Superpositions mésoscopiques d'états

Systèmes ouverts et décohérence en optique et informatique quantiques

L'enseignement de cette année (2003-2004) fait partie d'une série de cours consacrée à l'information quantique au sens large.

Nous avons introduit dans le premier cours (2001-2002) le concept fondamental d'intrication et décrit comment il pouvait être utilisé pour la communication et le calcul quantiques. La manipulation et la mesure de superpositions d'états dans des systèmes formés d'un grand nombre de particules (superpositions mésoscopiques) joue un rôle essentiel dans cette physique. La décohérence, qui tend à détruire ces superpositions, a été analysée de façon qualitative.

Le second cours (2002-2003) a décrit de façon plus spécifique comment des superpositions mésoscopiques pouvaient être préparées et étudiées en optique quantique et en optique atomique (électrodynamique quantique en cavité et physique des condensats BEC).

Cours de cette année

Les systèmes de l' information quantique sont ouverts, en interaction avec un environnement qui joue un rôle essentiel dans leur manipulation et leur mesure. Cette ouverture vers l'extérieur est générale en physique quantique. Tous les systèmes physiques, à l'exception peut-être de l'Univers dans son ensemble, sont ouverts et on ne les considère comme isolés que dans le cadre d' approximations plus ou moins réalistes.La description des systèmes ouverts se fait à l'aide du formalisme de l'opérateur densité, qui remplace celui des vecteurs d'états (ou fonctions d'onde) de la mécanique quantique élémentaire.

Nous décrirons ce formalisme en analysant les propriétés de l'opérateur densité d'un système ouvert, établies à partir d'hypothèses générales. Nous en déduirons des propriétés universelles des transformations de l'opérateur densité du système. Nous pourrons ainsi analyser aussi bien le comportement d'un ensemble statistique de systèmes que celui d'un système ouvert unique. Nous décrirons différents types de mesures possibles (mesures projectives et généralisées) et différentes méthodes d'observation continue d'un système quantique unique. Certains des résultats obtenus seront des rappels, mais le point de vue choisi, celui de l'information quantique, sera sans doute original pour une grande partie de l'audience.Il nous donnera un éclairage nouveau de la décohérence des superpositions mésoscopiques et nous fournira des outils théoriques utiles à la suite de cette série de cours.

Systèmes ouverts en RMN et en optique quantique

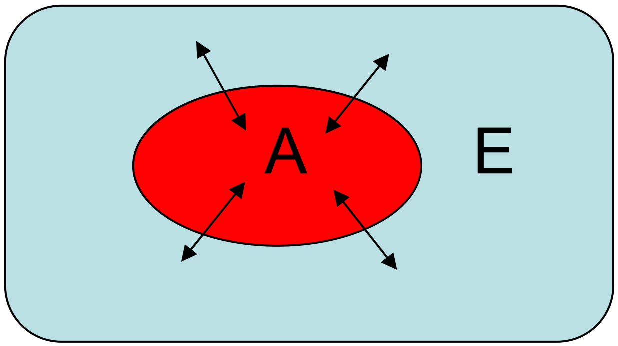
L'évolution des systèmes ouverts en physique quantique est en général décrite par la théorie de la relaxation, qui s'intéresse au couplage dissipatif d'un petit «système» avec un grand «réservoir» (appelé encore « environnement »).

La résonance magnétique nucléaire (RMN) est un des premiers domaines où la théorie de la relaxation a été développée (Bloembergen, Pound, Purcell et Bloch - 1950). Description d'un spin couplé à un réservoir par son opérateur densité. Evolution décrite par l'équation pilote (équation de Bloch de la RMN). Ce traitement a été généralisé à l'interaction des atomes avec des ondes optiques (pompage optique, physique des lasers, optique quantique), conduisant aux équations de Bloch optiques (années 1960-80).

L'équation pilote décrit une évolution irréversible du petit système. La rupture de la symétrie par renversement du temps est due aux grandes dimensions du réservoir dont les fluctuations oublient très vite les effets du couplage avec le petit système (approximation de mémoire courte ou de Markov - problème général de physique statistique). Exemple de l'évolution irréversible d'une superposition cohérente d'états de spin en RMN: le temps de relaxation T_2:

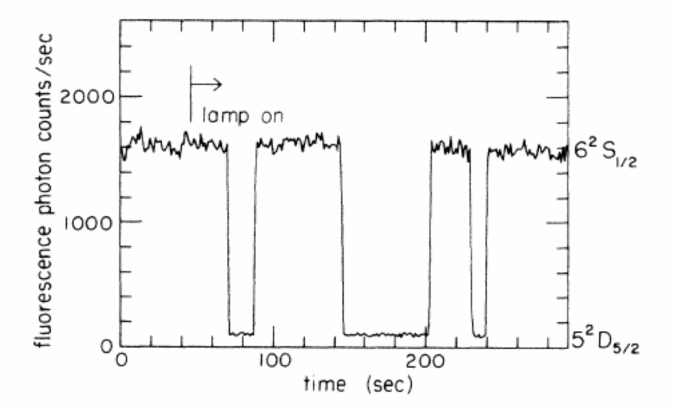
$$\frac{1}{2}\left(\left|\uparrow\right\rangle + \left|\downarrow\right\rangle\right)\left(\left\langle\uparrow\right| + \left\langle\downarrow\right|\right) \xrightarrow{t \gg T_2} \frac{1}{2}\left(\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\right) \quad (0-1)$$

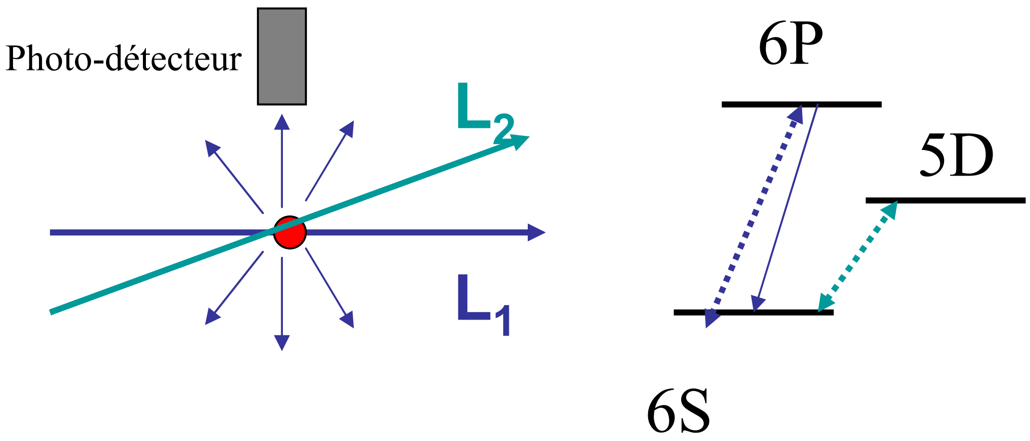
Exemples de systèmes ouverts en optique quantique



A (système étudié): atome, ion, champ dans une cavité….

