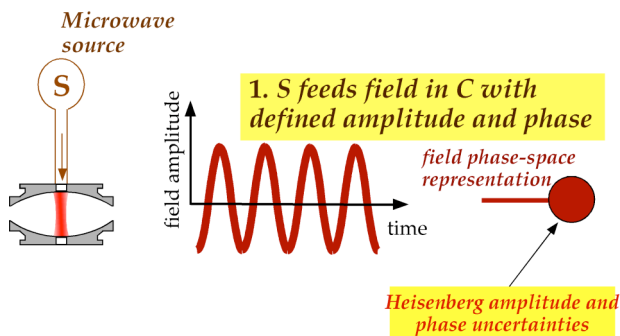
$$(c_1 |X_1\rangle_A + c_2 |X_2\rangle_A) (c_1^* \langle X_1| + c_2^* \langle X_2|) \xrightarrow{\text{décohérence}} |c_1|^2 |X_1\rangle_A \langle X_1| + |c_2|^2 |X_2\rangle_A \langle X_2| \quad (1 \quad 23)$$

Le taux de décohérence (inverse du temps nécessaire pour que $|e_1(t)\rangle$ et $|e_2(t)\rangle$ deviennent orthogonaux) est proportionnel au carré de la «distance» des pointer states dans l'espace des états. La décohérence est quasi-instantanée pour des superpositions macroscopiques. Cette propriété constitue un aspect essentiel de la théorie de la mesure. Un objet macroscopique (aiguille d'un appareil de mesure) admet comme «pointer» des états de position définie. Les superpositions de ces états décohèrent très vite et sont « non classiques ».

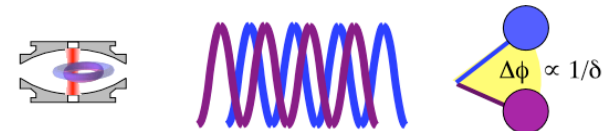
Chats de Schrödinger du champ

L'optique quantique fournit diverses méthodes de préparation et d'étude de superpositions de pointer states qui survivent pendant un temps physiquement observable. Leur étude constitue ainsi un domaine privilégié d'investigation de la limite classique quantique. Nous avons décrit certaines de ces expériences dans le cours 2002-2003.

L'expérience d'électrodynamique quantique en cavité de l'ENS consiste à préparer un champ cohérent de quelques photons dans une cavité de grande surtension, puis à déphaser ce champ avec un seul atome traversant la cavité. L'atome est préparé dans une superposition d'états correspondant à deux « indices » différents pour le champ. Celui-ci évolue alors dans une superposition d'états de phases différents. La décohérence de ces superpositions, d'autant plus rapide que les deux composantes sont plus séparées dans l'espace des phase, a été observée.



2. Non-resonant Atom prepared in state superposition dephases field, giving it two different phases at once



Two field states with different phases entangled to two atomic states : now, the field is a QND meter which points to the atom's energy!

Schrödinger cat situation!



Autre exemple de sauts quantiques et de pointer states: basculement de phase d'un qubit

L'opérateur de Lindblad unique est proportionnel à $Z = \sigma_z$:

$$L_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} Z \quad \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{\gamma}{2} [Z \tilde{\rho} Z - \tilde{\rho}] \quad (1 \quad 24)$$

Trajectoires stochastiques associées au basculement de phase:

Avec probabilité $P_1(\gamma) = \frac{\gamma}{2}$: $|\lambda_A\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \quad Z|\lambda_A\rangle = c_0|0\rangle - c_1|1\rangle \quad (1 \quad 25)$

Avec probabilité $P_0(\gamma) = 1 - \frac{\gamma}{2}$: $|\lambda_A\rangle = |0\rangle \quad |\lambda_B\rangle = |1\rangle \quad (1 \quad 26)$

Suite aléatoire de sauts de phase, avec une probabilité $\gamma/2$ par unité de temps

Les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, états propres de Z , sont des pointer states parfaits

Basculement de phase de N qubits couplés indépendamment à l'environnement: autre exemple simple de chat de Schrödinger

Chaque qubit a un opérateur de Lindblad Z_i et l'équation pilote de l'opérateur densité global ρ_N s'écrit:

$$\frac{d\rho_N}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_N] + \sum_{i=1}^N \left(Z_i \rho_N Z_i^\dagger - \frac{1}{2} \{Z_i^\dagger Z_i, \rho_N\} \right) \quad (1 \quad 27)$$

Avec probabilités

$$p_i(t) = \frac{1}{2} \left(\langle Z_i | \rho_N | Z_i \rangle \right) \quad (1 \quad 28a)$$

