

5.

Les super-opérateurs quantiques. Décomposition de Kraus.

Transformations de l'opérateur densité d'un système physique ouvert interagissant avec un environnement. Formalisme universel qui s'applique à des situations très générales en physique et en information quantique.

Notion de super-opérateur, application de l'espace des opérateurs densité dans lui-même. Propriétés générales de ces super-opérateurs et exemples simples.

Forme standard d'un super-opérateur décomposé comme une somme (forme de Kraus).

Caractère général de cette décomposition. Formes équivalentes de la décomposition de Kraus.

Evolution d'un système ouvert: notion de super-opérateur quantique

Comment relier l'opérateur densité d'un système physique à un instant donné t à son état à un temps antérieur $t=0$? Si le système est isolé, son évolution est hamiltonienne (régie par une équation de Schrödinger) et il existe un opérateur unitaire $U(t,0)$ tel que:

$$\rho(t) = U(t,0)\rho(0)U^\dagger(t,0) \quad (5-1)$$

Si le système (A) est ouvert, couplé à d'autres systèmes (appareils de mesure, environnements de toute sorte notés E), son évolution est en général non-unitaire (voir leçon 1). Si E est connu, on peut considérer l'ensemble isolé « A+E », décrire l'évolution unitaire de son opérateur densité ρ_{AE} , sous l'effet de son opérateur d'évolution U_{AE} , puis prendre la trace sur l'environnement pour en déduire ρ_A à l'instant t . Nous avons suivi cette approche à la leçon 1.

Ici, nous cherchons à établir de la façon la plus générale possible les propriétés de la transformation reliant $\rho_A(t)$ à $\rho_A(0)$, indépendamment de la nature de E et de t . Les seules contraintes que nous imposerons à cette transformation, décrite par un super-opérateur que nous noterons \mathcal{E}_A , est d'être linéaire et de conserver à ρ_A les propriétés fondamentales d'un opérateur densité.

Les lois de conservation de l'évolution d'un système quantique

On impose à la transformation linéaire \mathcal{L}_A de satisfaire les relations très générales suivantes:

$$[\mathcal{L}_A(\rho_A)]^+ = \mathcal{L}_A(\rho_A) \quad (5-2a)$$

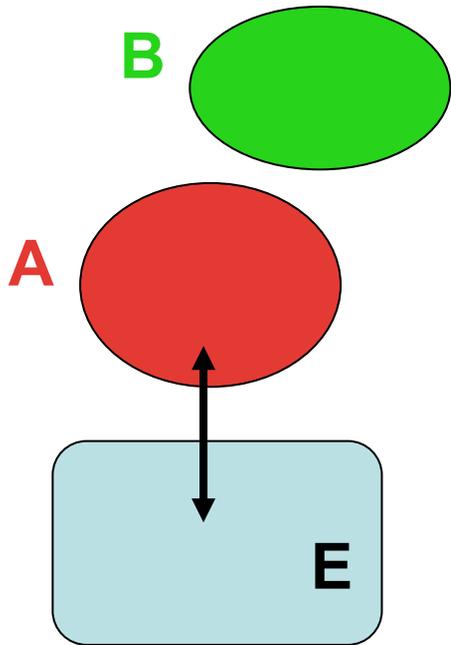
$$\text{Tr}[\mathcal{L}_A(\rho_A)] = 1 \quad (5-2b)$$

$${}_A\langle\psi|\mathcal{L}_A(\rho_A)|\psi\rangle_A \geq 0 \quad (\forall|\psi\rangle_A) \quad (5-2c)$$

Ces équations traduisent les conservations de l'hermiticité (5-2a), de la trace (5-2b) et de la positivité (5-2c) de ρ_A , nécessaires à l'interprétation probabiliste de la théorie.

Le super-opérateur \mathcal{L}_A doit satisfaire, en plus de (5-2), une autre propriété importante: il faut qu'il soit **complètement positif**.