E (environnement): champ de rayonnement (photons spontanés ou thermiques), atomes dans les parois de la cavité etc.…



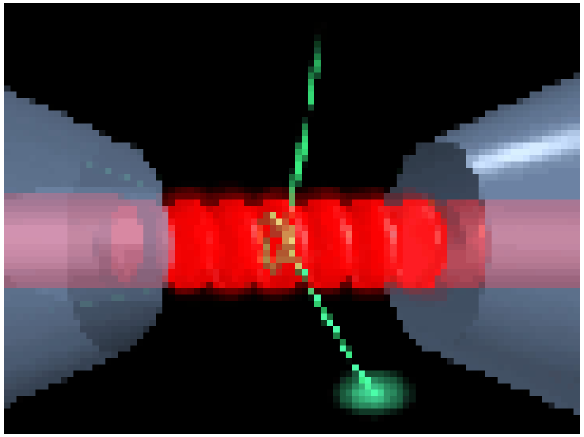


Ion de Baryum piégé couplé à deux champs lumineux et au vide de rayonnement: sauts quantiques

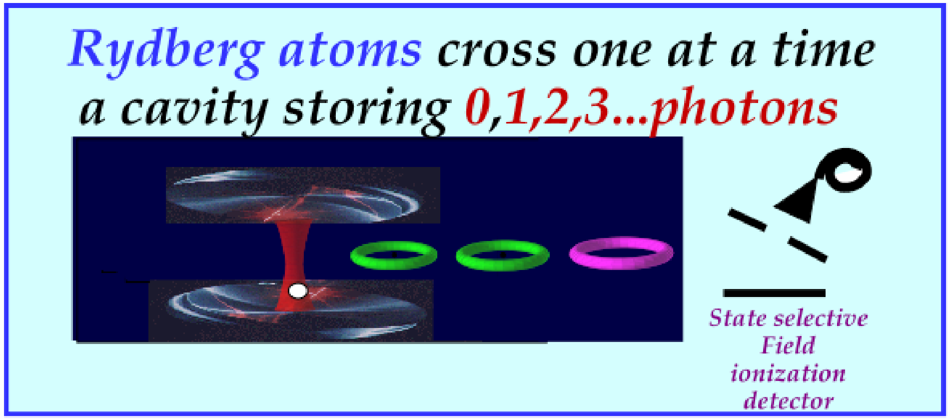
Autre exemple de système ouvert en optique quantique: l'électrodynamique en cavité (CQED)

A: « champ + atome » dans une cavité

E: rayonnement extérieur à la cavité (couplage par transmission des miroirs et par émission spontanée de l'atome)



CQED optique



CQED micro-onde

L'objet quantique étudié est ici composite (atome + champ dans un mode): sauts quantiques de l'atome ou du champ, intrication, information quantique

Système unique ou ensemble statistique?

L'opérateur densité décrit des propriétés statistiques (prévisions probabilistes sur un ensemble de mesures réalisées sur des systèmes identiques). Cette description est adaptée à l'étude de systèmes constitués d'un grand nombre de particules indépendantes (spins en RMN, atomes ou molécules dans un gaz en optique quantique). L'opérateur densité permet alors d'accéder directement à des moyennes d'ensemble sur toutes les particules du système.

Les deux exemples de système ouvert des pages précédentes sont de nature différente. Ce sont des systèmes uniques (un seul ion, un seul mode quantique dans une cavité). Pour de tels systèmes, étudiés expérimentalement depuis quelques années, l'opérateur densité ne permet que de prévoir des moyennes obtenues en re-préparant le système et en recommençant un grand nombre de fois la même mesure.Ceci ne correspond pas à certaines expériences réelles sur ces systèmes qui sont des mesures continues faites sur une seule réalisation. Quelle description pour ces expériences?   Comment relier la description d'une évolution unique aux propriétés de l'opérateur densité du système?

Les chats de Schrödinger comme systèmes ouverts: décohérence des superpositions mésoscopiques

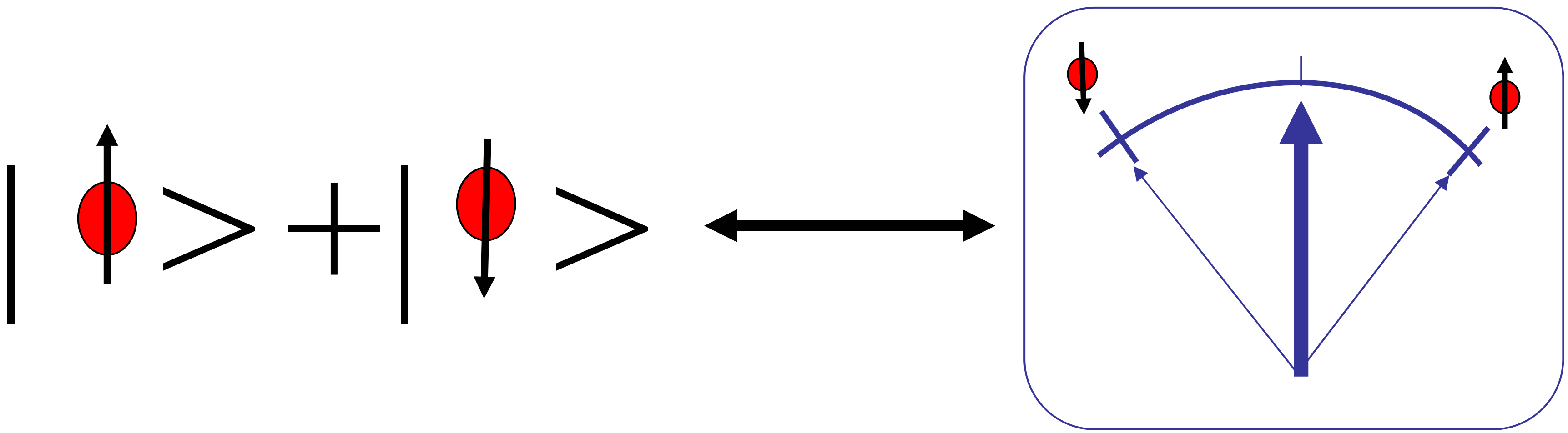
Les superpositions mésoscopiques d'états (chats de Schrödinger) sont des systèmes ouverts particuliers impliquant un grand nombre de particules. Le réservoir auquel elles sont couplées porte en général le nom d'environnement et la relaxation s'appelle dans ce cas décohérence.

L'évolution irréversible du système est décrite par une transformation analogue à (0-1):

$$\frac{1}{2}\left(\left|\Psi_{vivant}\right\rangle+\left|\Psi_{mort}\right\rangle\right)\left(\left\langle\Psi_{vivant}\right|+\left\langle\Psi_{mort}\right|\right)\xrightarrow{t>>T_D}\frac{1}{2}\left(\left|\Psi_{vivant}\right\rangle\left\langle\Psi_{vivant}\right|+\left|\Psi_{mort}\right\rangle\left\langle\Psi_{mort}\right|\right) \quad (0-2)$$

Le temps de décohérence T_D décroit très vite avec la taille de la superposition (séparation de ses composantes). Lien entre décohérence, intrication du système avec son environnement et fuite d'information. Analyse (qualitative) dans les cours des années précédentes.