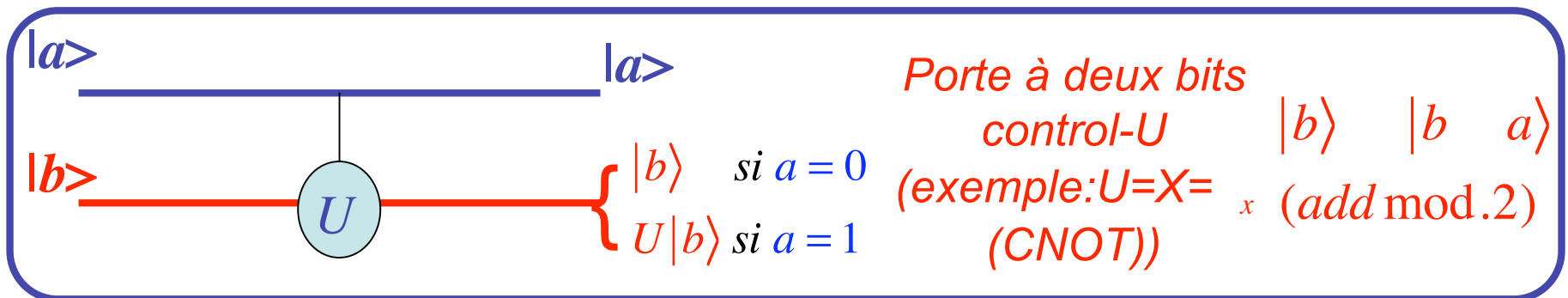
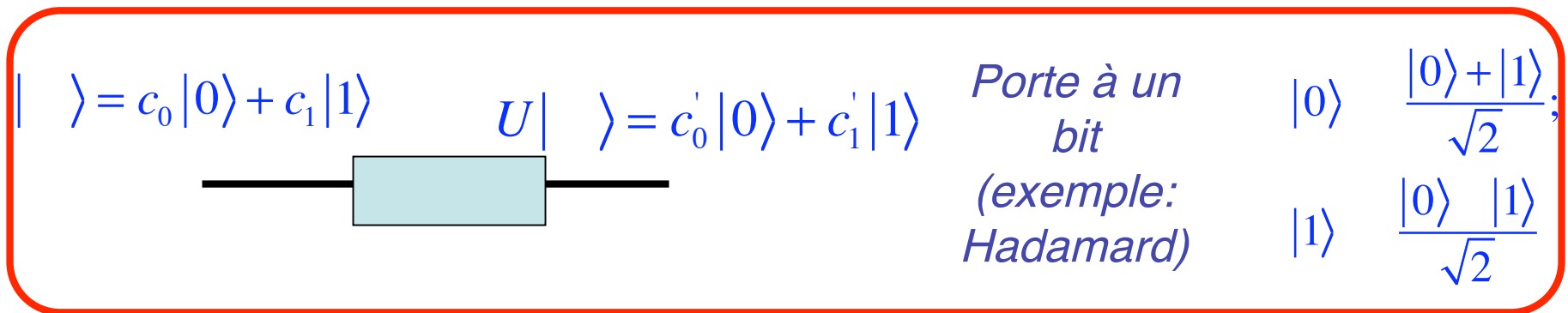
$$p_0(t) = 1 - \frac{N}{2} \left(\langle Z_i | \rho_N | Z_i \rangle \right) \quad (1 \quad 28b)$$

La fréquence des sauts est proportionnelle au nombre de particules. Les états produit tensoriel $|a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N\rangle$ ($a_i=0,1$) sont états propres de tous les Z_i et sont des pointer states parfaits. Par contre une superposition de pointer states subit des sauts de phase aléatoires avec une fréquence $N/2$ et décohère donc de plus en plus vite lorsque n augmente:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0,0,\dots,0\rangle + |1,1,1,\dots,1\rangle) \xrightarrow{\text{fréquence } N/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0,0,\dots,0\rangle - |1,1,1,\dots,1\rangle) \quad (1 \quad 29)$$

Les portes quantiques

L'information est codée dans des systèmes à deux états (qubits). La manipulation de ces qubits peut s'effectuer par deux types d'opérations réversibles: (i) des transformations unitaires agissant sur un seul bit (rotations du vecteur représentant le qubit sur la sphère de Bloch) et (ii) des portes unitaires à deux qubits, réalisant des transformations conditionnelles (couples **bit contrôle/ bit cible**).



Calcul quantique «Universel»

Toute opération unitaire dans l'espace de Hilbert à 2^N dimensions d'un ensemble de N qubits peut être réalisée par une combinaison de portes à 1 et 2 qubits. Toute porte à 2 qubits peut se décomposer en porte CNOT et portes à un bit: **la porte CNOT, complétée par les opérations à un qubit, est universelle pour le calcul quantique.**

Une fonction booléenne quelconque $f(x)$, application de $[0, 2^N-1]$ dans $[0, 1]$ peut être réalisée par la transformation réversible:

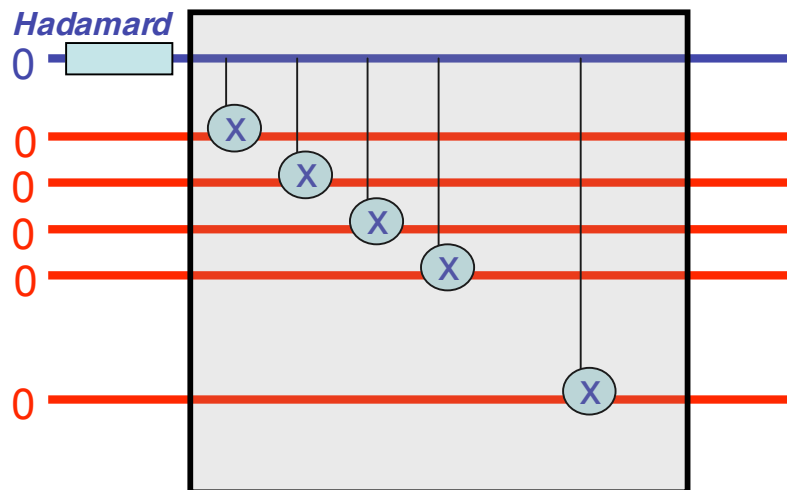
$$|x\rangle |a\rangle \rightarrow |x\rangle |a \oplus f(x)\rangle \quad (1 \quad 30)$$

où $|x\rangle = |a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\rangle$ est l'état produit tensoriel des N qubits «écrivant» en base 2 le nombre x ($a_i=0,1$). Cette opération étant unitaire, elle peut toujours être réalisée par des portes CNOT (addition conditionnelle modulo 2) et des portes à un bit. La valeur de la fonction est lue dans **le registre de sortie**, **le registre d'entrée** gardant sa valeur initiale (calcul réversible).

