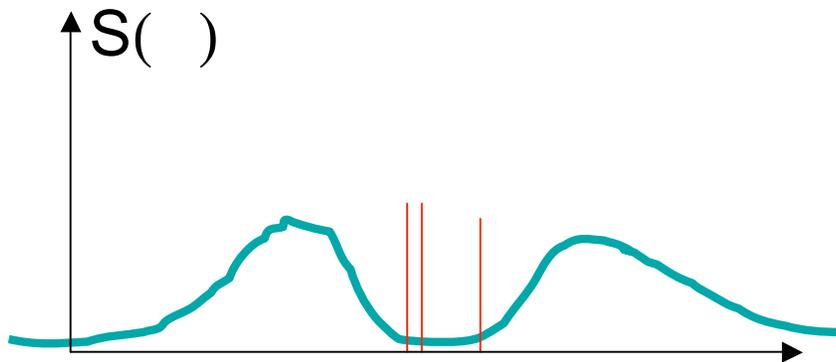
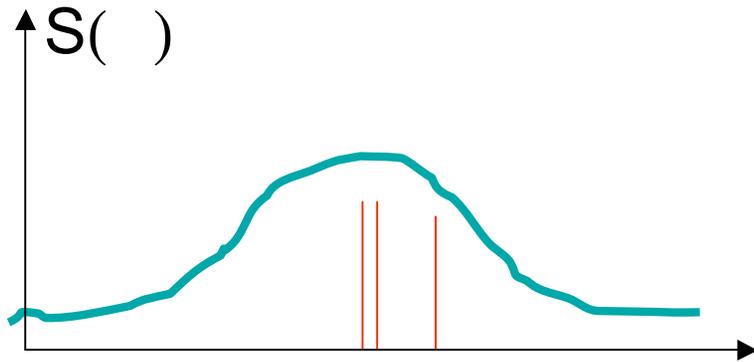


4.

Modification du spectre de l'environnement: l'électrodynamique quantique en cavité

Emission spontanée d'un atome dans une cavité. Modification de la densité des modes du champ conduisant soit à l'inhibition soit à l'exaltation de l'émission spontanée. Interprétation en terme d'images électriques du dipôle atomique dans les parois de la cavité. Description d'expériences dans les domaines micro-onde (atomes de Rydberg) et optique. Ces effets sont observés dans le régime perturbatif («surcritique») de l'électrodynamique en cavité. Transition entre ce régime et celui du couplage fort correspondant aux expériences décrites dans les cours antérieurs.

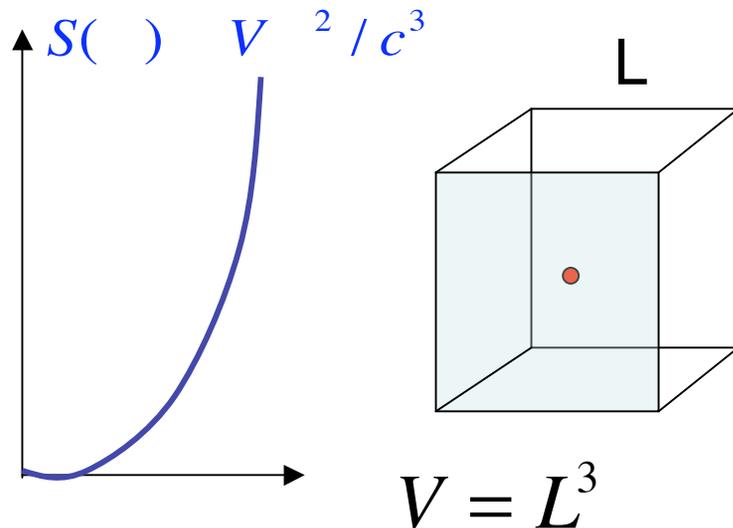
Modifier le spectre de l'environnement



Les probabilités des transitions induites par le couplage d'un système **A** avec l'environnement **E** sont proportionnelles aux densités spectrales de **E** aux **fréquences de Bohr de ces transitions** (nombre de paires de niveaux de **E** dont la fréquence de Bohr tombe dans un intervalle de fréquence unité autour d'une fréquence donnée). Il faut de plus pondérer cette densité par le carré de l'élément de matrice du couplage **A-E**. Si on modifie la densité spectrale de l'environnement pour produire «un trou» aux fréquences de Bohr du système, on réduit de façon dramatique l'effet du couplage à l'environnement.

Pour un environnement électromagnétique, on réalise cette modification en changeant les conditions aux limites du champ entourant **A** (électrodynamique quantique en cavité).

Rappel sur l'émission spontanée dans l'espace libre



Couplage *atome-champ*:

$$= D_{eg} E_{vide} / \hbar \sim D_{eg} \cdot \sqrt{\hbar / 2 \epsilon_0 V} / \hbar \quad (4 \quad 1)$$

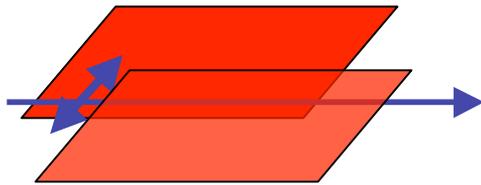
On compte les modes du champ dans une boîte dont le côté L tend vers l'infini à la fin des calculs. Le résultat est indépendant de la forme exacte de cette boîte. Le volume V s'élimine de la formule finale. La densité des modes est proportionnelle à ν^2 et le carré du couplage atome-champ, proportionnel au carré des fluctuations du vide, ajoute un autre facteur ν : le taux d'émission est proportionnel à ν^3 (argument à la «Règle d'Or de Fermi»):

$$\sim \nu^2 S(\nu_{eg}) \sim |D_{eg}|^2 \nu^3 / \epsilon_0 \hbar c^3 \quad (4 \quad 2)$$

Pour un atome à deux niveaux, on trouve la formule exacte:

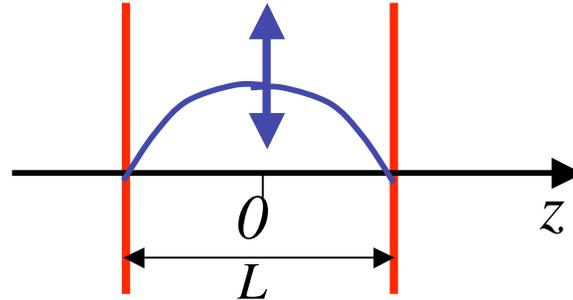
$$= \frac{|D_{eg}|^2 \nu^3}{3 \epsilon_0 \hbar c^3} = \frac{8 \pi \nu^2 |D_{eg}|^2}{3 \epsilon_0 \hbar^3} \quad (4 \quad 3)$$

Inhibition de l'émission spontanée par suppression des modes résonnants avec la transition atomique



Propagation entre deux plans conducteurs avec une polarisation parallèle aux plans

D.Kleppner, PRL 47, 233 (1981)



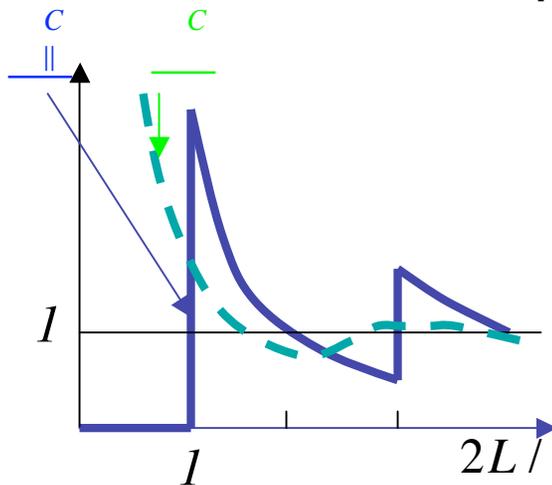
Le champ polarisé parallèlement aux plans doit s'annuler sur ceux-ci (conditions aux limites). Pour un champ non nul au centre:

$$E(z) \sim \cos k_z z; E(\pm L/2) = 0$$

$$k_z = (2p + 1) \frac{\pi}{L} \quad p \text{ entier} \quad (4 \quad 4)$$

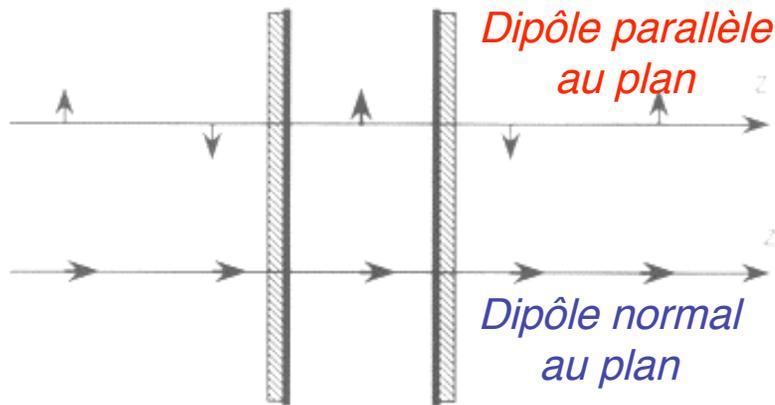
Condition sur la longueur d'onde pour la propagation du champ transverse entre les plans (phénomène de coupure):

