3.

Purifications d'un mélange statistique, complémentarité, gomme quantique

Opérateur densité d'un système A vu comme trace partielle d'un état pur dans un espace étendu A+B.

Relation entre les différentes formes d'un même opérateur densité et des mesures fictives non lues dans l'environnement B de A. Théorème GHJW.

Application à la description de la matrice densité dépolarisée d'un qubit.

Rappels sur les notions de décohérence, de complémentarité et de gomme quantique.

Relation entre les deux définitions de ρ : purification d'un mélange statistique

Alice possède un système A décrit par un mélange statistique de N états $\rho_A = \Sigma_i\, p_i\,|\varphi_i>_{A\;A}<\varphi_i|$. On peut lui associer un système auxiliaire B (manipulé par Bob) de dimension égale ou supérieure à N. Alice et Bob choisissent un ensemble de N états orthogonaux $|\,\beta_i>_B$ de B et construisent (par des opérations non locales) l'état pur intriqué:

$$\left|\Psi\right\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}\left|\varphi_i\right\rangle_A \otimes \left|\beta_i\right\rangle_B \qquad (3-1)$$

ρ_A satisfait la 2ème définition de l'opérateur densité (A partie de A+B). En prenant la trace partielle sur B de $|\,\Psi>_{AB\;AB}<\Psi|$ on obtient ρ_A.

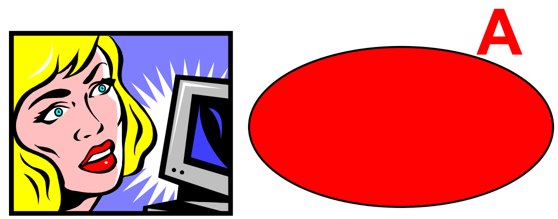
On dit que $|\,\Psi>_{AB}$ est une purification de ρ_A.

L 'ensemble $\{|\,\beta_i>_B\}$ constitue une base propre d 'une observable O_B de B (en complétant éventuellement le spectre de O_B par des valeurs propres nulles):

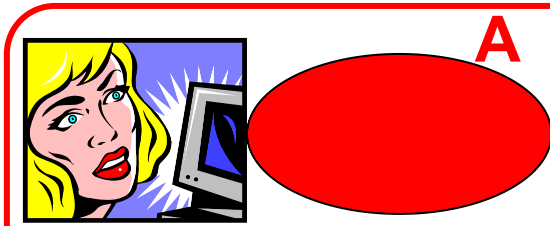
$$O_B = \sum_i \varepsilon_i \left|\beta_i\right\rangle_{B\;B}\left\langle\beta_i\right| \qquad (3-2)$$

Deux situations équivalentes pour Alice:

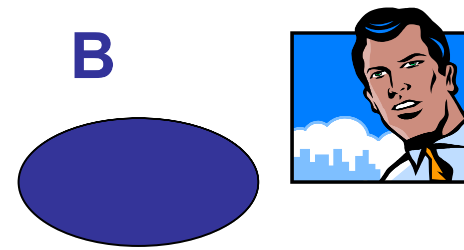
Elle possède seule un système A qu'elle a préparé avec les probabilités p_i dans les états $|\varphi_i>_A$ ou bien…



$$\rho_A = \sum_i p_i \left|\varphi_i\right\rangle_A {}_A\left\langle\varphi_i\right|$$



$$\left|\Psi\right\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}\left|\varphi_i\right\rangle_A \otimes \left|\beta_i\right\rangle_B$$



….elle partage avec B un système A+B intriqué dans un état pur $|\ \Psi>_{AB}$. En mesurant 0_B , Bob projette avec la probabilité p_i le système *A* sur l 'état $|\ \ \varphi_i>_A$. Si Bob ne fait rien ou effectue une opération quelconque sur B (dont il ne communique pas le résultat à Alice), toute l 'information qu 'Alice possède sur A est donnée par ρ_A .

Un mélange statistique de A peut être obtenu par prise de trace partielle sur un état pur dans un espace plus grand A+B. On peut considérer qu'une mesure (non lue) d 'observable de B a été effectuée. Parfois le système B a un sens physique réel. Parfois, c 'est un simple artifice de calcul utile.

Les expressions équivalentes de l 'opérateur densité peuvent être obtenues à partir d'une purification unique

Soient deux préparations du même opérateur densité ρ_A décrites par:

$$\rho_A = \sum_i p_i \left|\varphi_i\right\rangle_{A\,A}\left\langle\varphi_i\right| = \sum_j q_j \left|\chi_j\right\rangle_{A\,A}\left\langle\chi_j\right|; \quad \sum_i p_i = \sum_j q_j = 1 \quad (3-3)$$

qu 'on peut toujours considérer comme ayant le même nombre de termes (en complétant la somme la plus courte par des termes de probabilité nulle). On leur associe les deux purifications d'un système A+B:

$$\left|\Psi^1\right\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}\left|\varphi_i\right\rangle_A \otimes \left|\alpha_i\right\rangle_B \quad ; \quad \left|\Psi^2\right\rangle_{AB} = \sum_j \sqrt{q_j}\left|\chi_j\right\rangle_A \otimes \left|\beta_j\right\rangle_B \quad (3-4)$$

où les { | α_i >} et { | β_j >} sont deux ensembles orthonormés de vecteurs de B. Nous allons montrer que ces deux purifications sont reliées par une opération unitaire U_B^{12} agissant dans B seul:

$$\left|\Psi^1\right\rangle_{AB} = 1_A \otimes U_B^{12}\left|\Psi^2\right\rangle_{AB} \quad (3-5)$$

Purification unique pour toutes les formes de ρ_A (suite)

Cette propriété est évidente si on considère les décompositions de Schmidt:

$$\left|\Psi^1\right\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\left|i\right\rangle_A \otimes \left|i^1\right\rangle_B \;;\; \left|\Psi^2\right\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\left|i\right\rangle_A \otimes \left|i^2\right\rangle_B \qquad (3-6)$$

qui ont les mêmes λ_i et $\{ \mid i >_A \}$ déterminés par la forme diagonale unique de ρ_A et qui ne diffèrent que par les ensembles $\{ \mid i^1 >_B \}$ et $\{ \mid i^2 >_B \}$, reliés entre eux par une transformation unitaire dans B ($\mid i^1 >_B = U_B^{12} \mid i^2 >_B$).