Une application quelconque $g(x)$ de $[0, 2^N-1]$ dans $[0, 2^p-1]$ est une combinaison de p fonctions booléennes. Elle peut donc, en toute généralité, se calculer à l'aide d'additions conditionnelles modulo 2 et d'opérations à un qubit.

Calcul parallèle, chat de Schrödinger et information quantique

Le calcul quantique fournit des exemples simples de construction d'états type chat de Schrödinger dans des systèmes à N particules. L'application de [0,1] dans [0,2^N-1] définie par f(0)= 0000...0 et f(1) = 1111...1 est calculée en parallèle par le circuit quantique suivant:



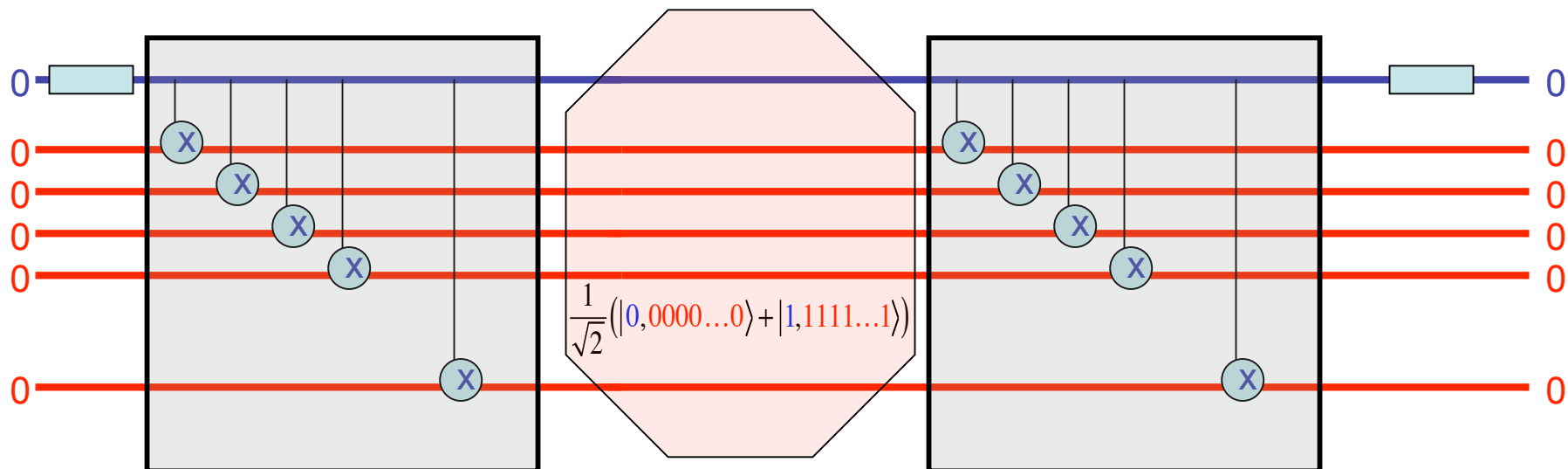
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0000 \dots 0\rangle + |1, 1111 \dots 1\rangle)$$

*Chat de Schrödinger de
N+1 qubits*

Une porte Hadamard sur le premier qubit, suivie de portes CNOT à deux qubits où les N qubits du registre «  » sont les cibles.

Réversibilité du calcul: faire et défaire des chats de Schrödinger et erreurs quantiques

Les opérations de calcul préparant l'état chat sont en principe parfaitement réversibles. En appliquant le circuit à l'envers, on revient à l'état initial:



Si un saut de phase se produit sur l'un des bits entre les 2 séries de portes, le signe de la superposition change: une erreur s'introduit dans le «calcul» et on ne trouve plus le 1^{er} bit dans l'état final 0 mais dans 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0000\dots0\rangle + |1,1111\dots1\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0000\dots0\rangle - |1,1111\dots1\rangle)$$

"décodage" $|0,0000\dots0\rangle$ devient si erreur $|1,0000\dots0\rangle$ (1 31)

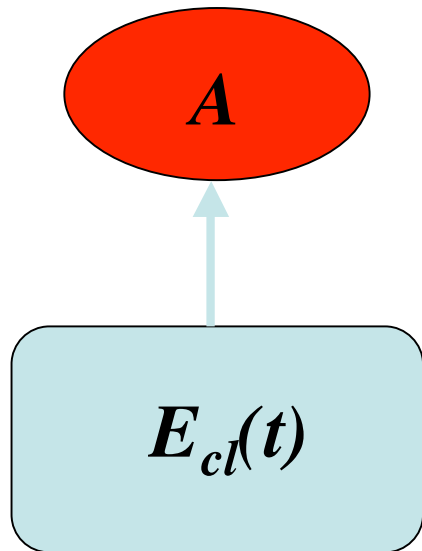
Comment éviter ou corriger ces erreurs?