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad k_z = \frac{2\pi}{L} \quad (4 \quad 5)$$



Taux d'émission d'un atome à égale distance des parois, avec dipôle parallèle (traits pleins) ou **normal** à celles-ci (pointillés), en fonction de leur séparation L . Avec polarisation parallèle, il ne peut émettre si $L < c/2$, c'est à dire si $\omega < c/2L$ (coupure). Avec polarisation normale, il rayonne jusqu'à $L=0$, avec taux augmenté.

Interprétation en terme d'images dans les parois

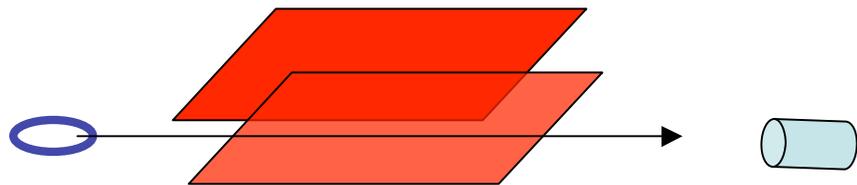


Le champ rayonné par un dipôle dans une cavité est la somme du champ direct que le dipôle rayonnerait dans l'espace libre et du champ réfléchi par les parois. Le champ réfléchi correspond à celui de «dipôles images» en phase ou opposition de phase avec le dipôle source.

Les dipôles images correspondant aux réflexions successives du champ ont des signes alternés pour un dipôle source parallèle aux plans, de même signe pour un dipôle source normal aux plans. *Si $L < \lambda/2$, les champs rayonnés par toutes les images entre les plaques interfèrent destructivement avec le champ direct dans le premier cas. Le champ résultant est nul. Dans le second cas, les champs rayonnés interfèrent positivement et le dipôle source peut rayonner (même plus rapidement que dans l'espace libre).* Situation analogue (et plus simple) dans le cas du rayonnement en présence d'un seul plan conducteur. Si le dipôle est parallèle au plan, à une distance très inférieure à $\lambda/2$, il interfère de façon totalement destructrice avec son image (unique) et l'émission est inhibée. S'il est normal au plan, il interfère constructivement avec son image et le taux d'émission est doublé.

Expérience d'inhibition d'émission spontanée avec des atomes de Rydberg circulaires

Inhibition de l'émission spontanée micro-onde

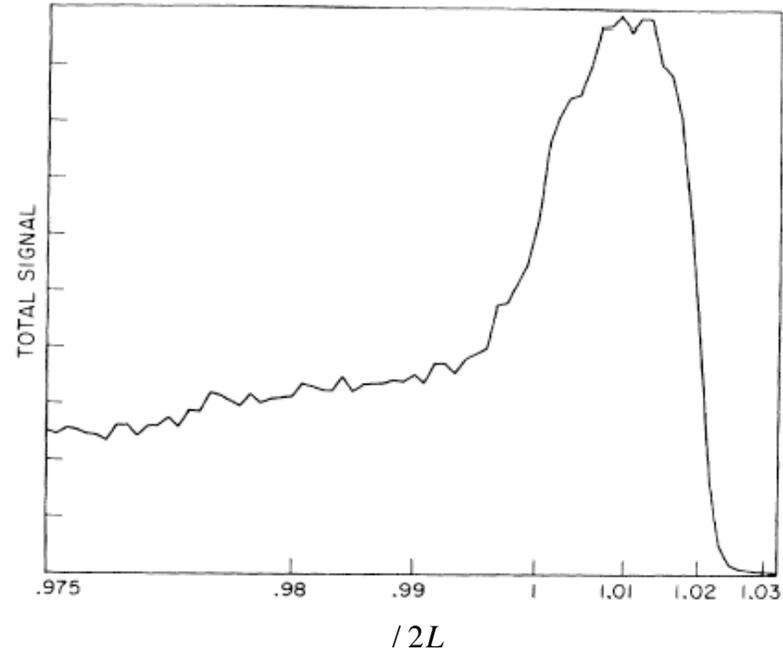


Atome préparé dans l'état de Rydberg circulaire $n=22$ (orbite parallèle aux plaques) Détecteur à ionisation

Schéma de principe de l'expérience

Transition inhibée $n=22 \rightarrow n'=21$ à $\lambda = 0.45\text{mm}$

R.G.Hulet, E.S.Hilfer et
D.Kleppner, PRL 55, 2137 (1985).