La mesure en physique quantique:micro- système couplé à un appareil de détection classique (« mètre »)



$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A\right)\otimes|\Uparrow\rangle_M \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(|\uparrow\rangle_A \otimes|\Rightarrow\rangle_M + |\downarrow\rangle_A \otimes|\Leftarrow\rangle_M\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle_{A\;A}\langle\uparrow|\right)\otimes\left(|\Rightarrow\rangle_{M\;M}\langle\Rightarrow|\right)+\frac{1}{2}\left(|\downarrow\rangle_{A\;A}\langle\downarrow|\right)\otimes\left(|\Leftarrow\rangle_{M\;M}\langle\Leftarrow|\right) \quad (0-3)$$

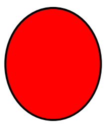
Le mètre est un système macroscopique couplé à un environnement: intrication système-mètre et décohérence rapide vers un mélange.

Les systèmes de l' information quantique sont ouverts pour des raisons fondamentales….

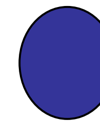
Alice

Partage de qubits intriqués:
chaque partenaire possède un
système ouvert

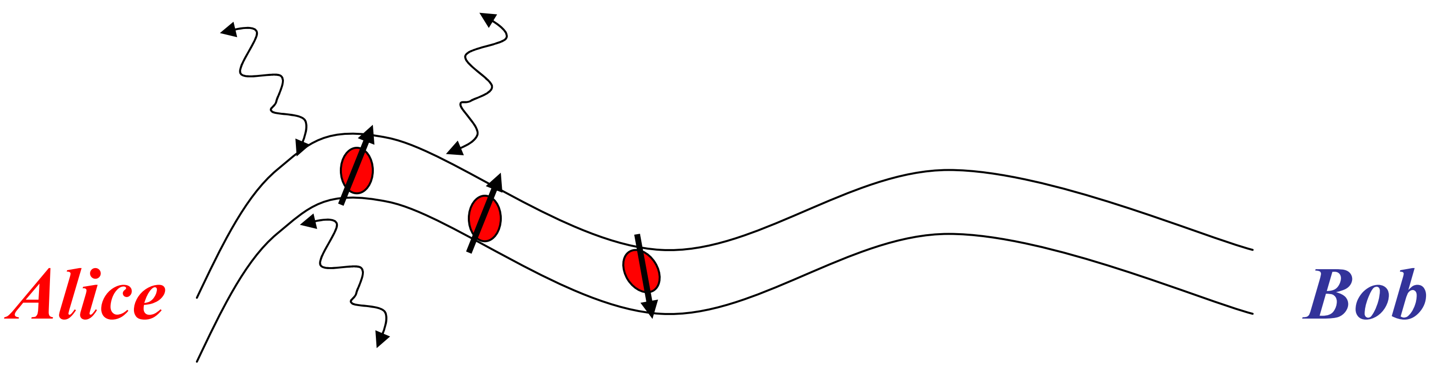
Bob



$$|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle$$



….ou pratiques:



La communication de qubits est perturbée par le couplage de la ligne avec l'environnement (dépolarisation, pertes, espionnage..): les particules transportées sont un système ouvert. Et même si les pertes sont négligeables, il faut coupler le système à un appareil de mesure, donc l'ouvrir sur l'extérieur…

Deux approches pour traiter les systèmes ouverts

Point de vue habituel des physiciens (physique statistique, optique quantique): décrire l'environnement par un modèle (ensemble d'atomes à deux niveaux ou d'oscillateurs) et le couplage du système à cet environnement par un hamiltonien spécifique à chaque situation. Décrire l'évolution globale unitaire de l'ensemble isolé « système + environnement» et obtenir l'évolution du système seul (équations de Bloch) en effectuant finalement la trace sur les variables de l'environnement.

Point de vue des théoriciens de l'information quantique (adopté ici) : partant des contraintes physiques très générales que doit satisfaire l'opérateur densité d'un système ouvert (de dimension finie), nous montrerons que toute transformation de cet opérateur densité peut se mettre sous une forme universelle, ne dépendant que d'un nombre fini d'opérateurs générateurs de la transformation agissant sur ce système. Ces opérateurs sont associés à la description des sauts quantiques du système.

Ces deux approches sont complémentaires. La seconde permet de mettre sous une forme élégante et facile à interpréter les équations de Bloch données par la première. Elle permet aussi de prévoir facilement la forme des équations d'évolution, même si le calcul explicite des opérateurs générateurs demande en toute rigueur la première approche.

Apports de la théorie des transformations quantiques

Le point de vue des transformations quantiques de l'opérateur densité développé dans les cours de cette année va nous permettre (entre autres):

- d'introduire le concept de mesure généralisée comme l'effet sur un système ouvert d'une mesure standard effectuée dans un espace des états étendu à un environnement plus vaste.
- de décrire l' évolution irréversible de l'opérateur densité d'un système ouvert comme résultant d'un processus de mesure généralisée correspondant à une fuite d'information non lue sur le système dans un environnement.
- de comprendre une expérience sur une réalisation unique d'un système ouvert comme une mesure généralisée continue de ce système.
- de décrire les états stables vis à vis de la décohérence (« pointer states ») comme les états propres des opérateurs (généralement non hermitiques) associés aux mesures généralisées responsable de l'évolution du système.
- de nous familiariser avec un formalisme utile pour l'étude de la manipulation et du contrôle de la décohérence (cours 2004-2005)

Plan du cours 2003-2004

1. Rappels sur l'opérateur densité et la mesure de von Neumann.
2. Rappels sur l'intrication de deux systèmes: états de Bell et décomposition de Schmidt.
3. Purifications d'un mélange statistique, complémentarité, gomme quantique
4. Mesures généralisées et POVM (« Positive Operator Valued Measure »)
5. Les super-opérateurs quantiques. Décomposition de Kraus.
6. Exemples de super-opérateurs: évolution générale d'un qubit.
7. L'équation pilote sous la forme de Lindblad. Les sauts quantiques.
8. Les trajectoires stochastiques (Méthode Monte Carlo).
9. Evolution d'états cohérents et d'états de Fock du rayonnement.
10. Etats stables vis à vis de la décohérence (« pointer states »).
11. Chats de Schrödinger du rayonnement et décohérence: points de vue complémentaires.
12. Conclusion et ouvertures sur le cours de l'année prochaine.