2. Revue des stratégies de contrôle de la décohérence

Définition des concepts et revue des méthodes décrites en détail dans la suite:

- Bruit classique réversible ou bruit quantique irréversible? Distinction liée à l'existence ou non d'une intrication système - environnement. Exemple de réversibilité d'un bruit classique: l'écho de spin.
- Bruit quantique: retrouver la cohérence par mesure de l'environnement avec ou sans réaction. Gomme et «feed back» quantiques.
- Modifier le bruit quantique en changeant l'environnement: l'électrodynamique quantique en cavité.
- Jouer sur la symétrie du couplage entre qubits et environnement: ensemble d'atomes couplés symétriquement à une cavité.
- Agir sur la force effective du couplage par application de train d'impulsions. Lien avec l'effet Zénon quantique.
- Fabrication sur mesure d'environnements dans des expériences d'ions piégés et protection d'états quantiques particuliers.
- Codes correcteurs d'erreurs. Protection de la cohérence d'un système de qubits couplés à un environnement arbitraire, en n'observant que le système.

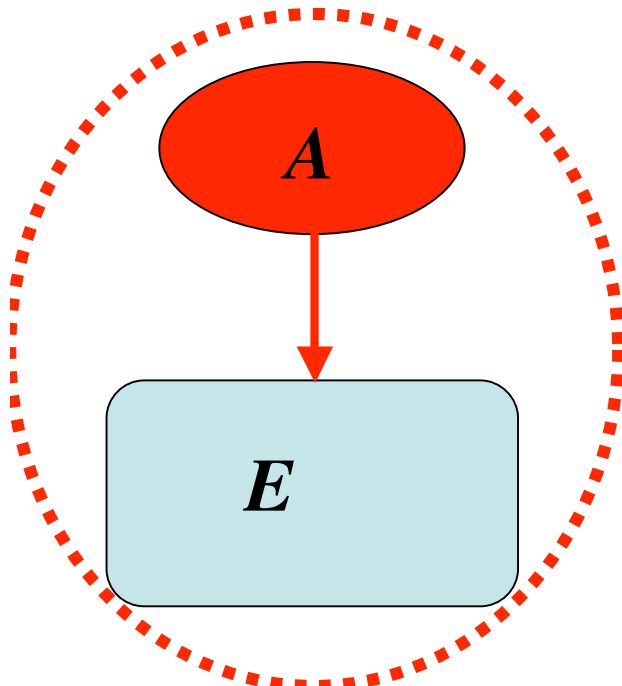
Bruit classique....



$$|A(0)\rangle |E_{cl}(0)\rangle |E_{cl}^A(t)\rangle |E_{cl}(t)\rangle \quad (2 \quad 1)$$

L'environnement E_{cl} évolue sans subir de réaction du système A . E_{cl} est un objet classique qui peut être observé avec une précision arbitraire, sans être perturbé. L'évolution de A dépend par contre de E_{cl} (l'information circule de E_{cl} vers A). Pas d'intrication entre A et E_{cl} .
Exemple: champs électromagnétiques classiques (grand nombre de photons).

....et bruit quantique



$$|A(0)\rangle |E(0)\rangle \sum_i c_i(t) |A_i(t)\rangle |E_i(t)\rangle \quad (2 \quad 2)$$

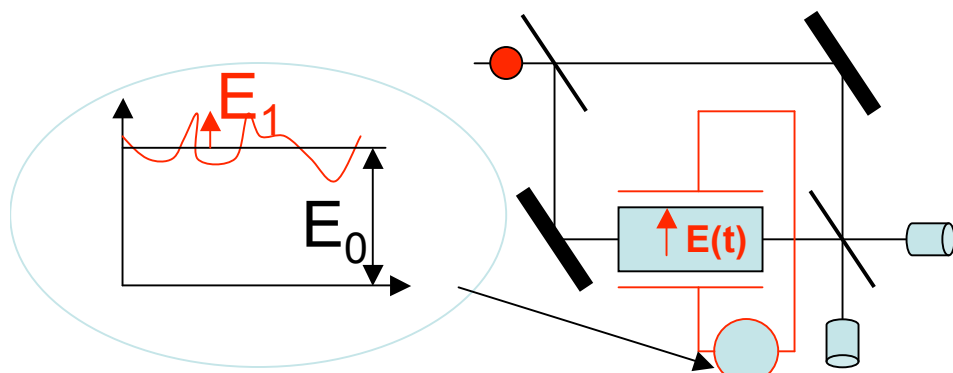
L'environnement E est un système quantique qui subit la réaction de A . L'information quantique est initialement transférée de A vers E . Les deux systèmes sont intriqués.

Exemples de bruit classique: champ aléatoire agissant sur un qubit

Photon dans un Mach-Zehnder.
Bruit d'indice produit par effet Kerr (champ électrique aléatoire)

$$E(t) = E_0 + E_1(t) \quad ; \quad \langle E_1(t) \rangle = 0 \quad ;$$

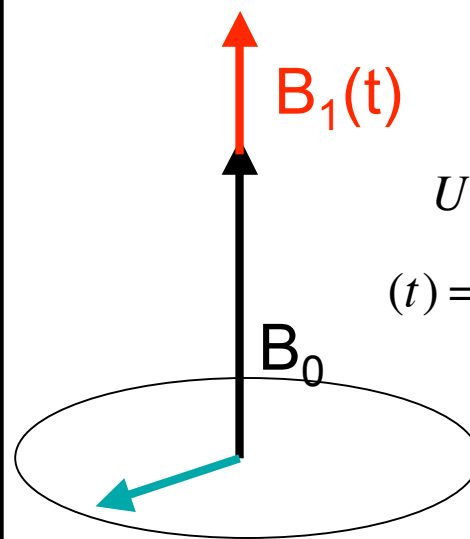
$$E^2 = 2E_0 \sqrt{\langle E_1^2(t) \rangle} \quad (2 \quad 3)$$



$$n(t) = n_0 + n_1 E^2(t) = n_0 + n_1 E_0^2 + 2n_1 E_0 E_1(t) \\ = 2n_1 E_0 \int_0^t E_1(t') dt' \quad (2 \quad 5)$$