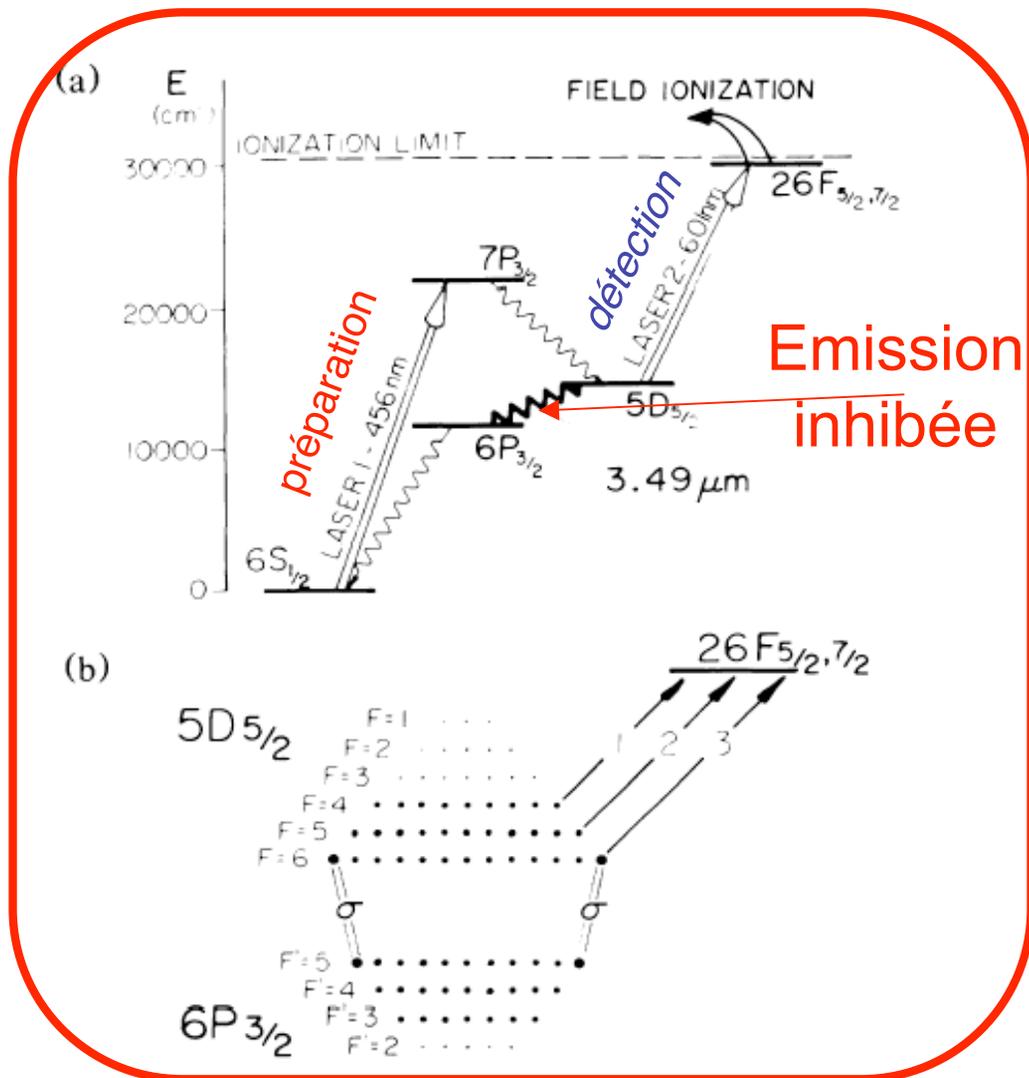


Transmission atomique en fonction de $l/2L$:
est varié par effet Stark à L constant.
l'augmentation brusque du signal pour
 $l/2L=1$ démontre l'inhibition de l'émission
spontanée de l'atome de Rydberg qui survit
alors plus longtemps dans son état initial.

L'inhibition est aussi observée pour les processus stimulés par le rayonnement thermique entre les plaques.

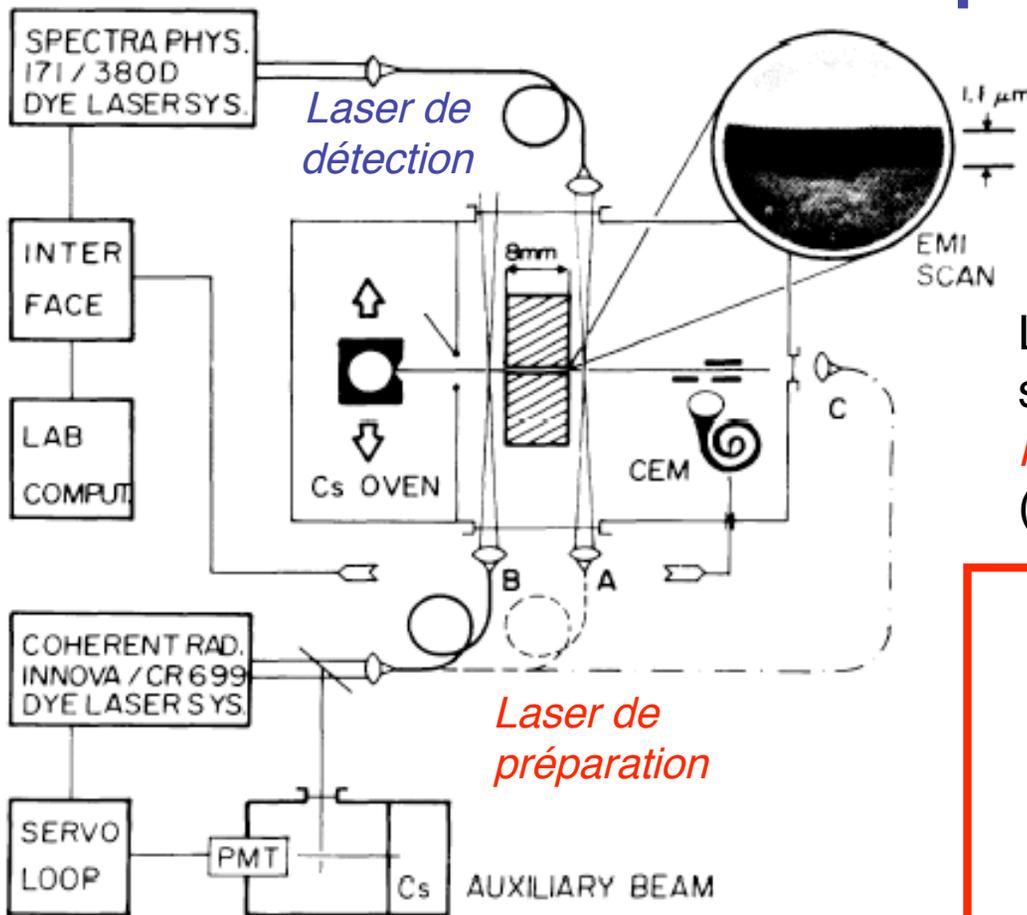
Inhibition de l'émission spontanée dans le domaine optique et démonstration des effets de polarisation

Jhe, Anderson, Hinds, Meschede, Moi et Haroche, *PRL*, 58, 666 (1987)



Un atome de Césium préparé par **excitation laser** dans $5D_{5/2}$ rayonne par émission spontanée ($\lambda = 3,49 \mu\text{m}$) vers $6P_{3/2}$ (durée de vie naturelle $1,6 \text{ ns}$). Les sous niveaux de F, M_F maximum ($F=M_F = \pm 6$) ont leur dipôle parallèle aux plans conducteurs (émission de polarisations \pm). Les atomes restant dans le niveau $5D$ après traversée de la structure sont détectés par absorption d'un **faisceau laser de détection** résonnant vers le niveau de Rydberg $26F$, suivie de l'ionisation de ce niveau dans un champ électrique.

Inhibition de l'émission de photon optique (suite)

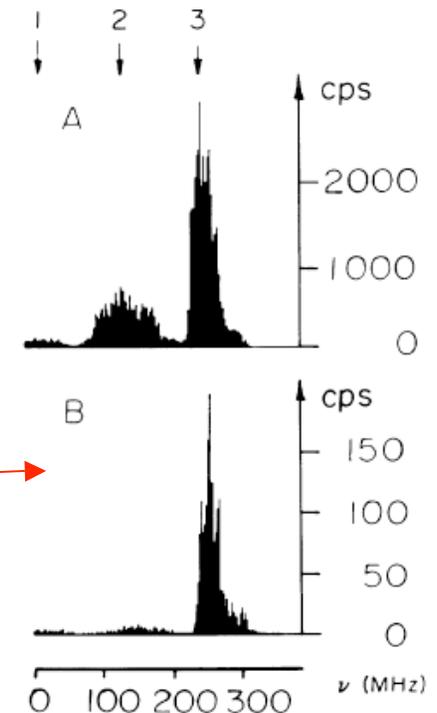


Guide à atome de 8 mm de long réalisé à l'aide de deux plaques de quartz dorées séparées par 1,1 μm (vue par un microscope électronique)

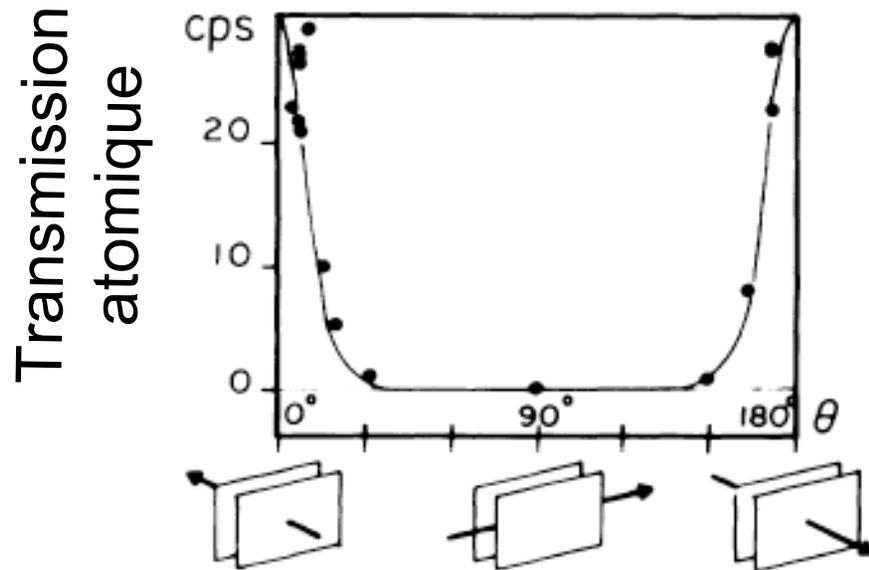
Les atomes sont préparés dans $5D$ soit avant le guide (position B du *laser de préparation*) soit après (position A).