On déduit alors immédiatement de (3-4) et (3-5):

$$\boxed{\begin{gathered}\left|\Psi^1\right\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}\left|\varphi_i\right\rangle_A \otimes \left|\alpha_i\right\rangle_B = \sum_j \sqrt{q_j}\left|\chi_j\right\rangle_A \otimes \left|\gamma_j\right\rangle_B \qquad (3-7) \\ avec \\ \left|\gamma_j\right\rangle_B = U_B^{12}\left|\beta_j\right\rangle_B \qquad (3-8)\end{gathered}}$$

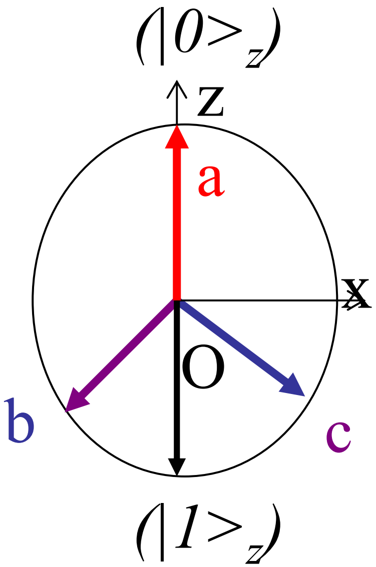
Purification unique pour les différentes formes de ρ_A: Théorème GHJW.

Ainsi **la même purification** $|\Psi^1>_{AB}$ décrit les deux formes de ρ_A . La première correspond à une mesure (non communiquée par Bob à Alice) sur $|\Psi^1>_{AB}$ de l 'observable admettant comme états propres les $|\alpha_i>_B$, la seconde à une mesure sur le même état de l 'observable admettant comme états propres les $|\gamma_j>_B$. Ce résultat constitue le théorème de Gisin, Hughston, Josza et Wootters (GHJW). Il ne supprime pas l 'ambiguïté pour Alice. Tous les choix de purification sont équivalents et elle n 'a aucun moyen de savoir quelle est l'observable que Bob « mesure ». Fondamentalement, l'information contenue dans ρ_A ne permet pas de remonter à une préparation unique pour le système A. Il est néanmoins intéressant de savoir que **toutes les préparations possibles de ρ_A peuvent être déduites d 'opérations de mesures virtuelles sur la partie B d 'un même état pur intriqué d 'un système A+B englobant le système étudié.**

Remarque importante: Nous comprenons maintenant que dans un problème de relaxation il est justifié de décrire l'état initial de l'environnement comme un cas pur (voir leçon 1). Dans le cas où c'est un mélange, on peut toujours étendre la définition à un environnement plus vaste et choisir une purification dans ce nouvel environnement.

Exemple de purification unique: qubit dépolarisé

Un qubit A complètement dépolarisé (vecteur de Bloch nul) est représenté par un opérateur densité proportionnel à la matrice unité 2 x 2 . Il peut se décomposer d'une infinité de manières. Choisissons deux préparations possibles, mélanges statistiques de 2 ou 3 états:



$$\rho_A = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_{A,z\,A,z}\langle 0| + |1\rangle_{A,z\,A,z}\langle 1|\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(|a\rangle_{A\,A}\langle a| + |b\rangle_{A\,A}\langle b| + |c\rangle_{A\,A}\langle c|\right) \quad (3-9)$$

$$|a\rangle_A = |0\rangle_A \quad ; \quad |b\rangle_A = -\frac{1}{2}|0\rangle_A + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_A \quad ; \quad |c\rangle_A = -\frac{1}{2}|0\rangle_A - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_A \quad (3-10)$$

Introduisons un environnement B dans lequel nous choisissons trois états orthonormés $|1>_B$, $|2>_B$, $|3>_B$ et définissons la purification:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|a\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |b\rangle_A \otimes |2\rangle_B + |c\rangle_A \otimes |3\rangle_B\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_{A,z} \otimes \left[\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{6}}|2\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{6}}|3\rangle_B\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_{A,z} \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle_B\right]$$

$$(3-11)$$

Purification unique d'un qubit dépolarisé (suite)

La purification unique $|\Psi\rangle_{AB}$ peut ainsi être développée soit sur les états $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ de A et l'ensemble orthonormé $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ de B, soit sur les deux états $|0\rangle_z$ et $|1\rangle_z$ de A associés à la base $\{|1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle\}$ de B qui se déduit de $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ par la transformation unitaire ci-dessous:

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|a\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |b\rangle_A \otimes |2\rangle_B + |c\rangle_A \otimes |3\rangle_B\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_{A,z} \otimes |1'\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_{A,z} \otimes |2'\rangle_B
\end{aligned}
\qquad (3-12)
$$

$$
\begin{pmatrix} |1'\rangle_B \\ |2'\rangle_B \\ |3'\rangle_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1\rangle_B \\ |2\rangle_B \\ |3\rangle_B \end{pmatrix} \qquad (3-13)
$$