$t=l/c$: temps d'interaction photon-
champ (l : longueur du milieu d'indice)

Précession de Larmor
d'un spin avec bruit de
champ magnétique
longitudinal

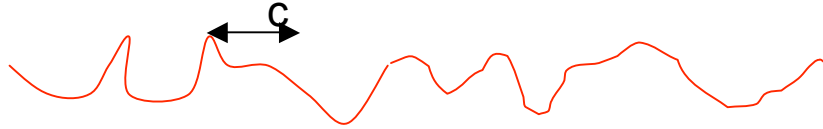


$$U(t) = e^{i(t) z/l^2} \quad ;$$

$$(t) = \int_0^t [B_0 + B_1(t')] dt' \quad (2 \quad 6)$$

$$= \int_0^t B_1(t') dt' \quad (2 \quad 7)$$

Temps de corrélation du bruit: « retrécissement par le mouvement »



τ_c : temps de corrélation du bruit: temps caractéristique d'amortissement de ses fluctuations. **Deux cas limites.**

Fluctuations lentes: $\tau_c \gg t$

Bruit figé pendant temps de traversée des particules: le brouillage des cohérences, caractérisé par l'écart quadratique moyen du champ, se produit si:

$$n_1 \frac{l}{c} E_0 \sqrt{\langle E_1^2(t) \rangle} \quad (\text{Mach-Zehnder}) \quad \sqrt{\langle B_1^2(t) \rangle} \cdot t \quad (2) \quad (\text{Larmor})$$

Temps de décroissance de la cohérence de Larmor: $T_2 \sim 2 / \sqrt{\langle B_1^2(t) \rangle}$

Fluctuations rapides: $\tau_c \ll t$

L'accumulation de phase change rapidement de signe pendant que le système est couplé au champ. La phase s'ajoute en valeur quadratique:

$$\sim 2n_1 E_0 \sqrt{\langle E_1^2(t) \rangle} \cdot \sqrt{l_c / c} \quad \text{ou} \quad \sim \sqrt{\langle B_1^2(t) \rangle} \cdot \sqrt{t_c} \quad (2 \quad 8)$$

Pour des spins, la vitesse de décohérence est ralentie (retrécissement par le mouvement). Le temps d'amortissement de la cohérence de Larmor devient:

$$T_2' \sim 4 / \sqrt{\langle B_1^2(t) \rangle} \cdot \tau_c \sim T_2 \cdot 2 / (\sqrt{\langle B_1^2(t) \rangle} \cdot \tau_c) \gg T_2 \quad (2 \quad 9)$$

Caractère lent ou rapide des fluctuations défini par le paramètre: $\sqrt{\langle B_1^2(t) \rangle} \cdot \tau_c$
(rotation de la cohérence induite par le bruit pendant le temps de corrélation)

Correction du bruit classique

Le bruit classique est (en principe) corrigeable par mesure de l'environnement. La cohérence s'observe dans des expériences statistiques impliquant un grand nombre de réalisations d'interférences à une particule. Dans le cas du Mach-Zehnder, on peut envoyer (l'un après l'autre) un grand nombre de photons, détecter chacun d'eux dans une voie ou l'autre et reconstruire les franges sur le signal moyen, en fonction de la différence de phase imposée entre les voies. Pour la précession de Larmor (cohérence entre $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$), on peut mesurer en fonction du temps la valeur moyenne d'une composante du spin transversal, ce qui exige des mesures sur un grand nombre de spins que l'on suppose pour commencer interagissant un à un avec le champ (en pratique, on effectue souvent l'expérience en un coup sur un échantillon macroscopique en mesurant l'aimantation de l'ensemble. Nous analysons plus loin l'effet de champs fluctuants dans ce cas).

Mesurons le champ fluctuant dans l'intervalle de temps où chaque particule traverse l'appareil. On peut alors évaluer (éq. 2-5 et 2-7) l'erreur du déphasage subi par la particule et la corriger en modifiant, dans les fichiers où sont enregistrées les données brutes de l'expérience, la phase effective ou le temps effectif de la particule correspondante. On peut aussi, en utilisant des générateurs de champ, compenser le bruit par un signal de phase opposée et rétablir les interférences.

Réversibilité du bruit classique

Les effets du bruit classique sont réversibles *parce qu'on peut mesurer l'environnement sans affecter le système, les deux parties étant non intriquées*. La corrélation entre système et environnement est de nature purement classique. L'information contenue dans l'environnement peut être lue sans dommage pour le système et cette information utilisée pour corriger les effets du bruit et retrouver le signal que l'on aurait en absence de celui-ci.

De façon plus précise, l'effet d'un environnement classique entre deux instants donnés sur un système quelconque est décrite par une transformation unitaire du système seul. Cette transformation peut être déterminée en principe avec une précision arbitraire par une mesure de l'environnement, sans affecter le système. Cette transformation possède un inverse et on peut toujours, en principe, acquérir l'information requise pour « fabriquer » cette transformation unitaire inverse et l'appliquer au système pour éliminer les effets du bruit:

$$\begin{aligned} U_{A E_{cl}}(t) \left| \begin{array}{l} A(0) \\ E_{cl}(0) \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{l} E_{cl}(t) \\ A(t) \end{array} \right\rangle \\ \left| \begin{array}{l} E_{cl}(t) \\ A(t) \end{array} \right\rangle &= U_{E_{cl}}(t) \left| \begin{array}{l} A(0) \\ E_{cl}(0) \end{array} \right\rangle \\ \left| \begin{array}{l} A(0) \\ E_{cl}(0) \end{array} \right\rangle &= U_{E_{cl}}^{-1}(t) \left| \begin{array}{l} E_{cl}(t) \\ A(t) \end{array} \right\rangle \quad (2 \quad 10) \end{aligned}$$

Relaxation transversale d'un échantillon solide dans un champ statique inhomogène: écho de spin.