En position B (les atomes excités traversent le guide), seul le pic correspondant aux atomes de M_F maximum survit, prouvant l'inhibition de l'émission pour ces niveaux.

Atomes détectés dans $5D$ en fonction de la fréquence du *laser de détection*. Les pics 1,2,3 correspondent à différentes composantes hyperfines de la transition $5D-26F$



Inhibition de l'émission: effet de polarisation

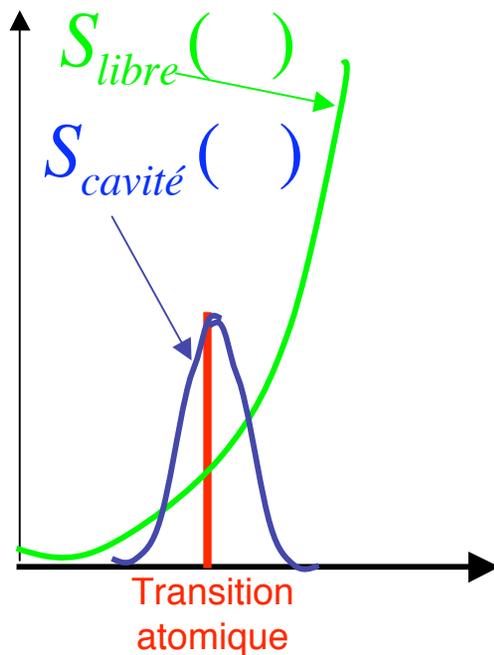


La transmission du guide est modifiée par application d'un champ magnétique qui contrôle l'orientation du dipôle rayonnant dans la cavité. L'angle entre la direction du champ et la normale aux plans du guide est varié entre 0 et 180° .

Pour $\theta = 0$ ou 180° , la précession de Larmor de l'atome maintient le dipôle dans le plan parallèle aux plaques et l'inhibition de l'émission subsiste: la transmission des atomes dans les états de $|M_F|=6$ est maximale. Pour un angle θ compris entre 0 et 180° , la précession de Larmor crée une composante du dipôle normal aux plans qui peut rayonner, ce qui raccourcit le temps d'émission spontanée et réduit la proportion d'atomes de $|M_F|=6$ atteignant le détecteur (points expérimentaux, courbe théorique)

Les atomes détectés ont survécu ~ 12 durées de vie naturelle

Effet inverse: augmentation du taux d'émission spontanée dans une cavité résonnante



Au lieu de diminuer le taux d'émission en supprimant des modes de rayonnement accessibles à l'atome, on peut utiliser une cavité pour augmenter la densité des modes résonnants et accélérer en conséquence l'émission spontanée par rapport à ce qu'elle est dans l'espace libre. Cette prédiction de *Purcell en 1946* (*Phys.Rev. 69, 681, (1946)*), est l'idée de départ de l'électrodynamique quantique en cavité. L'effet peut se comprendre soit comme dû à l'augmentation des fluctuations du vide autour de l'atome, soit comme un effet d'interférence constructive des champs rayonnés par les images sur le dipôle source, augmentant la réaction de rayonnement subie par ce dipôle par rapport à sa valeur dans l'espace libre. L'effet concerne aussi bien l'émission spontanée que l'émission induite par le champ thermique.

Effet Purcell par la règle d'Or de Fermi

La situation que nous considérons est celle d'un atome à deux niveaux résonnant avec un mode d'une cavité de fréquence angulaire ω et de facteur de qualité Q . Ce mode peut être décrit comme un environnement présentant pour l'atome un spectre Lorentzien de largeur ω/Q . La densité spectrale vue par l'atome est donc Q/ω . D'après l'équation (4-1), le carré du couplage atome-champ est proportionnel à $|D_{eg}|^2/V$ où V est le volume du mode de la cavité. On attend donc un taux d'émission atomique assisté par la cavité indépendant de ω et proportionnel à $Q|D_{eg}|^2/V$. Compte tenu de (4-3), on trouve alors que le taux d'émission atomique dans la cavité Γ_{at}^c rapporté à Γ_{at} est:

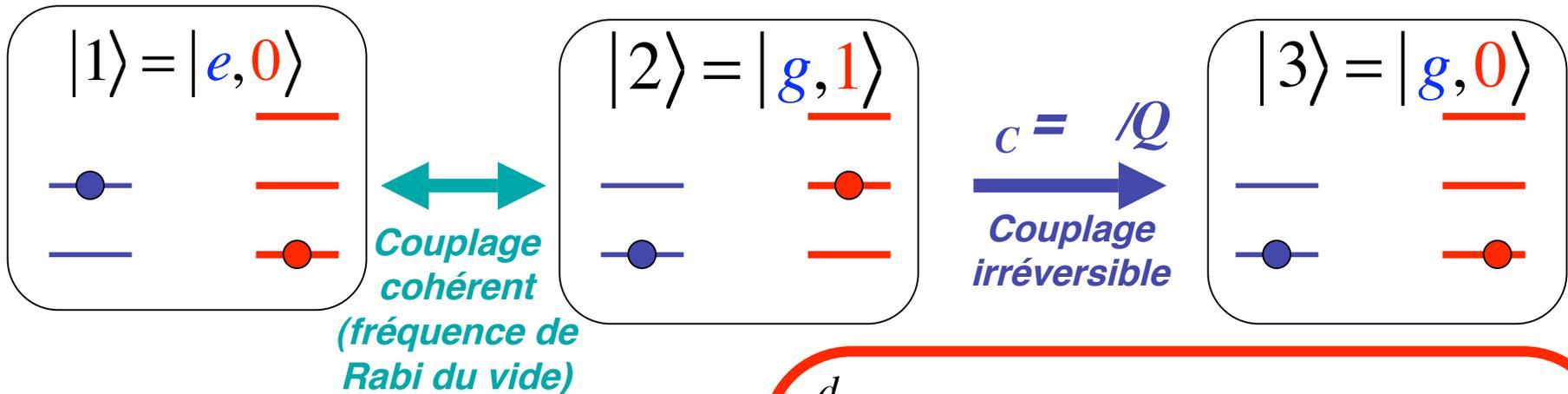
$$\Gamma_{at}^c / \Gamma_{at} \sim \frac{Q}{V} \quad (4-6)$$

(Nous ne considérons ici que l'ordre de grandeur et négligeons les facteurs de l'ordre de 10^3 qui seront rétablis plus loin). Le même facteur d'amplification s'applique aux processus thermiques stimulés dans la cavité. L'effet est donc d'autant plus grand que le facteur de qualité est plus important et que le volume de la cavité est plus petit. Ce modèle ne s'applique cependant que tant que le mode de spectre Lorentzien peut être décrit comme un continuum de fréquence, ce qui exclut des facteurs Q trop grands (voir plus loin pour une discussion des deux régimes de l'électrodynamique quantique en cavité).

Un atome excité dans une cavité résonnante: modèle exact à 3 états



$$= \frac{1}{\hbar} |D_{eg}| \cdot \sqrt{\hbar / 2 \epsilon_0 V}$$



Equation pilote pour le système à trois états obtenue simplement à partir de l'équation de Schrödinger du système atome-champ et de l'équation pilote décrivant l'amortissement du champ dans la cavité (voir cours 2003-2004)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} \\
 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \end{pmatrix} \\
 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} &= 2i \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix} - \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} \\
 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 33 \\ 22 \end{pmatrix} &= -c \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \end{pmatrix} \quad (4 \quad 7)
 \end{aligned}$$

Les deux régimes d'évolution. Le cas du régime surcritique.

Si $\gamma_c > \Gamma$: régime surcritique irréversible. L'excitation passe de l'atome aux modes de l'environnement sans avoir le temps d'exciter appréciablement la cavité. C'est le régime d'amplification de l'émission spontanée prédit par Purcell.