Positivité complète du super-opérateur d'évolution



L'opérateur densité initial ρ_A , avant son couplage à E, peut s'interpréter comme trace partielle prise sur un système auxiliaire B, intriqué à A par un couplage passé (leçon 2). Si entre les instants 0 et t B n'est couplé ni à A ni à l'environnement E responsable de l'évolution de A, le système A+B évolue sous l'effet du super-opérateur $\mathcal{E}_A \otimes I_B$ où I_B est le super-opérateur identité agissant sur B. Ce super-opérateur étendu à A+B doit être positif, quel que soit B, pour préserver l'interprétation probabiliste de l'opérateur densité global:

$${}_{AB} \langle \psi | \mathcal{E}_A \otimes I_B (\rho_{AB}) | \psi \rangle_{AB} \geq 0 \quad (\forall \rho_{AB}, |\psi\rangle_{AB}) \quad (5-3)$$

Le super-opérateur $\mathcal{E}_A \otimes I_B$ décrit l'effet sur A+B d'une transformation unitaire $U_{AE} \otimes I_B$ de A+E+B, et est donc nécessairement positif, puisque la transformation unitaire et l'opération de trace sur E conservent la positivité. On en déduit la complète positivité de tout super-opérateur physiquement acceptable de A. (Mathématiquement, cette contrainte n'est pas satisfaite par tous les super-opérateurs linéaires vérifiant (5-2)).

Super-opérateur sous forme de somme: représentation de Kraus

L'action de tout super opérateur linéaire satisfaisant (5-2) et (5-3) sur un opérateur densité ρ_A d'un système A appartenant à un espace de Hilbert H_A de dimension N peut s'exprimer sous la forme d'une somme:

$$\mathfrak{L}_A(\rho_A) = \sum_{\mu=1}^{N^2} M_\mu \rho_A M_\mu^\dagger \quad (5-4)$$

où les M_μ sont des opérateurs linéaires de H_A , appelés générateurs du super-opérateur, et satisfaisant la relation de fermeture:

$$\sum_{\mu=1}^{N^2} M_\mu^\dagger M_\mu = I_A \quad (5-5)$$

Au plus, N^2 générateurs sont nécessaires. Il peut y en avoir un nombre $n < N^2$ quand $N^2 - n$ des M_μ sont égaux à 0. La relation (5-4) est la **représentation de Kraus** du super-opérateur. Sa linéarité est évidente, ainsi que sa positivité. La conservation de la trace pour tout ρ_A impose la relation de fermeture:

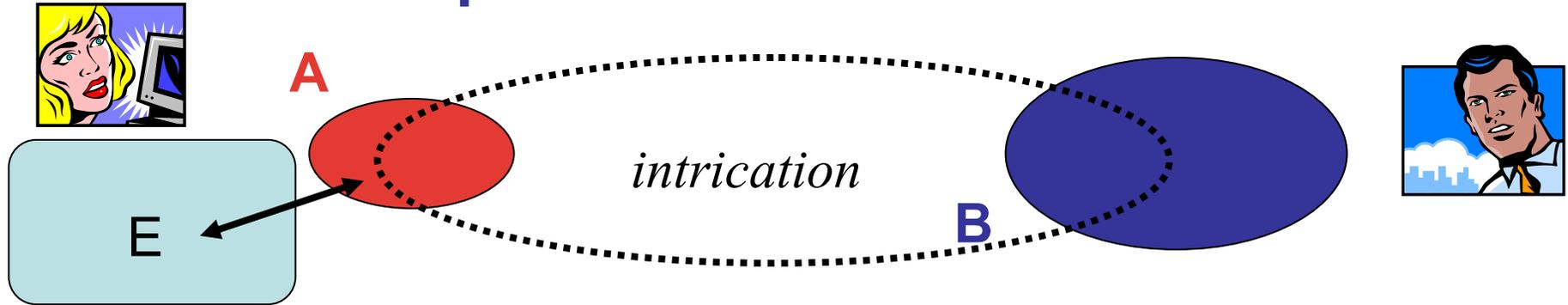
$$\text{Tr}_A \{ \mathfrak{L}_A(\rho_A) \} = \sum_{\mu=1}^{N^2} \text{Tr}_A \{ M_\mu \rho_A M_\mu^\dagger \} = \text{Tr}_A \left\{ \rho_A \sum_{\mu=1}^{N^2} M_\mu^\dagger M_\mu \right\} = 1 \quad (\forall \rho_A) \longrightarrow \sum_{\mu=1}^{N^2} M_\mu^\dagger M_\mu = I_A$$

Existence d'une représentation de Kraus

Nous avons montré à la 1ère leçon que différents types d'évolution de l'opérateur densité (évolution unitaire d'un système fermé, évolution d'un système ouvert couplé à un environnement, mesure non lue) conduisaient à des expressions de type « forme de Kraus ». Nous n'avons pas montré cependant que le nombre des opérateurs générateurs était limité, ni que cette forme était absolument générale, quelle que soit le type d'évolution du système, pourvu que les conditions indiquées plus haut soient satisfaites. Nous allons le démontrer dans cette leçon.