Ensemble de spins dans un solide en présence d'un champ ayant une composante le long de Oz spatialement inhomogène, figée dans le temps. Le spin i voit la perturbation $B_{1,i}$. Les spins, initialement le long de Oz , sont préparés à $t=0$ le long de Ox par une impulsion très courte, correspondant à une rotation $\pi/2$ autour de Oy . L'opérateur correspondant est:

$$U_{Oy}^{(\pi/2)} = e^{i(\pi/4) \sigma_y} \quad (2 \quad 11)$$

Entre 0 et t , l'évolution du spin est décrite par (rotation de Larmor autour de Oz):

$$U_i(t) = e^{i \omega_i(t) \sigma_z / 2} \quad \text{avec} \quad \omega_i(t) = (B_0 + B_{1,i})t \quad (2 \quad 12)$$

L'étalement de la fréquence de Larmor annule le spin transversal moyen en un temps $T_2 \sim 2 / \sqrt{\langle B_{1,i}^2 \rangle}$ où la moyenne $\langle \rangle$ porte sur tous les spins i . Après un temps $T \gg T_2$, appliquons à nouveau une rotation impulsionnelle autour de Oz , cette fois d'un angle π , définie par:

$$U_{Oy}^{(\pi)} = e^{i(\pi/2) \sigma_y} = i \sigma_y \quad (2 \quad 13)$$

Echo de spin (suite)

Laissons ensuite le système évoluer entre T et $t > T$. Son évolution globale est décrite par le produit d'opérations unitaires:

$$U_i^{ES}(t) = U_i(t-T)(i\sigma_y)U_i(T)e^{i(\sigma_z/4)\gamma} \quad (2-14)$$

Récrivons cette expression en remarquant que $\sigma_y^2 = I$ et en notant les identités:

$$(i\sigma_y)U_i(t-T)(i\sigma_y) = (i\sigma_y)e^{i\sigma_z(t-T)/2}(i\sigma_y) = e^{+i\sigma_z(t-T)/2} = U_i(T-t) \quad (2-15)$$

On obtient finalement:

$$U_i^{ES}(t) = (i\sigma_y)(i\sigma_y)U_i(t-T)(i\sigma_y)U_i(T)e^{i(\sigma_z/4)\gamma} = (i\sigma_y)U_i(T-t)U_i(T)e^{i(\sigma_z/4)\gamma} = (i\sigma_y)U_i(2T-t)e^{i(\sigma_z/4)\gamma} \quad (2-16)$$

Ainsi, l'application de l'impulsion à l'instant t revient effectivement *à renverser le sens du temps pour l'évolution ultérieure du système* (équ.2-16). A l'instant $t=2T$ les phases ont repris leur valeur initiale et on a quel que soit i :

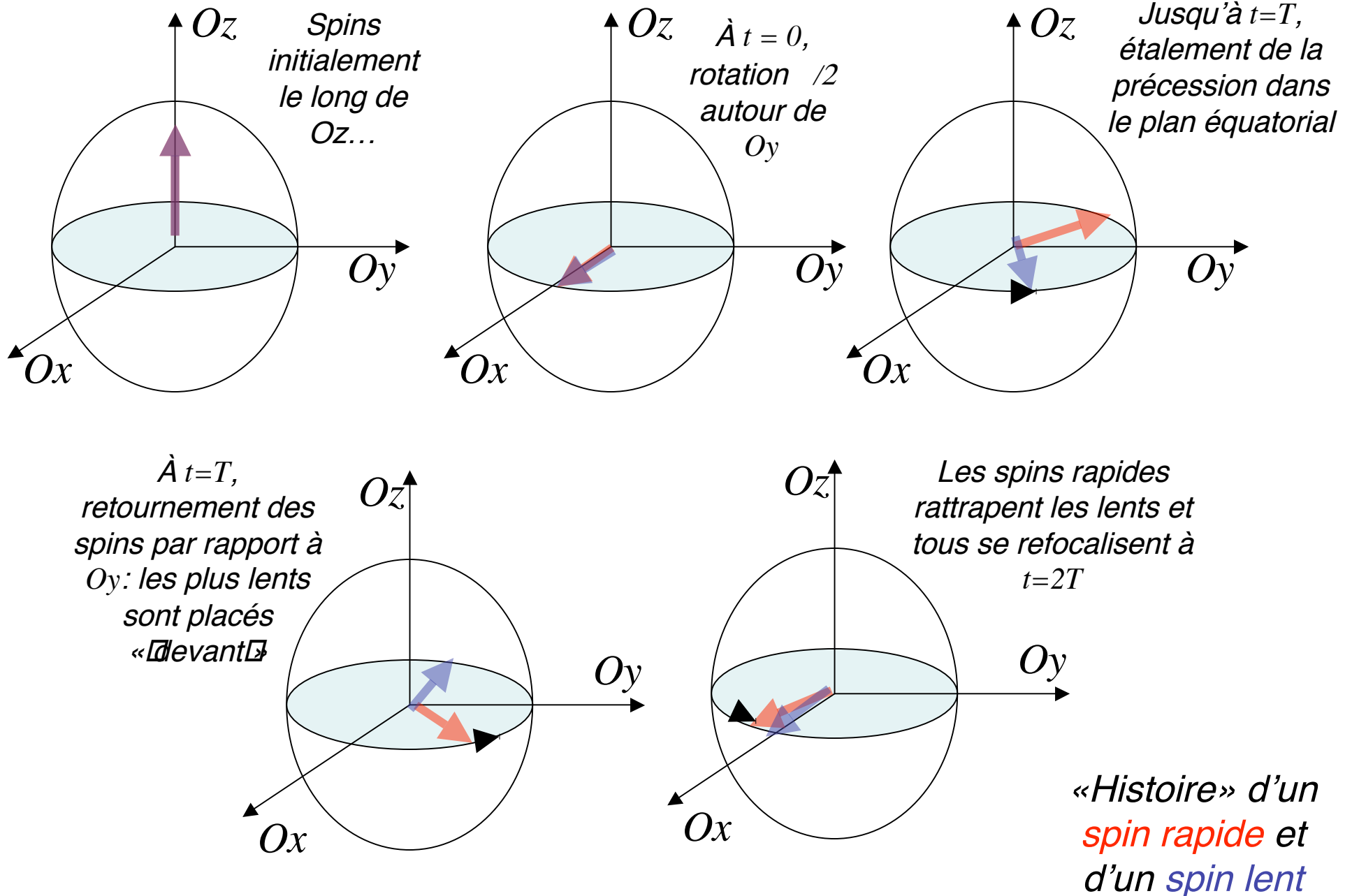
$$U_i^{ES}(t=2T) = (i\sigma_y)e^{i(\sigma_z/4)\gamma} = e^{i(3\sigma_z/4)\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