Si $\gamma_c < \Gamma$: régime réversible d'oscillation de Rabi. L'excitation oscille en s'amortissant entre l'atome et la cavité, avant de disparaître finalement dans l'environnement extérieur. C'est le régime de couplage fort de l'électrodynamique en cavité (voir plus loin).

Envisageons ici le cas très surcritique ($\gamma_c \gg \Gamma$). L'état $|2\rangle = |g, 1\rangle$ est alors très peu peuplé puisqu'il se vide vers $|3\rangle$ beaucoup plus vite qu'il n'est alimenté par $|1\rangle$. On peut alors éliminer «adiabatiquement» cet état en faisant les approximations suivantes:

$$\frac{d}{dt} \rho_{22} \approx 0; \quad \frac{d}{dt} (\rho_{12} \quad \rho_{21}) \approx 0$$

$$\rho_{22} \sim \frac{i}{c} (\rho_{12} \quad \rho_{21}) \sim 4 \frac{g^2}{c} \rho_{11} \quad (4 \quad 8)$$

Le régime irréversible d'amplification de l'émission spontanée: le facteur de Purcell

L'élimination adiabatique de l'état $|2\rangle$ conduit immédiatement aux équations:

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = 4 \frac{\omega_c^2}{c} \rho_{11} - \gamma_{at} \rho_{11}$$

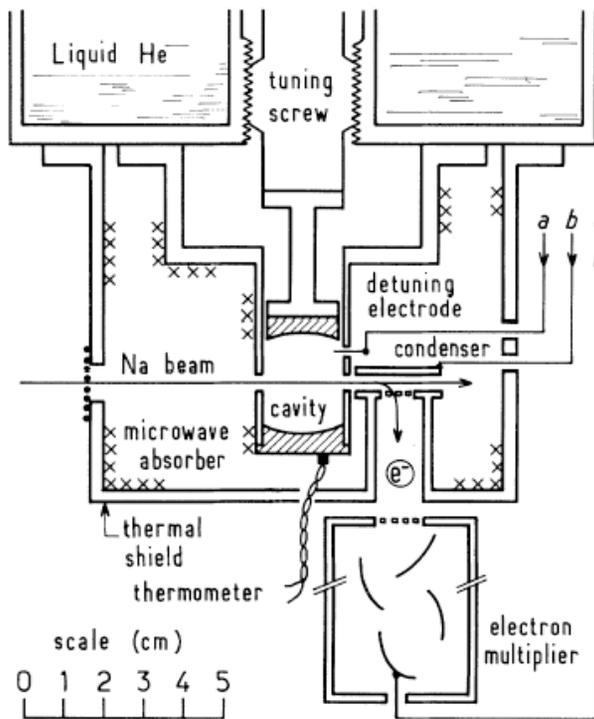
$$\gamma_{at} = 4 \frac{\omega_c^2}{c} = 4Q \frac{\omega_c^2}{c} = 2Q \frac{|D_{eg}|^2}{\hbar V} = \frac{3}{4} Q \frac{\omega_c^3}{V} \quad (4-9)$$

La dernière égalité s'obtient en comparant le taux d'amortissement dans la cavité au taux dans l'espace libre (équation 4-3). On voit ainsi que l'émission spontanée dans la cavité est accélérée par le facteur de Purcell (on retrouve avec un facteur numérique précis le résultat annoncé par l'équation 4-6):

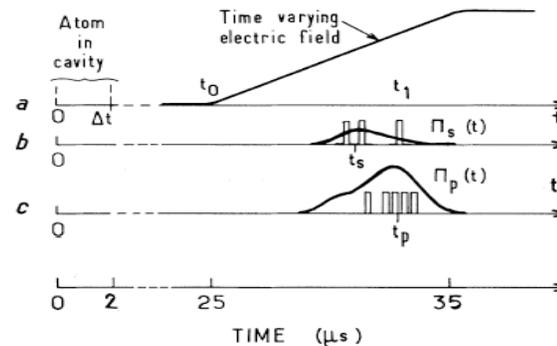
$$= \frac{3}{4} Q \frac{\omega_c^3}{V} \quad (4-10)$$

Première démonstration de l'effet Purcell

(P.Goy, J-M.Raimond, M.Gross et S.Haroche, PRL 50, 1903 (1983))



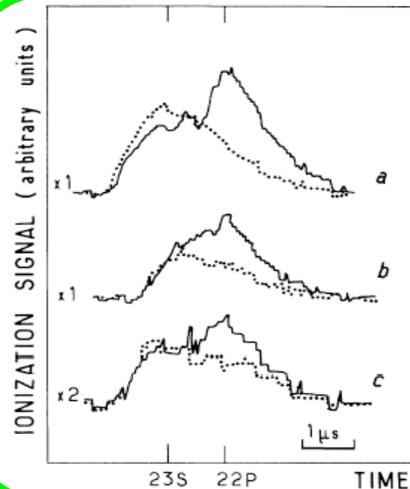
Atomes de Rydberg préparés dans l'état $23S$ dans une cavité ($V=70\text{mm}^3$) résonnante avec la transition $23S-22P$ ($=340\text{GHz}$). $c=2$ $/Q$ 10
 $= 2.8 \cdot 10^6\text{s}^{-1}$, $(23S-22P) = 150\text{s}^{-1}$;
 $= \frac{c}{at}$ $(23S \ 22P) = 530$



Ionisation du $23S$

Ionisation du $22P$

Signal d'ionisation dans une rampe de champ croissant, détectés après sortie des atomes de la cavité. Le niveau $22P$ s'ionise dans un champ plus grand, soit après le $23S$.



Signaux avec nombre moyen N d'atomes simultanément présents dans la cavité: $N = 3,5, 2$ et $1,3$ respectivement pour les courbes a, b, c . *Cavité à résonance (traits pleins) ou hors résonance (pointillés).*

Conclusions sur le régime surcritique (Markovien) de l'électrodynamique en cavité

L'atome émettant dans une cavité «voit» l'environnement extérieur à travers la bande passante de la cavité. L'inverse de la largeur de la cavité, $1/\tau_c = Q/\tau$, correspond au temps de corrélation τ_c de l'environnement extérieur filtré par la cavité. La condition du régime surcritique de Purcell peut donc s'écrire:

$$\tau_c < 1/\tau \quad (4 \quad 11)$$

Les expériences décrites au §4 appartiennent toutes à ce régime. L'évolution atomique est alors décrite par une équation pilote, avec un taux d'émission modifié (augmenté ou diminué) par rapport à ce qu'il est dans l'espace libre. À côté de cette modification des taux de dissipation, il y a aussi une modification dispersive des fréquences propres de l'atome (déplacement de type Lamb shift induits par les modes de la cavité), que nous n'avons pas décrite ici, mais qui est facile à analyser. Dans le modèle des images électriques, la perturbation produite par les dipôles induits dans les parois de la cavité possède un terme dissipatif (champ de réaction en quadrature avec le dipôle émetteur) et un terme dispersif (champ de réaction en phase avec ce dipôle).

Du régime perturbatif au régime de couplage fort de l'électrodynamique en cavité.

Lorsqu'on augmente le facteur de qualité Q , le temps de corrélation τ_c croît. Lorsqu'il devient égal à $1/\gamma$, l'évolution de l'atome ne peut plus être décrite par une équation pilote irréversible. Les effets de mémoire du réservoir (environnement extérieur filtré par la cavité) deviennent importants. C'est le régime de couplage fort de l'électrodynamique en cavité, étudié dans les cours des années précédentes. Le phénomène essentiel est l'oscillation de Rabi de l'atome dans la cavité, avec absorption et réémission d'un photon dans celle-ci. Nous avons étudié en détails ce phénomène dans les années antérieures.