Quelques références générales

Quantum Computation and Quantum Information
M.A.Nielsen and I.L.Chuang, Cambridge University Press, 2000

Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory
D.Giulini, E.Joos, C.Kiefer, J.Kupsch, I-O.Stamatescu, H.D.Zeh, Springer, 1996

An open systems approach to quantum optics
H. Carmichael, Springer, 1993

Quantum theory: concepts and methods
A.Peres, Kluwer Academic Publishers, 1995

Decoherence, einselection and the quantum origins of the classical
W.H.Zurek, Reviews of Modern Physics, 75, 715 (2003)

Cours d'information quantique
J.Preskill, www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229

Cours du Collège de France, années 2001-2002 et 2002-2003
S.Haroche, www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/college/college.html

(Notes du cours à partir du jour de chaque leçon à la même adresse)

1.

Rappels sur l'opérateur densité et la mesure de von Neumann.

L'opérateur densité ρ comme description d'un ensemble statistique de systèmes, ou d'un seul système ouvert. Ambiguïté et caractère multiforme de l'opérateur densité

Forme standard de ρ pour un système à 2 états (qubit). Vecteur et sphère de Bloch.

Retour sur la théorie de la mesure. Mesure répétée. Mesures non lues.

Evolution unitaire (système isolé) et non unitaire (système ouvert) de l'opérateur densité.

Première définition de ρ: description d'un ensemble statistique de systèmes

Etat d'un système défini par les probabilités de préparation p_i dans des états purs (normés, mais non nécessairement orthogonaux) $|\varphi_i\rangle$:

$$\rho = \sum_i p_i \left|\varphi_i\right\rangle\left\langle\varphi_i\right| \quad (1-1) \quad ; \quad p_i \geq 0 \, ; \quad \sum_i p_i = 1 \quad (1-2)$$

ρ est hermitique, donc diagonalisable dans une base orthonormée:

$$\rho = \sum_j \lambda_j \left|u_j\right\rangle\left\langle u_j\right| ; \left\langle u_i \middle| u_j\right\rangle = \delta_{ij} \quad (1-3)$$

$$\lambda_j \geq 0 \, ; \quad \sum_j \lambda_j = 1 \quad (1-4)$$

ρ est positif (non-négatif), de trace unité (somme des probabilités égale à 1):

$$\left\langle\psi\middle|\rho\middle|\psi\right\rangle \geq 0 \quad (\forall\left|\psi\right\rangle) \, ; \quad Tr\rho = 1 \quad (1-5)$$

La trace de son carré est ≤ 1, l'égalité signifiant que l'état est un cas pur:

$$Tr(\rho^2) \leq 1 \quad ; Tr(\rho^2) = 1 \Leftrightarrow un\ seul\ \lambda_j \neq 0 \Leftrightarrow \rho = \left|u_j\right\rangle\left\langle u_j\right| \equiv cas\ pur \quad (1-6)$$

Opérateur densité d'un qubit: vecteur et sphère de Bloch

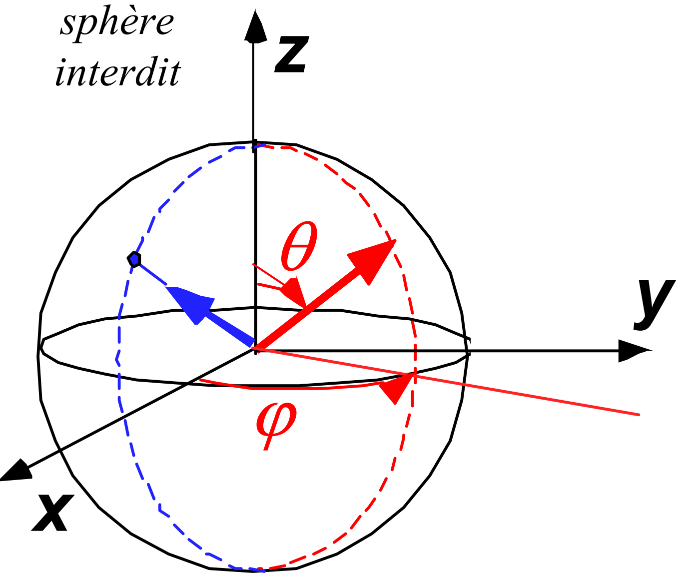
Matrices de Pauli $$\sigma_x = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

$$Tr(\vec{\sigma}) = 0 \quad (1-8)$$

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I; \quad XY = iZ; YZ = iX; ZX = iY \quad (1-9)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{n}.\vec{\sigma}\right) \quad \left(\left|\vec{n}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \rho \; positif\right) \quad (1-10)$$

Extérieur de la sphère interdit



$$\left|\vec{n}\right| = 1 \Leftrightarrow Tr(\rho^2) = 1 \Leftrightarrow cas \; pur \quad (1-11)$$

*Extrémité du vecteur **sur** la sphère, correspond à un cas pur («spin» orienté dans la direction d 'angles polaires θ,φ)*

$$|0\rangle_{\vec{n}} = |0\rangle_{\theta,\varphi} = \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2}|0\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}|1\rangle_z \quad (1-12)$$

Etats orthogonaux: vecteurs de Bloch opposés

$$\left|\vec{n}\right| < 1 \Leftrightarrow Tr(\rho^2) < 1 \Leftrightarrow m\acute{e}lange \; statistique \quad (1-13)$$

*Extrémité du vecteur **dans** la sphère, correspond à un mélange*

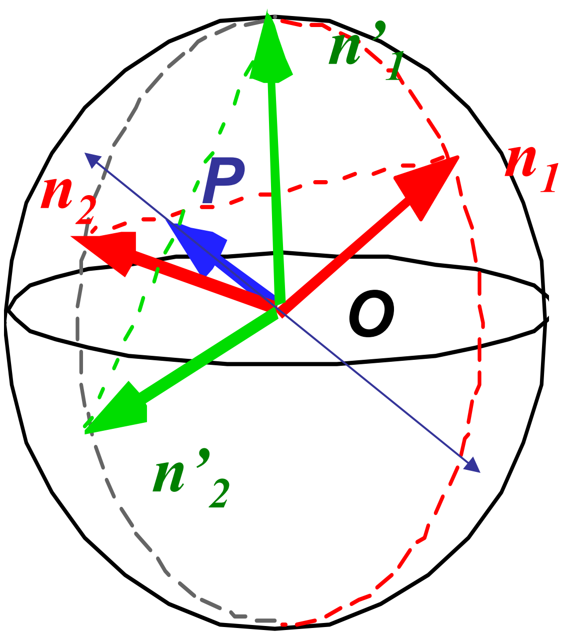
Ambiguïté de l 'écriture de l 'opérateur densité

Un vecteur ***n*** d'extrémité ***P*** ***<u>dans</u>*** la sphère de Bloch peut s'écrire d'une infinité de façons comme somme de 2 vecteurs $\boldsymbol{n_1}$ et $\boldsymbol{n_2}$ d' extrémités ***<u>sur</u>*** la sphère:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 + \lambda\left(\vec{n}_2 - \vec{n}_1\right) = (1-\lambda)\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2; \quad (0 < \lambda < 1) \quad (1-14)$$