Tous les spins se refocalisent dans l'état:

$$|i(t=2T)\rangle = U_i^{ES}(t=2T)|+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z) \quad (2-18)$$

Interprétation en terme de rotation sur la sphère de Bloch (page suivante).

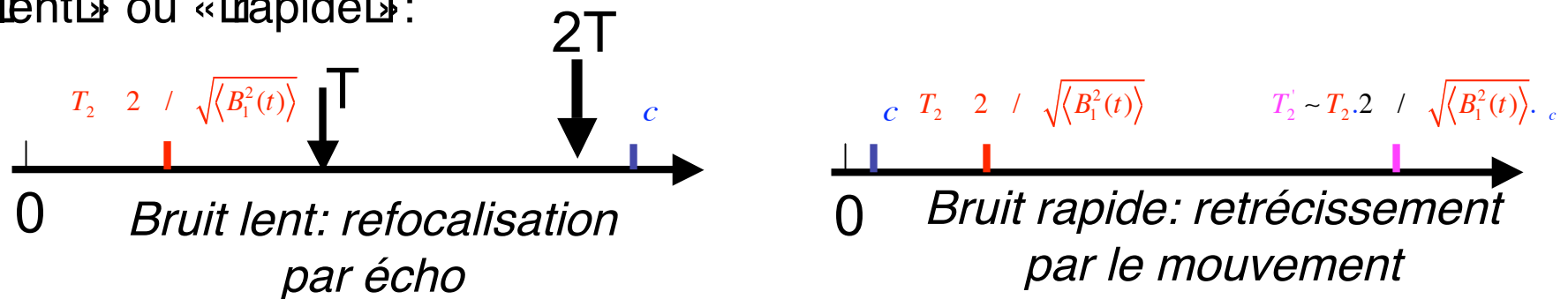
L'écho de spin « ∇u » sur la sphère de Bloch



Echo de spin et retrécissement par le mouvement

Le concept de refocalisation par perturbation rapide du système nous inspirera plus loin dans la discussion des méthodes de découplage dynamique de l'environnement. Il y a refocalisation par écho parce que les spins voient une perturbation gardant sa mémoire pendant le temps $2T$. Effet très utile en RMN pour étudier la cohérence des spins dans différents contextes. Si les spins bougent dans le gradient de champ (diffusion dans un liquide ou gaz), le temps de corrélation τ_c du bruit est de l'ordre du temps de libre parcours moyen. Si ce temps est court, on a le phénomène naturel de retrécissement par le mouvement, avec l'allongement du T_2 mentionné plus haut. L'application d'une impulsion d'écho à un temps $T \ll \tau_c$ est alors moins efficace. Elle conduit à une amplitude d'écho réduite.

Il y a ainsi deux phénomènes différents, l'un artificiel, l'autre naturel, qui conduisent à allonger le temps de cohérence des spins, suivant que le bruit est «lent» ou «rapide» :



Difficultés pour corriger le bruit quantique

Considérons maintenant le cas où le système A et l'environnement E s'intriquent au cours de l'évolution. Considérons le modèle simple de décohérence où un système A dans une superposition d'états se couple à des états de l'environnement devenant très vite orthogonaux:

$$\sum_i c_i |A_i(0)\rangle |E(0)\rangle \rightarrow \sum_i c_i |A_i(t)\rangle |E_i(t)\rangle \quad (2 \quad 19)$$

On ne peut plus mesurer E sans produire un effet de réaction sur A. En particulier une mesure directe de E dans la base $|E_i(t)\rangle$ détruit toutes les cohérences entre états $|A_i\rangle$. De plus, l'évolution de A seul n'est plus ni unitaire ni réversible. Il est donc, en général, impossible d'envisager la stratégie classique décrite plus haut (*acquisition d'une information sur E sans perturber A, suivie d'une inversion de l'évolution de A conditionnée à la mesure de E*). Il faut envisager des stratégies plus subtiles pour préserver l'information quantique utile contenue dans A.