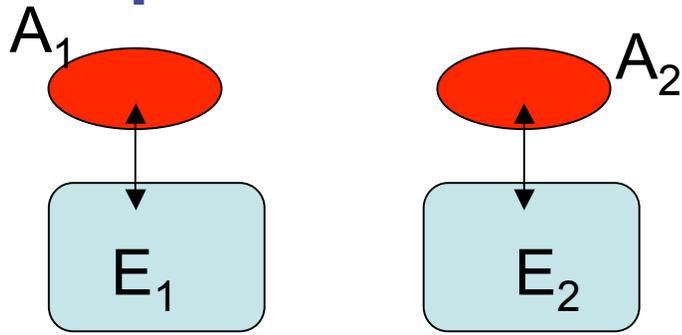
C'est dans le régime de couplage fort que l'on a pu réaliser des expériences pour intriquer les états de l'atome et du champ, démontrer les opérations de portes et de mémoires quantiques, faire des expériences de mesure non destructives de champs et d'atomes, fabriquer des états de type chats de Schrödinger du champ et étudier leur décohérence (*voir les cours des années 2001-2002, 2002-2003 et 2003-2004*).

5.

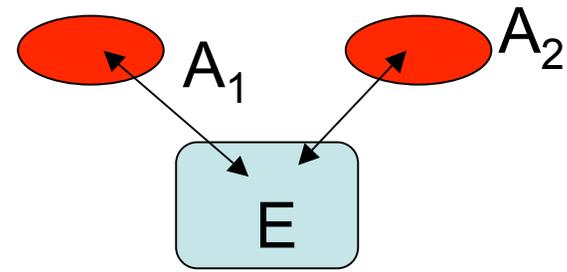
Couplage symétrique à l'environnement: exemple de la superradiance en cavité

Cas limites du couplage de systèmes à des environnements indépendants ou au même environnement. Exemple de l'émission de deux atomes à grande ou à petite distance l'un de l'autre. Cas où les atomes rayonnent dans une cavité, avec un couplage symétrique au mode du champ. Accélération de l'émission: la superradiance. Analyse des trajectoires de Monte Carlo d'un ensemble de N atomes. Analogie avec l'émission spontanée d'un moment angulaire $J=N/2$. L'évolution de la distribution de l'excitation atomique au cours du temps: théorie et vérification expérimentale. Le régime non-Markovien pour les très grands nombres d'atomes ou les très bonnes cavités.

Systeme ouvert composite: couplage independant ou collectif à l'environnement?



Le couplage independant se modelise en associant des environnements distincts, non corrélés, aux parties du systeme



Couplage collectif: même environnement pour les parties du systeme

Ces deux situations limite conduisent à des equations de Lindblad différentes. Dans le cas de N systemes identiques dont l'évolution est décrite par un operateur saut par systeme L_i ($i=1,N$), avec un taux de saut γ , on a respectivement pour un couplage independant ou collectif:

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] - \frac{\gamma}{2} \sum_i (L_i^\dagger L_i \rho + \rho L_i^\dagger L_i - L_i \rho L_i^\dagger) \quad (5.1)$$

Couplage independant

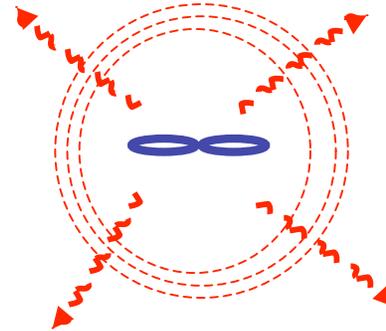
Couplage collectif

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] - \frac{\gamma}{2} \sum_i (L_i^\dagger - L_j) \rho (L_i^\dagger - L_j) + \sum_i (L_i \rho L_i^\dagger - L_j \rho L_j^\dagger) \quad (5.2)$$

Cas de la fluorescence de deux atomes excités: de l'émission incohérente à la superradiance



Atomes rayonnent indépendamment dans des modes différents ($r_{12} \gg \lambda$)



Atomes rayonnent ensemble dans les mêmes modes ($r_{12} < \lambda$)

Rayonnement de 2 atomes dans l'espace libre, à grande distance: les probabilités par unité de temps d'émission sont indépendantes, égales à Γ . La probabilité par unité de temps du premier saut (1^{er} photon détecté) est 2Γ . Après le 1^{er} clic, la probabilité par unité de temps de détection du 2nd devient Γ (il n'y a plus qu'un atome excité).

Si les atomes sont proches, le couplage symétrique des atomes au champ conduit à une corrélation forte des dipôles atomiques et à une accélération du processus d'émission du second photon: c'est la superradiance décrite pour la première fois par Dicke (Phys.Rev.93, 99 (1954)). Dans l'espace libre, l'effet est compliqué par des interactions de type électrostatique (van der Waals) entre les atomes rapprochés. La situation est plus simple lorsque les atomes rayonnent collectivement dans une cavité (voir plus loin).

Les trajectoires quantiques associées aux deux types d'émission (indépendante ou collective)

Dans le cas de l'émission spontanée d'atomes à deux niveaux identiques, on définit les opérateurs de saut quantique (cours 2003-2004): $L_i = \sqrt{\gamma} |g\rangle_i \langle e| = \sqrt{\gamma} \sigma_i^- / 2$
 Pour 2 atomes, l'évolution unitaire infinitésimale associée au calcul des trajectoires stochastiques est décrite par les équations suivantes, correspondant au cas de rayonnement indépendant ou collectif:

$$U(\delta t) | \rangle_{A_1 A_2} = 1 - \frac{i}{\hbar} (H_1 + H_2) \delta t - \frac{\gamma}{8} (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) (\sigma_1^- + \sigma_2^-) | \rangle_{A_1 A_2} | 0 \rangle_E + \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \sigma_1^- | \rangle_{A_1 A_2} | 1 \rangle_E + \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \sigma_2^- | \rangle_{A_1 A_2} | 2 \rangle_E \quad (5.3)$$

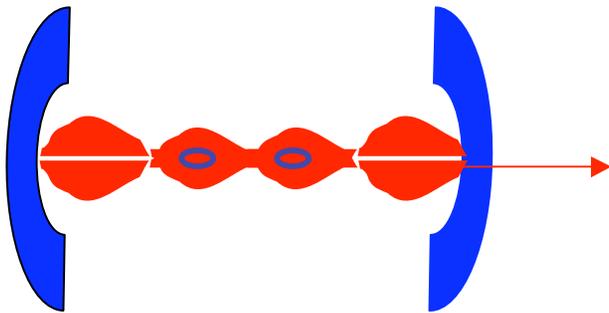
Fluorescence indépendante

$$U(\delta t) | \rangle_{A_1 A_2} = 1 - \frac{i}{\hbar} (H_1 + H_2) \delta t - \frac{\gamma}{8} (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) (\sigma_1^- + \sigma_2^-) | \rangle_{A_1 A_2} | 0 \rangle_E + \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (\sigma_1^- + \sigma_2^-) | \rangle_{A_1 A_2} | 1 \rangle_E \quad (5.4)$$

Fluorescence collective

Différence essentielle: dans le 1^{er} cas, l'environnement évolue vers 2 états finals différents, ce qui permet de savoir quel atome a émis, alors que c'est impossible dans le 2nd (un seul état final de l'environnement). L'impossibilité de distinguer l'atome émetteur conduit alors à une intrication des atomes et à des effets collectifs.

Réalisation de la superradiance: rayonnement d'atomes dans une cavité dans le régime de Purcell



Atomes identiques placés aux ventres du champ dans la cavité couplés symétriquement au mode. Régime surcritique de Q modéré, tel que le temps de dissipation des photons, $1/\gamma_c$, est court devant le temps d'évolution collective des atomes. La cavité constitue alors un environnement

symétrique pour les atomes, la fuite de photons ne révélant pas l'identité de l'atome qui a émis. Un atome unique a un taux d'émission $\gamma_{at}^c = 3Q^3 / 4^2 V$.

L'évolution stochastique d'un ensemble d'atomes (cas $N=2$ pour commencer) correspond au chemin unique:

$$|e, e\rangle \quad |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, g\rangle + |g, e\rangle) \quad |g, g\rangle \quad (5 \quad 5)$$

L'état atomique intermédiaire est maximalelement intriqué. Les probabilités par unité de temps des sauts associés aux deux émissions successives sont:

$$p_1^{SR} = \frac{1}{4} |\langle s | (\gamma_1 + \gamma_2) | e, e \rangle|^2 \gamma_{at}^c = 2 \gamma_{at}^c ; \quad p_2^{SR} = \frac{1}{4} |\langle g, g | (\gamma_1 + \gamma_2) | s \rangle|^2 \gamma_{at}^c = 2 \gamma_{at}^c \quad (5 \quad 6)$$

La corrélation induite par le couplage symétrique à l'environnement a multiplié par 2 la probabilité **du second saut** et donc accéléré le processus d'émission.