Les extrémités de $\boldsymbol{n_1}$ et $\boldsymbol{n_2}$ définissent une corde quelconque passant par ***P***. On en déduit que ρ peut être décrit comme un mélange statistique des cas purs associés aux vecteurs de Bloch $\boldsymbol{n_1}$ et $\boldsymbol{n_2}$ *(« convexité » de l 'opérateur densité)*:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{n}.\vec{\sigma}\right) = (1-\lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2 \quad avec \quad \rho_i = \frac{1}{2}(1 + \vec{n}_i.\vec{\sigma}) = |0\rangle_{\vec{n}_i\,\vec{n}_i}\langle 0| \;\; (i = 1,2) \quad (1-15)$$



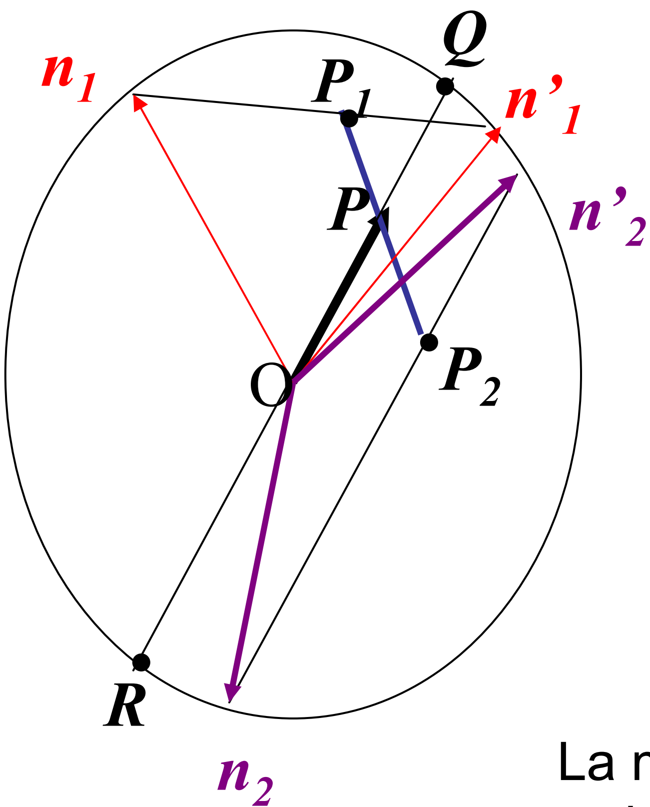
Préparation avec probabilité λ de l 'état $/0>_{n_2}$ et $1\text{-}\lambda$ de l 'état $/0>_{n_1}$

En changeant de corde, on décrit le même mélange comme préparation avec probabilités λ ' et $1-\lambda$ ' des états $/0>_{n'_2}$ et $/0>_{n'_1}$

La corde OP passant par O définit la représentation diagonale dans une base orthonormée

Impossibilité de déterminer la préparation

Généralisation: décomposition d'un opérateur densité en un nombre arbitraire de termes



Décomposition d'un opérateur densité sur 4 projecteurs dans des cas purs: une préparation possible de l'état mélange

$$\rho = \frac{1}{2}\left(1 + \overrightarrow{OP}.\vec{\sigma}\right) = \lambda|0\rangle_{\overrightarrow{OQ}\,\overrightarrow{OQ}}\langle 0| + (1-\lambda)|1\rangle_{\overrightarrow{OQ}\,\overrightarrow{OQ}}\langle 1|$$

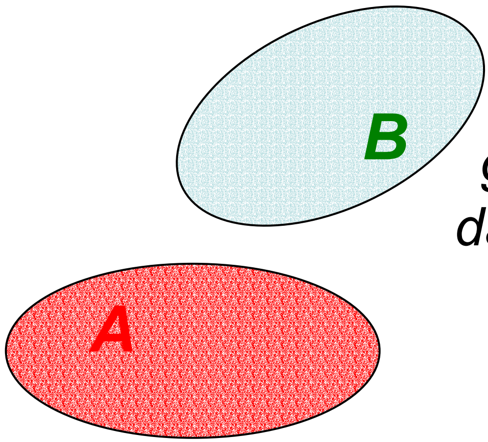
$$= \frac{\mu}{2}\left(1 + \overrightarrow{OP_1}.\vec{\sigma}\right) + \frac{1-\mu}{2}\left(1 + \overrightarrow{OP_2}.\vec{\sigma}\right)$$

$$= p_1|0\rangle_{\vec{n}_1\,\vec{n}_1}\langle 0| + p_1'|0\rangle_{\vec{n}_1'\,\vec{n}_1'}\langle 0| + p_2|0\rangle_{\vec{n}_2\,\vec{n}_2}\langle 0| + p_2'|0\rangle_{\vec{n}_2'\,\vec{n}_2'}\langle 0|$$

$$(p_1, p_1', p_2, p_2' \geq 0\,;\, p_1 + p_1' + p_2 + p_2' = 1) \qquad (1-16)$$

La méthode se généralise à un nombre arbitraire de vecteurs de Bloch: il existe une infinité de préparations possibles équivalentes d'un mélange

Deuxième définition de ρ: description d'un système ouvert



Décrire un système A, partie d 'un système A+B : en général les systèmes sont intriqués et, même si A+B est dans un cas pur, il n 'y a pas d 'état pur décrivant A seul. Il faut introduire un opérateur densité pour A. Si A+B est dans un état pur $|\Psi\rangle_{AB}$ on a:

$$\rho_A = Tr_B \left\{ \left|\Psi\right\rangle_{AB} \;{}_{AB}\!\left\langle \Psi \right| \right\} \quad (1-17)$$

et dans le cas général où A+B est un mélange décrit par l 'opérateur ρ_{AB}:

$$\rho_A = Tr_B \left\{ \rho_{AB} \right\} \quad (1-18)$$

Cette 2ème définition ne fait plus explicitement référence à un ensemble statistique de systèmes identiques. Elle est *a priori* nécessaire pour décrire la physique d 'un système ouvert, même unique. Nous verrons plus loin qu 'il y a cependant un lien étroit entre les deux définitions de ρ. Un expérimentateur (Alice) recevant le système A décrit par ρ_A et n'ayant pas accès à B (aux mains de Bob) n'a aucun moyen de savoir si A est partie de A+B ou si c'est un système isolé préparé comme un mélange statistique.