Le même état $|\Psi\rangle_{AB}$ peut aussi se développer sur les états propres de X_A, $|0\rangle_{A,x}$ et $|1\rangle_{A,x}$ (combinaisons symétriques et antisymétriques de $|0\rangle_{A,z}$ *et* $|1\rangle_{A,z}$) en leur associant la base $\{|1''\rangle, |2''\rangle, |3''\rangle\}$ de B définie ci dessous:

$$
|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{A,x} \otimes |1''\rangle_B + |1\rangle_{A,x} \otimes |2''\rangle_B\right) \qquad (3-14)
$$

$$
|1''\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1'\rangle_B + |2'\rangle_B\right) \quad ; |2''\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1'\rangle_B - |2'\rangle_B\right); |3''\rangle_B = |3'\rangle_B \qquad (3-15)
$$

Purification unique d'un qubit dépolarisé (fin)

Nous voyons ainsi que les différentes préparations équivalentes du qubit dépolarisé A considérées plus haut peuvent être obtenues par des mesures non lues d'observables de B effectuées sur la purification unique $|\Psi\rangle_{AB}$. Les états propres de ces observables se déduisent les uns des autres par des transformations unitaires de l'espace de B.

La préparation mélangeant trois états correspond à trois résultats possibles de la mesure, de probabilités égales à 1/3. Les préparations à deux états correspondent à des observables pour lesquelles un des trois états propres a une probabilité nulle.

Nous nous sommes limités ici à décrire un état dépolarisé préparé comme un mélange de deux ou trois états. On pourrait le préparer aussi avec un nombre arbitraire N d'états mélangés. Il faudrait alors définir une purification à N composantes dans B. Les préparations à nombre d'états inférieur à N correspondraient à des mesures d'observables dont un certain nombre d'états propres auraient des probabilités nulles d'apparaître dans les mesures faites sur B.

Décohérence et complémentarité

Nous avons rappelé à la leçon 1 que la relaxation d'un spin A initialement dans une superposition symétrique d' états ↑ et ↓(équivalent d'un qubit dans une superposition des états |0> et |1>) conduit en un temps T_2 à un état dépolarisé:

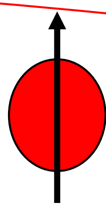
$$\frac{1}{2}\left(|0\rangle_{A,z}+|1\rangle_{A,z}\right)\left({}_{A,z}\langle 0|+{}_{A,z}\langle 1|\right)\xrightarrow{t>>T_2}\frac{1}{2}\left(|0\rangle_{A,z\,A,z}\langle 0|+|1\rangle_{A,z\,A,z}\langle 1|\right)\quad(3-16)$$

Nous venons de voir que cet état final peut s'interpréter à partir d'une purification dans un espace A+B:

$$|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{A,z}\otimes|1'\rangle_{B}+|1\rangle_{A,z}\otimes|2'\rangle_{B}\right)\quad(3-17)$$

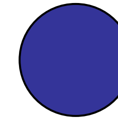
Cette interprétation apparaît à ce stade formelle, le système B étant une fiction mathématique. Nous verrons dans les leçons suivantes que cette purification a cependant un sens physique profond si le système B est l'environnement responsable de la relaxation de A. L'équation (3-17) décrit une corrélation de type « mesure quantique » entre les deux systèmes: B enregistre une information sur l'état de A. Dès que cette information existe, même si elle est non lue, les cohérences entre états de A disparaissent.Il s'agit là d'une expression du principe de complémentarité: la cohérence quantique (et les interférences qui lui sont associées) ne sont observables que tant que l'on ne « mesure » d'aucune manière l'état dans lequel se trouve le système.

La gomme quantique



A

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{A,z} \otimes |1'\rangle_B + |1\rangle_{A,z} \otimes |2'\rangle_B\right)$$



B

Supposons maintenant que Bob, au lieu de « mesurer » selon la base $|1'\rangle$, $|2'\rangle$, choisisse de mesurer explicitement les états $|1''\rangle$ et $|2''\rangle$ correspondant à la base Ox d'Alice (voir eq.3-14) et qu'il lui communique les résultats. Celle -ci sait alors, pour chaque réalisation, si A est dans l 'état $|0\rangle_{A,x}$ ou $|1\rangle_{A,x}$, superpositions cohérentes de $|0\rangle_{A,z}$ et $|1\rangle_{A,z}$. Elle peut classer ses qubits en deux familles de cas purs:

$$\rho_{A1} = |0\rangle_{Ax\,Ax}\langle 0| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_{Az\,Az}\langle 0| + |1\rangle_{Az\,Az}\langle 1| + \underline{|0\rangle_{Az\,Az}\langle 1| + |1\rangle_{Az\,Az}\langle 0|}\right) \quad (3-18a)$$

$$\rho_{A2} = |1\rangle_{Ax\,Ax}\langle 1| = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_{Az\,Az}\langle 0| + |1\rangle_{Az\,Az}\langle 1| \underline{- |0\rangle_{Az\,Az}\langle 1| - |1\rangle_{Az\,Az}\langle 0|}\right) \quad (3-18b)$$

Dans chaque famille, l 'interférence entre $|0\rangle_{A,z}$ et $|1\rangle_{A,z}$ est observable. En mesurant explicitement selon *0x*, Bob «gomme» l 'information indiquant l 'état de son spin selon *0z* et permet à Alice d 'observer des interférences, à condition qu 'elle corrèle ses résultats à ceux de Bob. **L 'opérateur ρ_A représente l 'information connue d 'Alice, différente suivant que Bob communique ou non avec elle.** Si la mesure de Bob n'est pas lue, il faut ajouter ρ_{A1} et ρ_{A2} et les deux termes d'interférence s'annulent.