Emission collective de N atomes dans une cavité

L'effet d'accélération de l'émission, limité pour deux atomes, devient spectaculaire pour $N \gg 1$ atomes couplés collectivement à la cavité.

L'opérateur de saut collectif est:

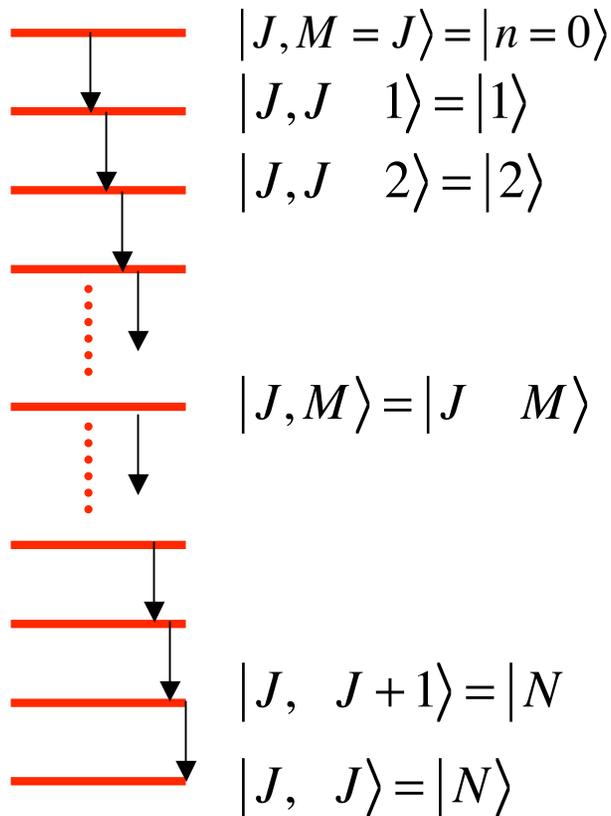
$$\sqrt{\frac{c}{at}} \sum_i \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{c}{at}} J \quad (5 \quad 7)$$

Avec l'adjoint J^+ de J^- et l'opérateur diagonal $J_z = (1/2) \sum_i \sigma_z$ qui mesure l'excitation totale des atomes (variant de $N/2$ à $-N/2$ au cours de l'émission) on dispose de trois opérateurs dont les commutateurs satisfont à une algèbre de moment cinétique:

$$J^+, J^- = 2J_z; \quad J_z, J^\pm = \pm J^\pm \quad (5 \quad 8)$$

On en déduit que l'action de J^- sur l'état initial entièrement excité $|e, e, e, \dots\rangle$ est la même que celle de l'opérateur moment cinétique sur un état de moment angulaire $J = M_J = N/2$. En faisant agir de façon répétée J^- sur cet état, on génère une chaîne d'états symétriques (par échange d'atomes) reliés entre eux par les éléments de matrice de J bien connus (algèbre du moment angulaire). L'ensemble d'atomes se comporte ainsi comme un moment angulaire $J = N/2$ cascasant dans les états $|J, M\rangle$, la quantité $J - M$ représentant le nombre d'atomes désexcités (et le nombre de photons émis) à un moment donné du processus.

Emission collective de N atomes (suite)



Cascade radiative. Le nombre de photons émis lorsque l'atome atteint l'état $|J, M\rangle$ est $n = J - M$. On peut suivre l'évolution en indexant soit l'état des atomes (M) soit le nombre de photons émis (n). Sur une trajectoire quantique, la probabilité par unité de temps d'émission du $n+1^{\text{ème}}$ photon est:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{n \rightarrow n+1} &= \frac{c}{at} |\langle J, M - 1 = J - n - 1 | J^+ | J, M = J - n \rangle|^2 \\
 &= \frac{c}{at} \langle J, M = J - n | J^+ J | J, M = J - n \rangle \\
 &= \frac{c}{at} (J + M)(J - M + 1) = \frac{c}{at} (N - n)(n + 1) \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

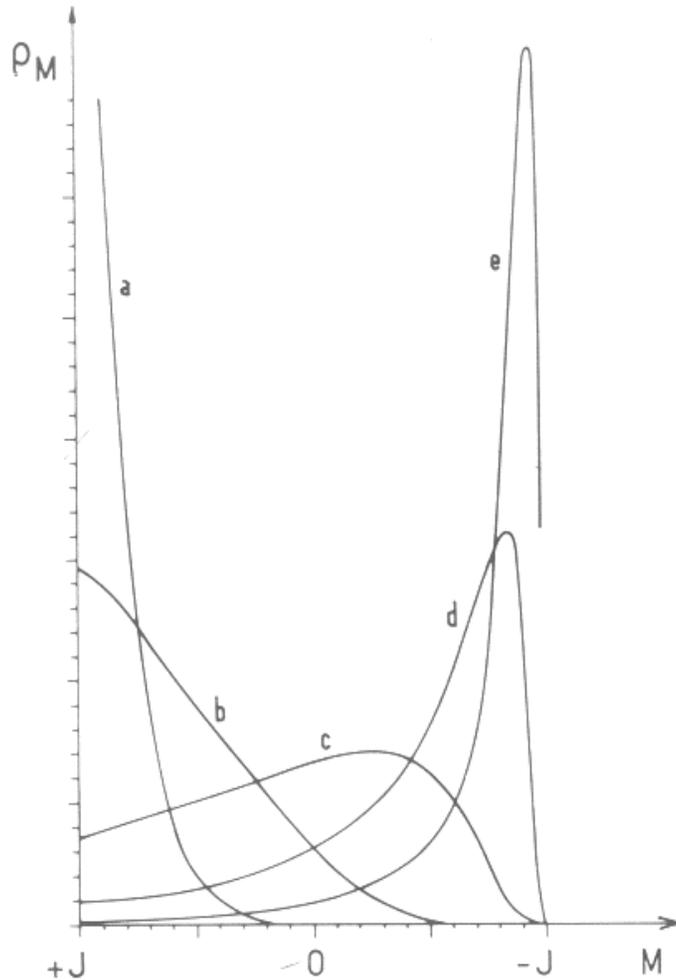
Cette probabilité est une fonction quadratique de n , qui passe par un maximum égal à $\frac{c}{at} N(N + 2) / 4$ lorsque $N/2$ photons ont été émis.

Ordre de grandeur du temps d'émission sur une trajectoire typique:

$$T = \frac{1}{\Gamma_{0 \rightarrow 1}} + \frac{1}{\Gamma_{1 \rightarrow 2}} + \dots + \frac{1}{\Gamma_{n \rightarrow n+1}} + \dots = \frac{1}{\frac{c}{at}} \left[\frac{1}{N} + \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{3(N-2)} + \dots \right] \sim \frac{1}{N} \frac{c}{at} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right] = \frac{Log N}{N} \frac{c}{at} \quad (5.10)$$

Le couplage collectif des N atomes à la cavité accélère l'émission dans un rapport de l'ordre de $N/Log N$.