Suivant une méthode qui a montré son efficacité à la leçon 2, nous allons considérer que l'état de A résulte de la manipulation d'un système $A+B$ initialement intriqué. Comme nous l'avons vu, Alice (qui ne dispose que de A) est incapable de savoir comment son système a été préparé, même si elle en connaît l'opérateur densité. En conséquence, toute la physique de l'évolution doit préserver cette ambiguïté fondamentale. Alice doit pouvoir imaginer tous les scénarii de préparation possibles et décrire la physique de l'évolution de son système de façon consistante dans tous ces scénarii. Même si B n'est pas couplé à l'environnement, sa présence virtuelle à côté de A impose comme nous allons le voir l'existence d'une représentation de Kraus pour toute évolution physiquement acceptable de A .

Une expérience de pensée à la EPR pour suivre l'évolution de l'opérateur densité d'un système A couplé à un environnement E



Alice veut étudier l'évolution d'un système ouvert A (espace de Hilbert H_A à N dimensions), sous l'effet de son couplage à partir de $t=0$ à un environnement non spécifié E de dimension quelconque. Bob possède un système auxiliaire B dans un espace de dimension $\geq N$, non couplé à E et qui n'évolue pas. Alice et Bob commencent par préparer, avant $t=0$, un état maximalement intriqué $|\Psi\rangle_{AB}$ construit sur une base $\{|i\rangle_A\}$ de A et un ensemble d'états orthonormés $\{|i\rangle_B\}$ de B. Cet état peut s'exprimer de façon équivalente dans d'autres bases d'états déduites des $\{|i\rangle_A, |i\rangle_B\}$ par des relations linéaires dont les coefficients sont complexes conjugués les uns des autres (voir leçon 1, équs (2-6) et (2-7)):

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j |\varphi_j\rangle_A \otimes |\varphi_j\rangle_B \quad (5-7) \quad |\varphi_j\rangle_A = \sum_i a_{ji} |i\rangle_A, \quad |\varphi_j\rangle_B = \sum_i a_{ji}^* |i\rangle_B \quad (5-8)$$

Une expérience de pensée à la EPR (suite)

La mise en contact à $t=0$ de A avec E, dans l'état pur $|0\rangle_E$ (voir remarque à la leçon 2 sur la possibilité de décrire E initialement comme un état pur) correspond à l'état initial du système global isolé A+E+B:

$$|\Psi(0)\rangle_{AE,B} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \left(|\varphi_j\rangle_A \otimes |0\rangle_E \right) \otimes |\varphi_j\rangle_B \quad (5-9)$$

dont l'état ultérieur s'écrit, en appelant $U_{AE}(t,0)$ l'opérateur d'évolution de A+E:

$$|\Psi(t)\rangle_{AE,B} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \left[U_{AE}(t,0) \left(|\varphi_j\rangle_A \otimes |0\rangle_E \right) \right] \otimes |\varphi_j\rangle_B \quad (5-10)$$

Le système global peut ainsi être vu comme un état bi-partite intriqué, les deux partenaires étant A+E et B. Notons que la partie B n'évolue pas et reste décomposée sur les états $|\varphi_j\rangle_B$ initiaux. Si Bob effectue une mesure dans la base $\{|\varphi_j\rangle_B\}$, il trouvera avec des probabilités égales à $1/N$ et constantes, quel que soit t , tous les états. S'il trouve $|\varphi_j\rangle_B$ et que Alice et Bob n'observent pas E, ils doivent ultérieurement décrire le système A+B par l'opérateur densité:

$$\rho_{j,AB}(t) = \rho_{j,A}(t) \otimes |\varphi_j\rangle_{BB} \langle \varphi_j| \quad (5-11)$$

$$\text{avec } \rho_{j,A}(t) = \text{Tr}_E \left\{ U_{AE}(t,0) |\varphi_j\rangle_A |0\rangle_E \langle 0|_E \langle \varphi_j| U_{AE}^\dagger(t,0) \right\} \quad (5-12)$$

Une expérience de pensée à la EPR (suite)

D'après (5-10,-11,-12), l'état de A+B conditionné à la mesure de B dans $|\varphi_j\rangle_B$ est indépendant du moment où Bob effectue sa mesure. Nous avons supposé que Bob mesure à l'instant t mais on obtient le même résultat pour l'opérateur densité de A si Bob projette à l'instant $t=0$ le système dans l'état $|\varphi_j\rangle_A |\varphi_j\rangle_B$ et qu'Alice et Bob le laissent ensuite évoluer entre les instants 0 et t . En d'autres termes, l'opération de mesure par Bob et l'évolution temporelle due au couplage de A avec E commutent. Quel que soit leur ordre, elles conduisent, pour un même état trouvé par Bob, au même opérateur densité final de A.