4.
Mesures généralisées et POVM (« Positive Operator Valued Measure »)

Définition des mesures généralisées et des mesures POVM. Leurs réalisations possibles à l'aide d'un système auxiliaire B combiné à A (deux méthodes).

Exemple de mesure POVM d'un qubit: mesure à trois résultats possibles. Réalisation effective d'une telle mesure.

Application à la reconnaissance partielle de deux états non orthogonaux d'un qubit.

Définition d'une mesure généralisée

Analyser un système A comme partie d'un système plus vaste A+B donne une interprétation intéressante de l'opérateur densité, liant les notions de mesure et de décohérence à celle d'intrication. Ce point de vue permet de généraliser les mesures projectives de von Neumann à une classe plus vaste de mesures généralisées. Leur loi de probabilité et leur effet sur A peuvent être obtenus en les considérant comme résultat d'une mesure projective sur un système A+B. La définition des mesures généralisées ne nécessite pas de postulat supplémentaire à celui de von Neumann. Ces mesures permettent de définir de nouvelles manipulations de l'information d'un système ouvert.

Une mesure généralisée se définit par un ensemble d'opérateurs M_i satisfaisant la relation de fermeture:

$$\sum_i M_i^+ M_i = 1 \quad (4-1)$$

(mais non nécessairement la relation d 'orthogonalité: $M_i M_j \neq 0$ *si* $i \neq j$ *en général)*. La mesure généralisée sur un système d'opérateur densité ρ_A donne le résultat i avec la probabilité:

$$\pi_i = Tr\left(\rho_A M_i^+ M_i\right) \quad (4-2)$$

Définition d'une mesure généralisée (suite)

L 'équation (4-1) assure la conservation de la probabilité totale de mesure. Après avoir trouvé le résultat i , ρ_A *devient:*

$$\rho_A \xrightarrow{mesure\ i} \rho_{A/i} = \frac{M_i \rho_A M_i^+}{Tr(\rho_A M_i^+ M_i)} = \frac{M_i \rho_A M_i^+}{\pi_i} \quad (4-3)$$

alors qu 'une mesure non lue donne:

$$\rho_A \xrightarrow{mesure\ ?} \rho_{A/?} = \sum_i M_i \rho_A M_i^+ \quad (4-4)$$

Les équations (4-1,-2,-3,-4) généralisent (1-20,-21,-22,-23) valables pour des mesures projectives, cas particulier de mesure généralisées correspondant à $M_i = M_i^+ = P_i$.

Première réalisation de mesure généralisée sur A: opération unitaire intriquant A à B, suivie de mesure projective dans B

Soit un système auxiliaire *B* défini dans un espace de dimension supérieure ou égale au nombre n des M_i. A chaque M_i associons un vecteur d'un ensemble orthonormé $|u_i>_B$ et choisissons un état de référence $|0>_B$ de *B*. Considérons l'application linéaire de A+B définie sur tout état produit tensoriel $|\varphi>_A \otimes |0>_B$ par :

$$U|\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_B = \sum_i M_i|\varphi\rangle_A \otimes |u_i\rangle_B \quad (4-5)$$

L'équation (4-5) ne définit que la première colonne de l'opérateur *U* agissant dans l'espace de *B.* Dans le sous espace considéré, la restriction de *U* est unitaire car elle conserve le produit scalaire de deux états de la forme $|\varphi>_A \otimes |0>_B$ *et* $|\chi>_A \otimes |0>_B$ comme conséquence directe de la relation de complétude *(4-1).* Il est aisé d'étendre *U* en construisant un opérateur unitaire satisfaisant *(4-5)* et agissant dans l'espace des états de *A* et de *B* tout entier.

Première réalisation de mesure généralisée sur A (suite)

Cette opération unitaire intrique en général A et B. Faisons ensuite une mesure projective dans B, définie par les projecteurs $P_i = |u_i>_{BB} <u_i|$. D 'après von Neumann, le système A est projeté avec la probabilité $_A< \varphi\,|M_i^+ M_i\,|\,\varphi>_A$ dans l 'état:

$$\left|\varphi\right\rangle_{A/i} = \frac{M_i\left|\varphi\right\rangle_A}{\sqrt{{}_A\left\langle\varphi\right|M_i^+ M_i\left|\varphi\right\rangle_A}} \qquad (4-6)$$

Si l'état initial de A est un mélange statistique d'états $|\,\varphi_j>_A$, chaque état du mélange est transformé linéairement suivant (4-5), soit:

$$\rho_A \otimes \left|0\right\rangle_{B\,B}\left\langle 0\right| = \sum_j q_j \left|\varphi_j\right\rangle_A \left|0\right\rangle_{B\,B}\left\langle 0\right|_A \left\langle\varphi_j\right| \rightarrow$$

$$\sum_{i,i',j} q_j M_i \left|\varphi_j\right\rangle_{A\,A}\left\langle\varphi_j\right| M_{i'}^+ \otimes \left|u_i\right\rangle_{B\,B}\left\langle u_{i'}\right| = \sum_{i,i'} M_i \rho_A M_{i'}^+ \otimes \left|u_i\right\rangle_{B\,B}\left\langle u_{i'}\right| \quad (4-7)$$

Une mesure projective de B donnant le résultat i projette alors bien A dans l'état décrit par (4-3) alors qu'une mesure non-lue donne l'état décrit par(4-4).

L'intrication unitaire de A avec B suivie d'une mesure projective de B réalise la mesure généralisée.

Mesure généralisée définie par un ensemble d'opérateurs positifs de mesure (POVM).