Rappel sur la théorie de la mesure (von Neumann)

Soit une observable (hermitique) O_A de A, sa base propre $\{ | u_i^\alpha >_A \}$ *(i distinguant les valeurs propres différentes et α les nombres quantiques complétant la définition des états) et P_i le projecteur sur l 'espace propre i:*

$$P_i = \sum_\alpha \left| u_i^\alpha \right\rangle_{A\,A} \left\langle u_i^\alpha \right| \qquad (1-19)$$

Les P_i satisfont les relations de normalisation, d 'orthogonalité et de fermeture:

$$P_i^2 = P_i \ ; \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad ; \quad \sum_i P_i = 1 \quad (1-20)$$

Postulat de la mesure (von Neumann): La probabilité π_i de trouver le résultat i après une mesure du système initialement dans l 'état décrit par ρ_A est:

$$\pi_i = Tr\left(\rho_A P_i\right) \quad (1-21)$$

Après qu 'on ait lu la mesure, le système est projeté dans l' état décrit par l 'opérateur densité conditionné au résultat obtenu:

$$\rho_A \xrightarrow{si\ i} \quad \rho_{A/i} = \frac{P_i \rho_A P_i}{Tr(\rho_A P_i)} = \frac{P_i \rho_A P_i}{\pi_i} \quad (1-22)$$

Une mesure immédiatement répétée donne ensuite le même résultat, avec probabilité 1.

Mesure projective non lue

Si la mesure est « non lue », ou si son résultat n'est pas communiqué à l 'observateur qui dispose du système A (Alice), la description qu'elle en a est donnée par la somme des $\rho_{A/i}$ pondérés par leur probabilité d 'occurrence:

$$\rho_A \xrightarrow{mesure \quad non \quad lue} \rho_{A/?} = \sum_i \pi_i \rho_{A/i} = \sum_i P_i \rho_A P_i \qquad (1-23)$$

Le couplage à l'appareil de mesure détruit les corrélations entre états de valeurs propres différentes:

$$P_i \rho_{A/?} P_j = \delta_{ij} P_i \rho_A P_i \qquad (1-24)$$

La disparition des cohérences $i \neq j$ correspond à **la décohérence**. Elle est contenue dans le postulat de la mesure. Il nous reste à comprendre comment l'appareil de mesure « décide » de la base dans laquelle cette décohérence se produit. Nous revenons plus loin sur cette question.

Notons que ces postulats de la mesure projective s'appliquent à n'importe quel opérateur densité, qu'il s'agisse d'un mélange statistique (première définition) ou d'une trace partielle (deuxième définition).Ils s'appliquent également au cas particulier des cas purs.

Évolution unitaire d'un système isolé (hors mesure)

Si le système A est isolé, son évolution temporelle est décrite par un Hamiltonien H_A (opérateur hermitique) et par un opérateur d'évolution unitaire:

$$U_A(t,0) = \exp\left(-iH_A t / \hbar\right) \quad ; \quad U_A^+ U_A = 1_A \qquad (1-25)$$

L'équation différentielle décrivant l'évolution du système est l'équation de Schrödinger habituelle, qui s'écrit pour l'opérateur densité:

$$\frac{d\rho_A(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[H_A, \rho_A\right] \qquad (1-26)$$

Et la solution explicite de cette équation à l'instant t, connaissant l'état initial de A à t=0 s'écrit simplement, en fonction de l'opérateur d'évolution unitaire U_A:

$$\rho_A(t) = U_A(t,0)\rho_A(0)U_A^+(t,0) \qquad (1-27)$$

Evolution d'un système ouvert

L'évolution d'un système ouvert n'est en général ni unitaire, ni réversible. Supposons qu'à $t=0$, A est décrit par l'opérateur densité $\rho_A(0)$ et qu'il est mis en contact avec « le reste de l'univers » E, sans lui être initialement corrélé. Appelons $|0>_E$ l'état du reste de l'univers à cet instant, que nous pouvons toujours considérer comme un cas pur (nous revenons sur ce point plus loin).Le système isolé A+E possède un hamiltonien et un opérateur d'évolution unitaire $U_{AE}(t,0)$. L'opérateur densité de A obéit à l'équations:

$$\rho_A(t) = Tr_E\left\{U_{AE}(t,0)|0\rangle_E\,\rho_A(0)\,{}_E\langle 0|U_{AE}^+(t,0)\right\} = \sum_k {}_E\langle k|U_{AE}(t,0)|0\rangle_E\,\rho_A(0)\,{}_E\langle 0|U_{AE}^+(t,0)|k\rangle_E$$

$$= \sum_k M_{A,k}(t)\rho_A(0)M_{A,k}^+(t) \qquad (1-28)$$

où les $|k>_E$ forment une base (en général de dimension infinie) de E que l'on peut discrétiser (quantification dans une boîte). Les $M_{A,k}$ sont des opérateurs de A définis comme des éléments de matrice dans E d'opérateurs de A +E:

$$M_{A,k}(t) = {}_E\langle k|U_{AE}(t,0)|0\rangle_E \qquad (1-29)$$

L'unitarité de U_{AE} entraîne la relation de fermeture des M_{Ak} :

$$\sum_k M_{A,k}^+(t)M_{A,k}(t) = 1_A \qquad (1-30)$$

Différentes transformations de l'opérateur densité

Récapitulons différents modes d'évolution de l'opérateur densité qui s'écrivent formellement de façon très similaire (ρ_A«en sandwich» entre opérateurs):

Evolution unitaire (système isolé):

$$\rho_A \longrightarrow U_A(t,0)\,\rho_A\,U_A^+(t,0) \quad ; \quad U_A^+(t,0)U_A(t,0) = 1_A$$

(un opérateur générateur de la transformation: U_A)

Mesure non lue:

$$\rho_A \longrightarrow \sum_i P_i \rho_A P_i \quad ; \quad \sum_i P_i = \sum_i P_i^+ P_i = 1_A$$

(au plus N opérateurs générateurs de la transformation: les P_i)

Evolution non unitaire (système ouvert):

$$\rho_A(t) \longrightarrow \sum_k M_{A,k}(t)\rho_A(0)M_{A,k}^+(t) \quad ; \quad \sum_k M_{A,k}^+(t)M_{A,k}(t) = 1_A$$

(Nombre de générateurs ?)

Dans les 3 cas, il s'agit de transformations linéaires conservant la trace de ρ_A (donc la probabilité). Cette conservation est assurée par les relations d'unitarité ou de fermeture des opérateurs générateurs. Nous montrons dans la suite que ce type de relation est tout à fait général et qu'on peut toujours décrire l'évolution d'un système ouvert avec un nombre d'opérateurs M au plus égal à N^2 où N est la dimension de A, et cela indépendamment de la dimension de E.

2.

Rappels sur l'intrication de deux systèmes: états de Bell et décomposition de Schmidt.

Système intriqué de deux qubits. Etats de Bell et corrélations quantiques EPR. Décomposition de Schmidt et entropie d'intrication. Généralisation des états de Bell et de la situation EPR à des systèmes de dimension finie quelconque. Impossibilité de communication super-luminale.