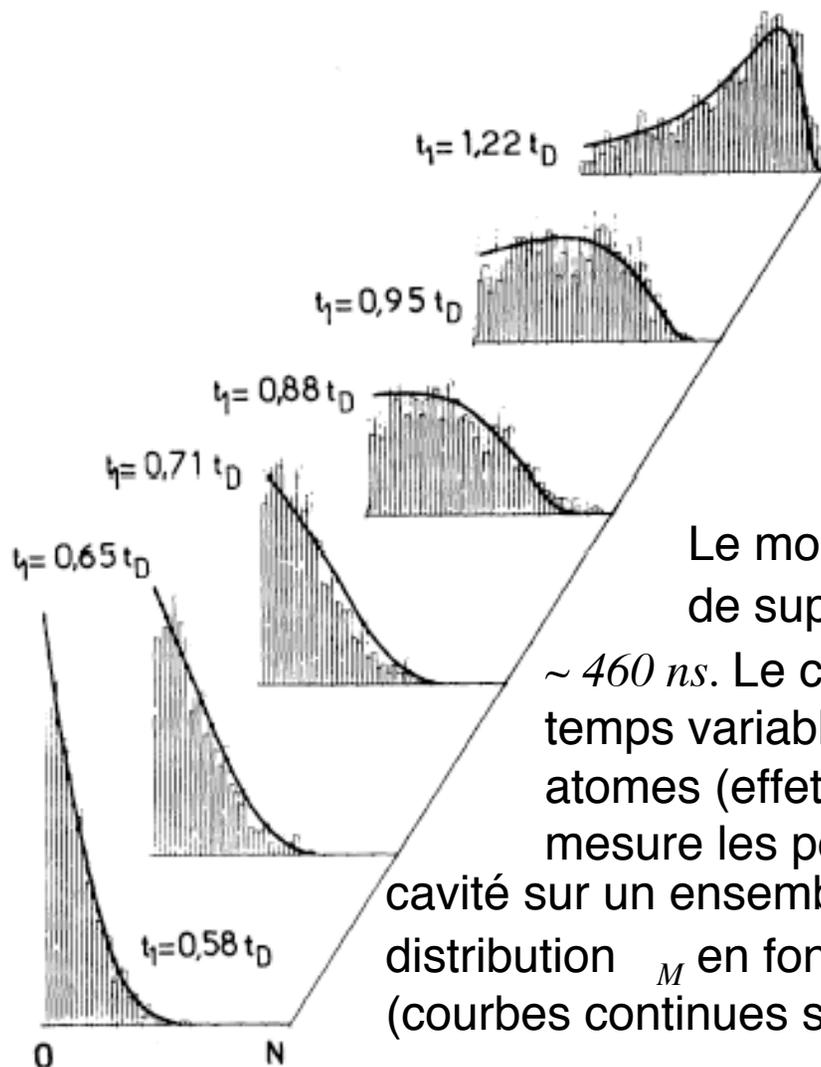
Evolution de l'opérateur densité d'un ensemble d'atomes superradiant (théorie)



Pour obtenir l'opérateur densité du système, qui décrit *un ensemble statistique d'observations*, on peut soit résoudre l'équation de Lindblad, soit moyenner sur des trajectoires quantiques (Méthode de Monte Carlo). La figure donne à différents instants (courbes *a* à *e*) la population P_M des niveaux $|J, M\rangle$. La distribution, piquée au voisinage de $M=J$ aux temps courts, s'étale très vite, manifestant ainsi l'existence de grandes fluctuations entre les différentes trajectoires quantiques. Au milieu du processus (courbe *c*), après un temps de l'ordre de $\text{Log}N / N_{at}^C$, la distribution recouvre tout l'intervalle de $M=J$ à $M=-J$. Puis elle se concentre autour des valeurs de M voisines de $-J$ (fin de l'émission). Le comportement est très différent de la décroissance exponentielle d'un seul atome.

Observation de la superradiance d'un ensemble d'atomes dans une cavité

(J-M Raimond, P.Goy, M.Gross, C.Fabre et S.Haroche, *Phys.Rev.Lett.* 49, 1924 (1982))



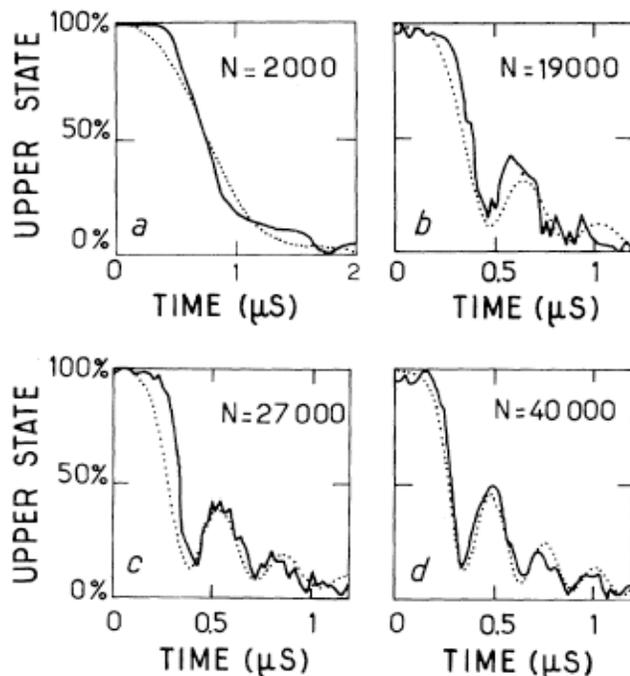
Ensemble de $N=3200$ atomes de Sodium préparés dans l'état de Rydberg $29S$, émettant dans une cavité résonnante accordée sur la transition $29S-28P$ à $\nu = 162$ GHz. Le taux d'émission spontanée dans l'espace libre sur cette transition est $\Gamma_0 = 43 s^{-1}$. Le facteur de Purcell est $\mathcal{F} = \Gamma_c / \Gamma_0 \sim 70$. Le champ thermique à $T=300K$ correspond à la présence initiale de $n_B = k_B T / h \nu \sim 38$ photons dans

Le mode. En présence de ces photons, le délai moyen de superradiance devient $t_D = [Log(N/(1+n_B))] / \Gamma_c \sim 460$ ns. Le couplage atome-cavité est interrompu après un temps variable par application d'un champ électrique aux atomes (effet Stark). Pour chaque temps d'interaction, on mesure les populations des états $29S$ et $28P$ à la sortie de la cavité sur un ensemble de 900 réalisations et on reconstruit la distribution M en fonction du temps. Noter l'accord avec la théorie (courbes continues sur la figure)

La limite du régime superradiant: condition de validité de l'équation pilote et régime non-Markovien

Pour que l'approximation Markovienne de temps de mémoire court de l'environnement soit valable, il faut que les photons s'échappent de la cavité plus vite qu'ils ne sont créés par le couplage cohérent des atomes avec le mode. On montre par des arguments analogues à ceux développés plus haut que le couplage effectif des N atomes avec le champ est multiplié par le facteur \sqrt{N} . On en déduit la condition de régime Markovien:

$$c = \frac{\gamma}{Q} > \sqrt{N} \quad (5 \quad 11)$$



qui remplace la relation $c > \sqrt{N}$ correspondant à un seul atome. Lorsque N ou Q augmentent, on atteint un régime où l'évolution change de nature, et n'est plus describable par une équation pilote. On observe alors des oscillations collectives amorties du système atome+cavité, avec échange périodique d'excitation à la fréquence \sqrt{N} . La figure représente pour différents N l'évolution au cours du temps de la fraction moyenne d'atomes excités (*Y.Kaluzny, P.Goy, M.Gross, JM. Raimond et S.Haroche, P.R.L. 51, 1175 (1983)*)

Références sur l'électrodynamique en cavité (atomes de Rydberg et cavités millimétriques)

La théorie des effets radiatifs discutés dans les 4 et 5 a été présentée dans deux séries de notes de cours des Houches:

- Serge Haroche, *Rydberg atoms and radiation in a resonant cavity*, Les Houches, Session XXXVIII «Tendances actuelles en Physique atomique», Grynberg et Stora, éditeurs, North Holland (1984).

Cette référence contient une analyse détaillée du régime surcritique de l'électrodynamique en cavité et de la superradiance en cavité.

- Serge Haroche, *Cavity Quantum Electrodynamics*, Les Houches, Session LIII, «Système fondamentaux en optique quantique», J-M.Raimond, J.Dalibard, J-M.Raimond et J.Zinn Justin éditeurs, North Holland (1992).

Cette référence contient une analyse des deux régimes de l'électrodynamique en cavité. Elle commence par une approche classique du problème, avant de présenter la théorie entièrement quantique.

Pour une description de développements expérimentaux plus récents, voir:

- J-M. Raimond, M.Brune et S.Haroche, *Reviews of Modern Physics*, 73, 565 (2001).