La loi de probabilité d'une mesure généralisée est définie par les produits $Mi^{+}\, Mi$, opérateurs hermitiques positifs. On peut également définir une mesure généralisée par la donnée d'un ensemble E_i d'opérateurs hermitiques positifs constituant une partition de l' unité:

$$\sum_i E_i = 1 \quad (4-8)$$

sans séparer explicitement les deux parties adjointes constituant chaque E_i.
La probabilité de trouver le résultat i est $Tr\,(\rho_A\, E_i)$ et la somme des probabilités est égale à 1. L'ensemble des E_i s 'appelle un POVM (pour «Positive Operator Valued Measure»).

POVM (suite)

On peut réaliser une mesure définie par un POVM par la méthode décrite plus haut, (intrication unitaire de A à B suivie d'une mesure projective de B) en remplaçant les opérateurs adjoints M_i , M_i^+ par la racine carrée hermitique $\sqrt{E_i}$ des E_i :

$$M_i = M_i^+ = \sqrt{E_i} \qquad (4-9)$$

$$\rho_{A/i} = \frac{\sqrt{E_i}\rho_A\sqrt{E_i}}{Tr(\rho_A E_i)} \qquad (4-10)$$

$$\rho_{A/?} = \sum_i \sqrt{E_i}\rho_A\sqrt{E_i} \qquad (4-11)$$

Notons une différence essentielle entre mesures généralisée (ou POVM) et mesure projective. Une mesure POVM, contrairement à une mesure von Neumann. ne donne pas des résultats successifs nécessairement identiques. On a en effet en général:

$$M_i M_j \neq \delta_{ij} M_j \ et \quad E_i E_j \neq \delta_{ij} E_j \quad (4-12)$$

Deuxième réalisation d'une mesure POVM sur A: adjonction d'un système auxiliaire non corrélé à A suivie d'une mesure non-locale sur A+B

Au lieu d'intriquer A à B puis de mesurer localement B, on associe A à un système B non intriqué à A et décrit par son opérateur densité ρ_B, puis on effectue une mesure projective non locale sur A+B définie par l'opérateur O_{AB}. Appelons P_i les projecteurs sur les espaces propres de O_{AB}. La probabilité de trouver le résultat i *s'écrit:*

$$\pi_i = Tr_{AB}(\rho_A \rho_B P_i) = Tr_A(\rho_A E_i) \quad (4-13)$$

$$avec \quad E_i = Tr_B(\rho_B P_i) \quad (4-14)$$

Les opérateurs du système A définis par (4-14) satisfont évidemment à (4-8). L'état du système A, après la mesure projective de A+B ayant donné le résultat i est:

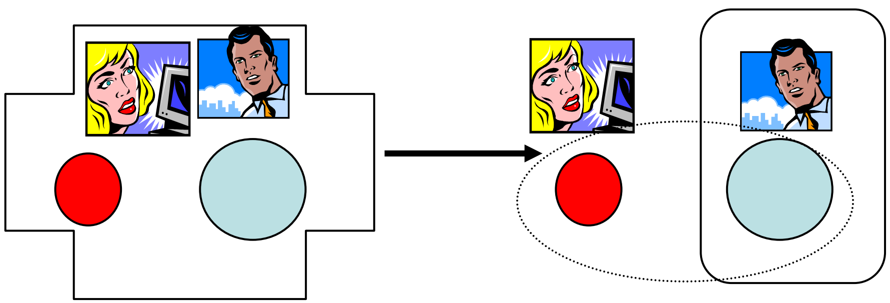
$$\rho_{A/i} = \frac{Tr_B(P_i \rho_A \rho_B P_i)}{Tr_A(\rho_A E_i)} \quad (4-15)$$

Contrairement à (4-10), l'équation (4-15) ne s'exprime pas simplement en fonction des E_i (elle dépend aussi explicitement de ρ_B). Ainsi, cette réalisation de POVM est utile surtout lorsqu'on s'intéresse aux probabilités de résultat de mesures, et non à l'état final du système après la mesure.

Généralités sur les réalisations de mesure POVM

Inversement, on montre que tout POVM peut être réalisé par un choix convenable de système auxiliaire et de mesure non locale dans A+B. En d'autres termes, on peut étendre l'espace de Hilbert au delà de celui où les E_i sont définis et trouver dans l'espace étendu un ensemble complet de projecteurs orthogonaux P_i tels que les E_i correspondent à la projection des P_i dans l'espace initial (théorème de Neumark).

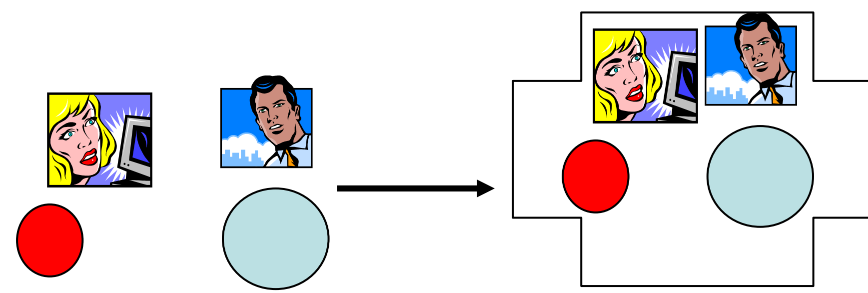
Récapitulons les deux méthodes qu'Alice et Bob peuvent utiliser pour effectuer une mesure généralisée sur A à l'aide d'un système auxiliaire B:



Intrication par opération non-locale de A+B

Mesure projective locale effectuée par Bob

Méthode 1



Mise en contact de A avec un système non intriqué B

Mesure projective non locale effectuée par Alice et Bob sur A+B

Méthode 2

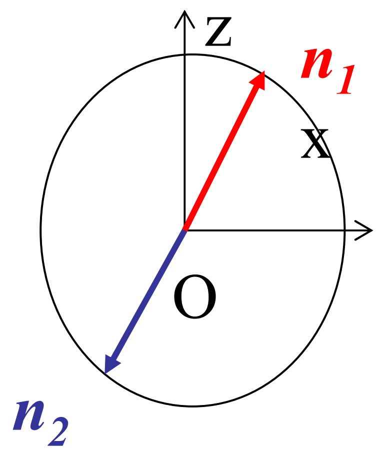
Exemple de mesure POVM d'un qubit

Considérons des POVM à une dimension d'un qubit. Ces opérateurs à une seule valeur propre positive non nulle sont proportionnels à des projecteurs à une dimension. Se donner un POVM à q termes consiste à choisir un ensemble de q vecteurs de Bloch normés n_i ($i = 1$ *à* q) et q nombres positifs λ_i et à définir:

$$E_i = \lambda_i |0\rangle_{\vec{n}_i} \, {}_{\vec{n}_i}\langle 0| = \frac{\lambda_i}{2}\left(I + \vec{n}_i \vec{\sigma}\right) \quad (4-16)$$

avec, pour satisfaire (4-8):

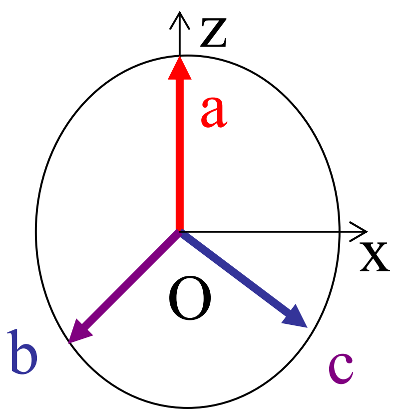
$$\sum_i \lambda_i = 2 \quad ; \quad \sum_i \lambda_i \vec{n}_i = \vec{0} \quad (4-17)$$



Cas q=2: On a $\boldsymbol{n_1} = -\boldsymbol{n_2}$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Les vecteurs de Bloch sont opposés. Ils correspondent à deux états orthogonaux propres de la composante du spin fictif dans la direction correspondante. Toute mesure POVM à 2 éléments d'un qubit est projective.

Exemple de mesure POVM d'un qubit (suite)

Cas q=3: C'est le premier cas de POVM non trivial. En se limitant à une situation symétrique, nous choisissons trois vecteurs à 120° l'un de l'autre dans un plan: les éléments du POVM sont proportionnels à trois projecteurs sur les états non-orthogonaux $|a>_{A,}$ $|b>_A$, $|c>_A$ définis par l'équation (3-10) rappelée ci-dessous:



$$|a\rangle_A = |0\rangle_A \quad ;$$

$$|b\rangle_A = -\frac{1}{2}|0\rangle_A + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_A \quad ;$$

$$|c\rangle_A = -\frac{1}{2}|0\rangle_A - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle_A$$

$$\boxed{E_i = \frac{2}{3}|i\rangle_A \,{}_A\langle i| \qquad (i = a, b, c) \quad (4-18)}$$

Réalisation de la mesure POVM avec un qubit auxiliaire (méthode 2)

Soit un qubit auxiliaire B préparé dans l'état $|0>_B$. Considérons les 4 états à 2 qubits:

$$\left|i\right\rangle_{AB} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|i\right\rangle_A \otimes \left|0\right\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|0\right\rangle_A \otimes \left|1\right\rangle_B \qquad (i = a,b,c)$$

$$\left|d\right\rangle_{AB} = \left|1\right\rangle_A \otimes \left|1\right\rangle_B \qquad (4-19)$$

On constate que ces états constituent une base orthonormée de l'espace des qubits A et B (on utilise pour cela la relation $_A< i \mid j >_A = -1/2$ si $i \neq j$ que l'on vérifie sur (3-10)).Les projecteurs $P_i\ (i = a,b,c)$ et P_d sur ces états définissent une mesure projective non-locale des 2 qubits. En appliquant (4-14), on trouve:

$$E_i = {}_B\left\langle 0 \middle| i \right\rangle_{AB} \;\; {}_{AB}\left\langle i \middle| 0 \right\rangle_B = \frac{2}{3}\left|i\right\rangle_A \;\; {}_A\left\langle i\right| \qquad (i = a,b,c)$$

$$E_d = {}_B\left\langle 0 \middle| d \right\rangle_{AB} \;\; {}_{AB}\left\langle d \middle| 0 \right\rangle_B = 0 \qquad (4-20)$$

ce qui correspond bien au POVM cherché (les 3 opérateurs $i = a,b,c$ sont ceux donnés par (4-18) et E_d a une probabilité nulle).

Réalisation de la mesure POVM avec un qubit auxiliaire (méthode 2-suite)

On peut de façon équivalente considérer la mesure projective définie par les 4 états:

$$|a \pm d\rangle_{AB} = \left(|a\rangle_{AB} \pm |d\rangle_{AB}\right)/\sqrt{2}\,;|b\rangle_{AB};|c\rangle_{AB} \qquad (4-21)$$

et remarquer que deux éléments du POVM correspondants sont identiques:

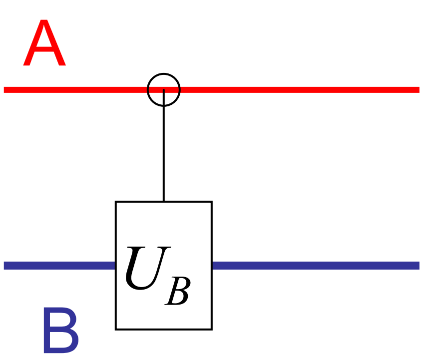
$$E_{a\pm d} = {}_B\langle 0|a \pm d\rangle_{AB}\ {}_{AB}\langle a \pm d|0\rangle_B = \frac{1}{3}|a\rangle_A\ {}_A\langle a| = \frac{E_a}{2} \qquad (4-22)$$

Ainsi, la mesure POVM peut être réalisée en effectuant sur A+B la mesure projective définie par les 4 projecteurs $P_{a\pm d}, P_b$ et P_c sans distinguer les résultats des projections sur $|a+d>$ et $|a-d>$ (la probabilité de l'élément E_a étant la somme des probabilités correspondantes).