Considérons donc les deux procédures équivalentes suivantes:

(i) Disposant de l'état intriqué (5-7) à $t < 0$, Alice demande à Bob de lui préparer à $t = 0$ le système A dans l'état $|\varphi_j\rangle_A$. Bob doit éventuellement s'y reprendre environ N fois. Lorsqu'il réussit à mesurer $|\varphi_j\rangle_B$ il en informe Alice qui sait alors que A est dans $|\varphi_j\rangle_A$. A et B sont séparés par cette mesure. Il s'agit, comme nous l'avons décrit à la leçon 2 d'une généralisation de l'expérience de corrélation EPR. Alice couple alors son état, séparé de B, à E et laisse évoluer pendant un temps t . A est alors décrit par $\rho_{jA}(t)$ donné par (5-12), qui peut aussi s'écrire, en introduisant la notation de super-opérateur:

$$\rho_{j,A}(t) = \mathcal{L}_A \left(|\varphi_j\rangle_{AA} \langle \varphi_j| \right) \quad (5-13)$$

Une expérience de pensée à la EPR (fin)

(ii) Alice et Bob préparent l'état intriqué (5-7) à $t < 0$, le laissent évoluer sous l'effet du couplage entre A et E entre 0 et t . Alice demande alors à Bob de mesurer B et de lui dire s'il trouve $|\varphi_j\rangle_B$. Le système intriqué A+B évolue dans ce cas entre 0 et t sous l'effet du super-opérateur $\mathcal{E}_A \otimes 1_B$. Le fait que \mathcal{E}_A est complètement positif signifie que $\mathcal{E}_A \otimes 1_B$ agissant sur $|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|$ produit un opérateur densité positif de A+B, qui peut toujours se décomposer en au plus N^2 projecteurs sur des états $|\Phi_\mu\rangle_{AB}$ orthogonaux (N^2 : dimension du sous espace A+B exploré):

$$\mathcal{E}_A \otimes 1_B (|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|) = \sum_{\mu=1}^{N^2} q_\mu |\Phi_\mu\rangle_{AB} \langle\Phi_\mu| \quad ; \quad q_\mu > 0 \text{ et } \sum_{\mu} q_\mu = 1 \quad (5-14)$$