Gomme quantique et «feed back» quantique

Gomme quantique: le but est de rétablir par une mesure «floue» les cohérences quantiques entre états de A effacées par le couplage avec l'environnement. On mesure sur E une observable ne donnant pas d'information sur le «chemin» suivi par A et on corrèle les mesures sur A et sur E . On peut rétablir alors des cohérences qui ont disparu sur les mesures inconditionnelles de A seul. La problématique de ce type d'expérience (mesures quantiques corrélées sur deux systèmes intriqués) est celle du problème EPR.

Feed back quantique: on observe continûment les sauts quantiques du système qui s'amortit par émission de quanta dans l'environnement. Quoiqu'irréversible dans l'espace de Hilbert H_A de A , chaque saut peut être localement inversé dans un sous-espace de H_A par une transformation unitaire. On rétablit alors la cohérence restreinte au sous espace H_A , par des opérations unitaires conditionnées aux résultats de mesures effectuées sur l'environnement.

Nous donnons au §3 une description plus détaillée de ces deux méthodes.

Les stratégies «actives» de modification de l'environnement: électrodynamique en cavité et couplage symétrique avec le réservoir

Plutôt que d'observer l'environnement et corriger ses effets sur A, on peut chercher à le modifier en agissant sur les paramètres auxquels A est sensible:

- Modification du spectre de l'environnement électromagnétique d'atomes par confinement du système dans une boîte. C'est le principe de *l'électrodynamique quantique en cavité*. En changeant le spectre des fluctuations du vide agissant sur l'atome, on peut inhiber ou accélérer son émission spontanée (& 4).
- Modification de la symétrie du couplage à l'environnement. En général, les différentes parties (qubits) du système sont couplés à des environnements indépendants, agissant de façon incohérente (voir &1). Il est parfois possible de coupler les différentes parties du système de façon symétrique à un même environnement. Pour certains états, ceci conduit à une accélération de la décohérence (*superradiance* décrite au &5). On peut aussi, pour d'autres états, exploiter des effets d'interférence entre couplages des différentes parties du système à un même état final de l'environnement pour supprimer la décohérence. Un exemple en est donné par le phénomène de *subradiance* dans une cavité (& 6).

Les stratégies «actives» de modification de l'environnement: perturbation en impulsions et effet Zénon quantique

-On peut aussi diminuer l'amplitude effective du couplage entre le système et l'environnement en changeant rapidement, de façon répétitive le signe du terme d'interaction système-environnement (cf méthodes de refocalisation en RMN). On applique une série d'impulsions courtes revenant à inverser périodiquement le signe de l'interaction. Cette opération doit s'effectuer avec une période courte devant le temps de corrélation du couplage à l'environnement, ce qui rend son application pratique difficile, sauf dans des cas particuliers où le temps de corrélation est long.

-La méthode, qui revient à perturber fortement le système pour en geler l'évolution, présente une grande analogie avec *l'effet Zénon quantique* où le gel de l'évolution cohérente du système résulte de l'effet perturbateur d'une mesure impulsionnelle ou continue effectuée sur lui. Nous décrivons au §7 les stratégies perturbatives de gel de l'évolution d'un système ouvert et analysons en détail l'effet Zénon.

Environnements artificiels: exemple des ions piégés

-Nous avons considéré jusqu'ici des situations où la forme des opérateurs de saut quantiques est imposée par la nature, en n'envisageant que des modifications du spectre des réservoirs (ce qui revient à changer le temps de corrélation du couplage), ou encore des changements artificiels de la symétrie ou de l'intensité du couplage effectif. Une autre méthode de contrôle de la décohérence, appliquée à des *ions piégés*, consiste à changer entièrement les opérateurs de saut eux-mêmes, en induisant, grâce au couplage des ions avec des lasers de fréquence et de polarisation convenables, des sauts quantiques impliquant par exemple la perte simultanée de plusieurs quanta. En changeant les opérateurs de Lindblad, on modifie aussi les « pointer states » qui en sont les états propres. Connaissant les états que l'on cherche à protéger, on peut mettre au point des recettes pour fabriquer l'environnement et le couplage qui vont conduire aux bons opérateurs de Lindblad.

En général, la création d' environnements artificiels ne supprime pas l'environnement naturel, mais ajoute simplement une cause supplémentaire de décohérence. La compétition entre environnements naturels et artificiels peut cependant, dans certains cas, conduire à protéger des états fortement non classiques. Nous étudierons ces problèmes au §8.

Mieux que le contrôle de l'environnement?

les codes correcteurs d'erreurs

Les méthodes décrites jusqu'à présent mettent l'accent sur l'observation, le contrôle ou la mesure de l'environnement. Elles dépendent donc de la nature spécifique de chaque situation physique et ne peuvent que fournir des solutions partielles du problème de la décohérence. Elles sont insatisfaisantes pour résoudre le problème fondamental de l'information quantique qui se propose de manipuler un système de qubits intriqués sans observer ni toucher un environnement a priori quelconque. La réponse à ce problème est fournie, en principe, par les codes correcteurs d'erreurs quantiques.

Le principe de ces codes est de détecter les effets de la décohérence sur le système seul et de se servir de cette détection (syndrome) pour en corriger les effets et rétablir la cohérence au fur et à mesure qu'elle se perd. La méthode repose, comme la correction d'erreurs des ordinateurs classiques, sur un *codage redondant de l'information*, un qubit logique étant codé dans N qubits physiques. La description précise de ces méthodes dépasse le seul domaine de la physique et requiert des bases en théorie de l'information sur la correction d'erreurs classique. Sans entrer dans les détails, nous décrivons le principe général des codes correcteurs au §9. Cette dernière section pourrait servir d'introduction à un cours ultérieur.