Comment réaliser la mesure non-locale de A+B équivalente à la mesure du POVM?

Il nous reste à indiquer comment effectuer la mesure projective des états intriqués $|a \pm d>_{AB}$ $|b>_{AB}$ *et* $|c>_{AB}$ du système A + B. Nous avons déjà rencontré un problème équivalent pour mesurer *les états de Bell* (voir cours 2001-2002). La méthode générale consiste à séparer les deux qubits en effectuant une opération non-locale à l'aide d'une *porte quantique*, puis à effectuer des mesures locales sur les deux qubits séparés.

Rappel sur les portes quantiques conditionnelles à 2 qubits, porte control-U.



Le qubit contrôle A conditionne l'évolution unitaire du qubit cible B. La transformation U_B est appliquée à B si A est dans $|1>_A$. B reste invariant si A est dans $|0>_A$. Le bit contrôle A reste inchangé. Cas particulier: $U_B = X_B$. Il s'agit alors de la porte « control not » (basculement conditionnel du bit B). ***On montre (cours 2001-2002) que toute porte control-U peut être réalisée en combinant des control-not et des portes (opérations unitaires) à un bit.***

Séparation des états intriqués et mesure locale des deux qubits: mesure dans la base corrélée

Pour comprendre comment l'action d'une porte control-U sépare A et B, donnons l'expression des 4 états $|a \pm d>_{AB}$, $|b>_{AB}$ et $|c>_{AB}$ en séparant les termes correspondant aux états 0 et 1 de A. Compte tenu de (3-10), (4-19) et (4-21):

$$|a \pm d\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A \otimes \left[\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle_B\right] \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

$$|b/c\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A \otimes \left[-\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle_B + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle_B\right] \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B \qquad (b : signe +; c : signe -)$$

$$(4-23)$$

Etats analogues aux états de Bell, mais intrication non maximale

Il est alors clair que si l'on définit U_B par:

$$U_B|0\rangle_B = -\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle_B + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle_B = |0\rangle_{\vec{u},B} \; ;$$

$$U_B|1\rangle_B = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle_B = |1\rangle_{\vec{u},B} \qquad (4-24)$$

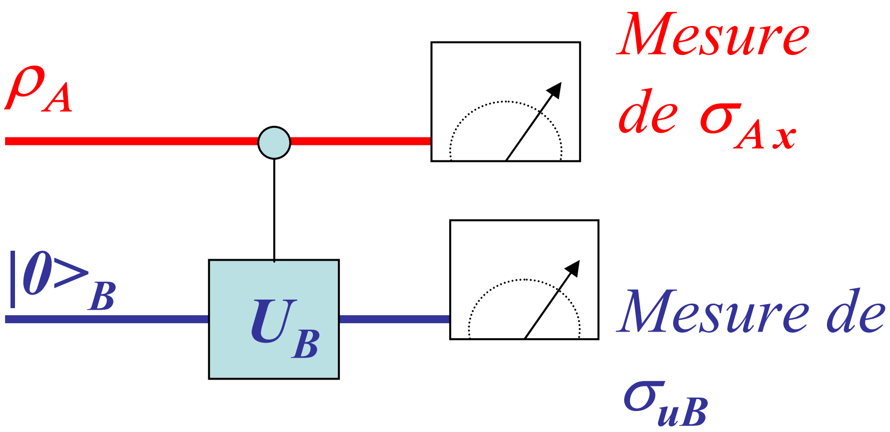
Vérifier qu'il s'agit d'une opération unitaire et déterminer les vecteurs de Bloch associés aux états orthogonaux $|0>_{uB}$ et $|1>_{uB}$

la porte contrôle-U_B effectue les transformations séparant les deux bits:

$$|a \pm d\rangle_{AB} \xrightarrow{control\,U} \frac{|0\rangle_A \pm |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle_{\vec{u},B}$$

$$|b/c\rangle_{AB} \xrightarrow{control\,U} \frac{|0\rangle_A \pm |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_{\vec{u},B} \qquad (4-25)$$

Réalisation explicite du POVM

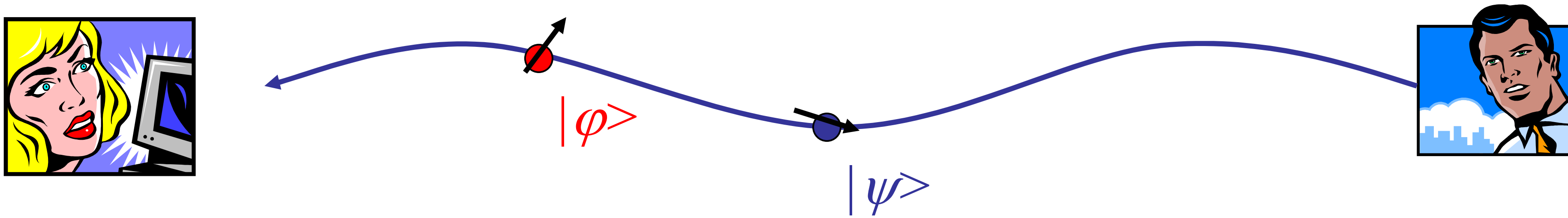


On introduit le qubit A dans l'état décrit par ρ_A, le qubit auxiliaire B dans l'état $|0\rangle_B$. On applique ensuite la porte contrôle U_B (opération non-locale) et on mesure finalement X_A sur le qubit A et σ_{uB} sur le qubitB (opérations locales).