Intrication bipartite: états de Bell de deux qubits

Etats de Bell: $$\left|\varphi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0,0\right\rangle \pm \left|1,1\right\rangle\right) \quad ; \quad \left|\psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0,1\right\rangle \pm \left|1,0\right\rangle\right) \qquad (2-1)$$

Dans ces états, il n'y a aucune information dans chacun des qubits:

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2-2)$$

Toute l'information est dans les corrélations entre les qubits: les états de Bell sont états propres de Z_A Z_B de valeur propre +1 ($|\varphi^{\pm}>$) et -1 ($|\psi^{\pm}>$) et états propres de X_A X_B de valeur propre +1 ($|\varphi^{+}>$, $|\psi^{+}>$) et -1 ($|\varphi^{-}>$, $|\psi^{-}>$).

Ainsi, si Alice et Bob ont chacun un des qubits, leurs mesures de Z ou de X donneront toujours soit le même résultat, soit des résultats opposés (corrélations instantanées et parfaites des mesures à une distance arbitraire). Ces corrélations sont fondamentalement « quantiques » et ne peuvent s'expliquer à l'aide de modèles de variables cachées (problème EPR). Utilisation de ces corrélations possible pour la cryptographie (cours 2001-2002)

Décomposition de Schmidt de l 'état d 'un système bipartite A+B dans un cas pur (cours 2001-2002).

Pour tout état pur $|\Psi>_{AB}$ du système, il existe deux ensembles d 'états orthonormés $\{|i>_A\}$ et $\{|i>_B\}$ des parties A et B respectivement tels que:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{\lambda_i}|i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \quad (2-3)$$

Les ensembles $\{|i>_{\mathrm{A}}\}$ et $\{|i>_{\mathrm{B}}\}$ sont états propres des opérateurs densités partiels des deux parties et les λ_i les valeurs propres non-nulles associées, identiques pour A et B.

Le nombre de termes non-nuls de la somme (2-3) est appelé nombre de Schmidt N_S de l 'état $|\Psi>_{AB}$. L 'état est intriqué ssi N_S >1(séparable ssi N_S = 1).

Une définition plus précise du degré d'intrication est donnée par l'entropie d'intrication S_{AB}, les parties étant intriquées ssi $S_{AB} > 0$:

$$S_{AB} = -\sum_i \lambda_i Log\lambda_i = -Tr\{\rho_A Log(\rho_A)\} = -Tr\{\rho_B Log(\rho_B)\} \quad (2-4)$$

Le nombre de Schmidt et l 'entropie d 'intrication sont invariants dans toute opération unitaire locale sur A ou B seuls.

Généralisation des états de Bell: Etat maximalement intriqué de deux systèmes de dimension N

A est un système dans un espace de dimension N, B un système dont la dimension est au moins égale à N. Un état pur de A+B d'intrication maximale s'écrit (généralisation des états de Bell):

$$\left|\Psi^m\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \left|i\right\rangle_A \otimes \left|i\right\rangle_B \qquad (2-5)$$

où les $|\, i >_A$ et $|\, i >_B$ sont des ensembles d'états orthonormés de A et de B. Cet état peut s'exprimer de façon équivalente en choisissant deux autres ensembles de vecteurs, reliés aux précédents par des transformations unitaires à coefficients complexe conjugués:

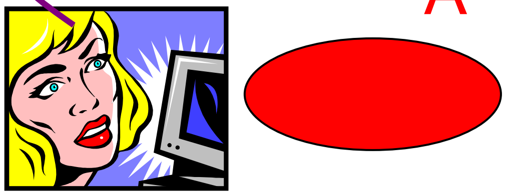
$$\left|i\right\rangle_A \to \left|j\right\rangle_A = \sum_i u_{ji} \left|i\right\rangle_A \quad ; \quad \left|i\right\rangle_B \to \left|j\right\rangle_B = \sum_i u^*_{ji} \left|i\right\rangle_B \qquad (2-6)$$

On vérifie alors sans peine les identités (unitarité du changement de base u):

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \left|j\right\rangle_A \otimes \left|j\right\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j,i,i'} u_{ji} u^*_{ji'} \left|i\right\rangle_A \otimes \left|i'\right\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j,i,i'} \underbrace{(u^+)_{i'j}\, u_{ji}}_{\delta_{i,i'}} \left|i\right\rangle_A \otimes \left|i'\right\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{I} \left|i\right\rangle_A \otimes \left|i\right\rangle_B = \left|\Psi^m\right\rangle_{AB}$$

$$(2-7)$$

Expérience EPR généralisée: préparation d'état par corrélation quantique

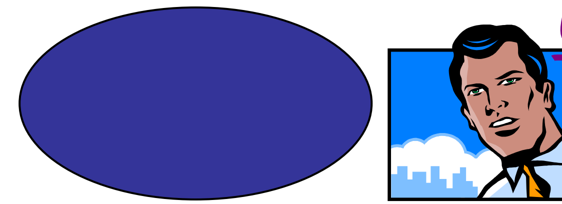


A

$$\left|\Psi^m\right\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \left|i\right\rangle_A \otimes \left|i\right\rangle_B$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \left|j\right\rangle_A \otimes \left|j\right\rangle_B$$

B



Alice et Bob partagent un système A+B préparé dans l'état $|\Psi^m>_{AB}$. Les deux parties sont physiquement séparées, Alice agissant localement sur A et Bob sur B seulement. Bob mesure une observable d'états propres $|\,i>_B$: s'il trouve i_1 (et communique ce résultat à Alice), celle-ci est sûre que sa partie A est préparée dans $|\,i_1>_A$. Si Bob décide plutôt de mesurer sur le même état une observable qui ne commute pas avec la précédente, d'états propres $|\,j>_B$ et qu'il trouve j_1 (communiqué à Alice), celle-ci saura que A est préparé dans l'état $|\,j_1>_A$. Ainsi, les corrélations EPR permettent à Bob de préparer instantanément à distance un état pur quelconque pour Alice (avec une probabilité a priori égale à $1/N$). Nous utiliserons ce type d'expérience de pensée pour obtenir des résultats très généraux sur les propriétés des transformations quantiques. Si Alice ne connaît pas le résultat de la mesure de Bob (mesure non lue) elle doit décrire A par l'opérateur $(1/N)\ 1_A$ (elle n'a alors aucune information).

Impossibilité de communication super-luminale par corrélations EPR

Nous allons montrer que si Bob manipule son système sans en communiquer le résultat à Alice, celle-ci ne peut s'en apercevoir. En d'autres termes, l'opérateur densité de A est indépendant de ce qui arrive localement à B, même si A et B sont intriqués. Supposons pour commencer que Bob effectue une transformation unitaire sur B définie par l'opérateur $U_B(t,0)$ agissant sur B seul. L'évolution correspondante d'un élément de matrice de ρ_A sera:

$$\left(\rho_A\right)_{\alpha,\alpha'}(t) = \sum_{\mu,\mu',\mu''} \langle\mu|U_B(t,0)|\mu'\rangle\langle\mu',\alpha|\rho_{AB}(0)|\mu'',\alpha'\rangle\langle\mu''|U_B^+(t,0)|\mu\rangle \quad (2-8)$$

où les états $|\mu>$ définissent une base de B.L'unitarité de U_B entraîne:

$$\sum_{\mu}\langle\mu''|U_B^+(t,0)|\mu\rangle\langle\mu|U_B(t,0)|\mu'\rangle = \delta_{\mu',\mu''} \quad (2-9)$$

et cette identité, combinée à (2-8) conduit à:

$$\left(\rho_A\right)_{\alpha,\alpha'}(t) = \sum_{\mu'}\langle\mu',\alpha|\rho_{AB}(0)|\mu',\alpha'\rangle = \left(\rho_A\right)_{\alpha,\alpha'}(0) \quad (2-10)$$

qui montre que l'opérateur densité de A n'est pas affecté par la transformation unitaire de B.