L'ensemble de ces deux mesures donne deux bits (classiques) que l'on fait correspondre de la façon suivante aux éléments du POVM:

$$\begin{array}{lll} 0,1 \; et \; 1,1 & \rightarrow & a \\ 0,0 & \rightarrow & b \\ 1,0 & \rightarrow & c \quad (4-26) \end{array}$$

Reconnaissance partielle de deux états non-orthogonaux d'un qubit: un POVM est mieux adapté qu'une mesure projective

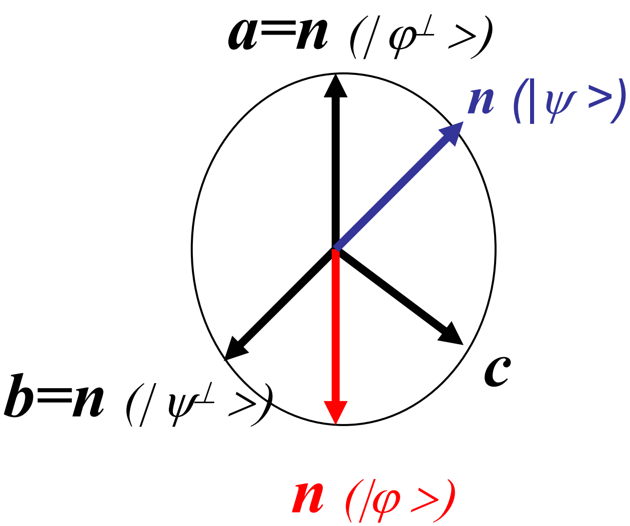


Bob envoie à Alice une série de qubits dans 2 états non-orthogonaux $|\varphi>$ ou $|\psi>$. Alice, qui connaît ces états sans savoir dans quel ordre ils sont envoyés, ne peut déterminer à coup sûr l'état de chaque bit. L' impossibilité de distinguer les états non-orthogonaux est à la base de la distribution de clé cryptographique (voir cours 2001-2002).

Une reconnaissance partielle est cependant possible. Par une mesure projective dans la base $\{|\varphi>, |\varphi^{\perp}>\}$, Alice peut être sûre, si elle trouve $|\varphi^{\perp}>$, que le qubit est dans l'état $|\psi>$. Elle peut ainsi filtrer, avec certitude, une fraction $|<\psi|\varphi^{\perp}>|^2$ des qubits dans l'un des états ($|\psi>$), sans pouvoir isoler à coup sûr un seul qubit dans l'autre. Si elle choisit de faire une mesure projective dans la base ($|\psi>, |\psi^{\perp}>$), elle sélectionne de même une fraction des qubits dans l'autre état, $|\varphi>$. Peut-elle procéder de façon plus symétrique?

Une application des POVM: reconnaissance symétrique partielle de deux états non-orthogonaux d'un qubit

Ainsi, une seule mesure projective ne lui permet pas de sélectionner sans erreur des qubits dans les deux états non orthogonaux.



Une mesure généralisée POVM permet par contre de reconnaître à coup sûr, par une seule procédure, des qubits dans les 2 états. Alice construit un POVM à partir des projecteurs sur les états $|\varphi^{\perp}>$ et $|\psi^{\perp}>$ (E_a , E_b) auquel elle ajoute un 3ème élément E_c (la figure montre les vecteurs de Bloch associés aux 3 éléments pour des états $|\varphi>$ et $|\psi>$ correspondant à des «spins» orientés à 120°). Si Alice trouve le résultat a (resp. b), elle est sûre que le qubit est dans l'état $|\varphi>$ (resp. $|\psi>$). Si elle trouve le résultat c, elle ne peut pas décider.

Conclusions de la deuxième leçon

Pour décrire la physique d'un système ouvert A, il est intéressant de considérer explicitement un système auxiliaire fictif B auquel ce système est associé. Tout opérateur densité de A apparaît comme une trace partielle effectuée sur un état pur du système A+B. Les différentes préparations équivalentes de l'opérateur densité correspondent à différents types de mesures non lues dans B qui peuvent toutes être effectuées sur la même purification (théorème GHJW).

Il est également utile de définir des mesures généralisées ou POVM sur le système A, correspondant à des mesures de von-Neumann projectives effectuées sur A+B. Comme les mesures projectives, ces mesures généralisées ont une probabilité totale de tous leurs résultats possibles égale à 1. Mais, alors que les mesures projectives ont au plus N résultats (N étant la dimension de l'espace de A) les mesures généralisées ont un nombre non-limité de résultats possibles. Elles ne sont par contre pas stables (il n'est pas sûr qu'un résultat soit obtenu deux fois de suite si la mesure est répétée). Les mesures généralisées sont utiles quand la question posée au système a un choix de réponse possibles supérieur à N (par exemple, un qubit est-il dans l'état $|\varphi>$, ou dans l'état $|\psi>$ (non orthogonal à $|\varphi>$) ou «on ne peut décider»).

Nous verrons que toute évolution physique d'un système ouvert peut être vue comme le résultat d'une mesure généralisée sur ce système.