Non-communication super-luminale de type EPR (suite)

Supposons maintenant que Bob effectue une mesure d'une observable O_B de B (définie par les projecteurs P_i sur les sous espaces propres). La transformation subie par un élément de matrice de l'opérateur densité de A sera:

$$(\rho_A)_{\alpha,\alpha'}(après) = \sum_i \sum_{\mu,\mu',\mu''} \langle\mu|P_i|\mu'\rangle\langle\mu',\alpha|\rho_{AB}(avant)|\mu'',\alpha'\rangle\langle\mu''|P_i|\mu\rangle \quad (2-11)$$

La somme sur i et sur μ donne, compte tenu de la relation de fermeture (1-20) sur les P_i:

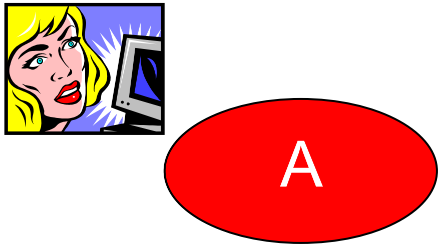
$$\sum_i \sum_\mu \langle\mu''|P_i|\mu\rangle\langle\mu|P_i|\mu'\rangle = \delta_{\mu',\mu''} \quad (2-12)$$

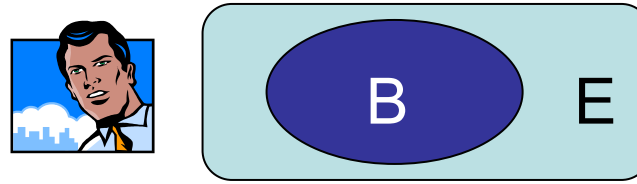
D'où, en combinant (2-11) et (2-12):

$$(\rho_A)_{\alpha,\alpha'}(après) = \sum_{\mu'} \langle\mu',\alpha|\rho_{AB}(avant)|\mu',\alpha'\rangle = (\rho_A)_{\alpha,\alpha'}(avant) \quad (2-13)$$

Ainsi, une opération de mesure projective effectuée par Bob n'a aucun effet sur l'état de A tel qu'il est décrit par Alice, tant que Bob ne communique pas à Alice le résultat de sa mesure.

Non-communication super-luminale de type EPR (fin)





Supposons enfin que B soit un système ouvert, couplé à un environnement E. L'évolution du système sous l'effet du couplage qui affecte B seul est décrit par:

$$\rho_{AB}(t) = \sum_k \left(M_{B,k}(t) \otimes 1_A\right) \rho_{AB}(0) \left(M^+_{B;k}(t) \otimes 1_A\right) \quad avec \quad \sum_k M^+_{B,k}(t) M_{B,k}(t) = 1_B \qquad (2-14)$$

soit:

$$\left(\rho_A\right)_{\alpha,\alpha'}(t) = \sum_{\mu,\mu',\mu'',k} \langle \mu | M_{B,k}(t) | \mu' \rangle \langle \mu', \alpha | \rho_{AB}(0) | \mu'', \alpha' \rangle \langle \mu'' | M^+_{B,k}(t) | \mu \rangle \qquad (2-15)$$

La somme sur k et μ donne immédiatement compte tenu de (2-14):

$$\sum_{k,\mu} \langle \mu'' | M^+_{B,k}(t) | \mu \rangle \langle \mu | M_{B,k}(t) | \mu' \rangle = \delta_{\mu',\mu''} \qquad (2-16)$$

et on retrouve au 2ème membre de (2-15) la trace donnant $\rho_A(0)$ soit:

$$\left(\rho_A\right)_{\alpha,\alpha'}(t) = \left(\rho_A\right)_{\alpha,\alpha'}(0) \qquad (2-17)$$

L'état de A est non affecté par l'évolution du système ouvert B. Ce résultat est d'ailleurs évident si l'on remarque que l'évolution de B+E est unitaire et on peut donc se ramener à la situation décrite deux pages plus haut (equs.2-9 et 2-10).

Conclusion de la première leçon

Caractère ambigu de l'opérateur densité d'un système. Existence d'une infinité de formes équivalentes décrivant des préparations possibles d'un mélange statistique. Forme générale des transformations linéaires de l'opérateur densité d'un système isolé ou ouvert, soumis à une évolution physique ou à un processus de mesure non lue. A chacune de ces transformations est associée un ensemble d'opérateurs générateurs satisfaisant une relation de fermeture qui assure la conservation de la trace de l'opérateur densité, donc de la probabilité. Le problème du nombre d'opérateurs requis pour décrire l'évolution la plus générale de l'opérateur densité d'un système ouvert de dimension finie reste à résoudre (Leçon 3).Nous montrerons aussi qu'une infinité d'ensemble d'opérateurs générateurs différents décrivent la même transformation.

Existence de corrélations «instantanées» à distance dans des systèmes bi-partites intriqués. La révélation de ces corrélations nécessite une communication classique entre observateurs locaux des deux sous-systèmes.Le formalisme de la théorie quantique non relativiste (opération de trace partielle pour définir l'opérateur densité d'un sous-système, transformations avec des opérateurs générateurs satisfaisant les relations d'unitarité ou de fermeture) assure la causalité (impossibilité de communication super-luminale).

Séminaires de l'année 2003-2004

28 Avril: ***"Communications et cryptographie avec des variables quantiques continues".***
Philippe Grangier, *Institut d'Optique, Orsay*

5 Mai: ***"Traitement intégré des ondes de matière"***
Jacob Reichel, *Université de Munich, Allemagne*

12 Mai: ***"Le photon dans tous ses états: préparation et contrôle d'information quantique dans les états de la lumière"***
Aephraim Steinberg *Université de Toronto, Canada*

19 Mai: ***pas de séminaire***

26 Mai: ***"Exploring Quantum Matter in Artifical Crystals of Light"***
Immanuel Bloch, *Université de Mayence, Allemagne*

2 Juin: ***"Controlling individual atoms in a dipole trap: Towards quantum information processing with neutral atoms"***
Stefan Kuhr, *Université de Bonn, Allemagne et ENS, Paris*

9 Juin: ***"Gaz de Fermi ultra-froids: Condensat de molecules ou paires de Cooper ?"***
Christophe Salomon, *ENS, Paris*