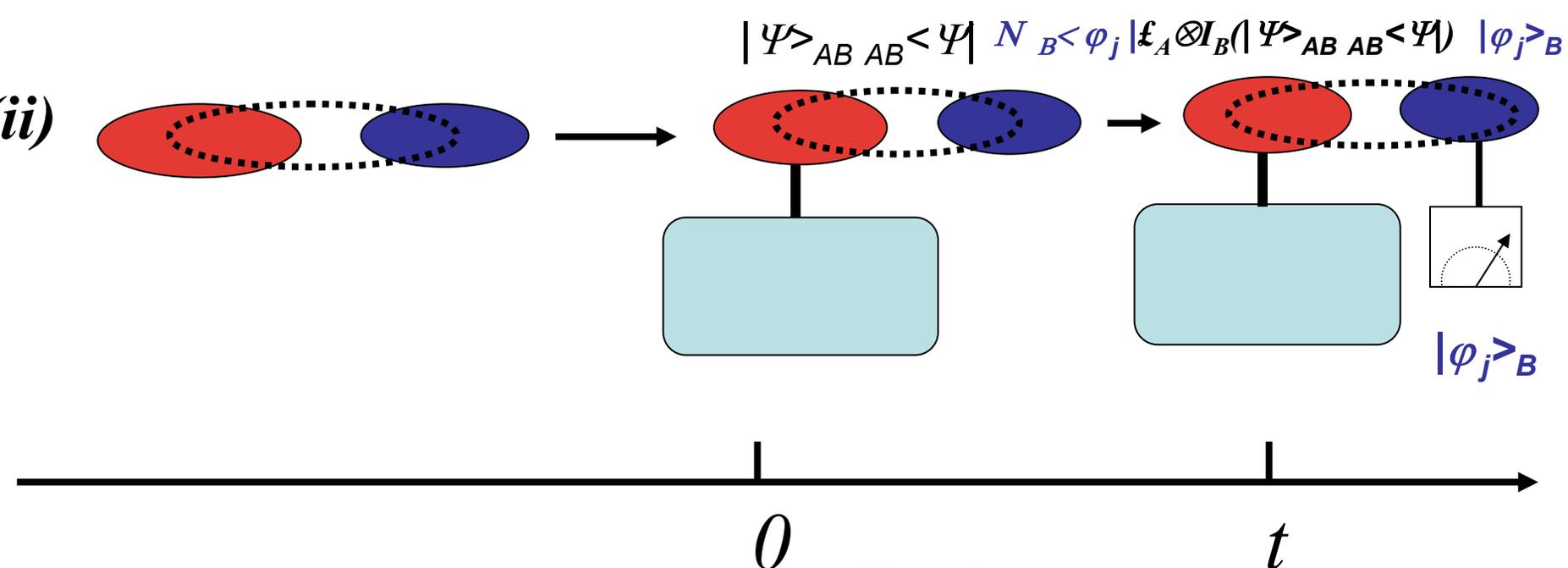
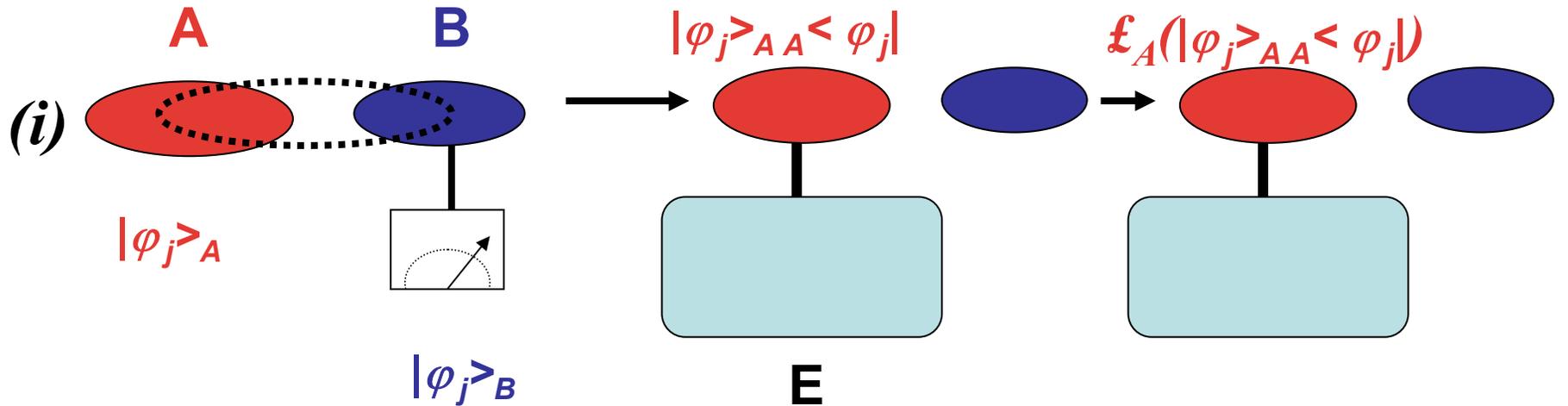
La mesure à l'instant t de B dans l'état $|\varphi_j\rangle_B$ projette enfin le système A avec la probabilité $1/N$ dans l'état décrit par l'opérateur densité:

$$\rho_{j,A} = N \sum_{\mu=1}^{N^2} q_\mu \langle\varphi_j|\Phi_\mu\rangle_{AB} \langle\Phi_\mu|\varphi_j\rangle_B \quad (5-15) \quad \text{Le facteur de normalisation } N \text{ provient de la division par la probabilité de trouver le résultat (voir eq.(1-22)).}$$

Nous pouvons maintenant identifier les deux expressions de $\rho_{j,A}(t)$ (équations (5-13) et (5-15)):

$$\rho_{j,A}(t) = \mathcal{E}_A \left(\langle\varphi_j|_A \langle\varphi_j| \right) = N \sum_{\mu=1}^{N^2} q_\mu \langle\varphi_j|\Phi_\mu\rangle_{AB} \langle\Phi_\mu|\varphi_j\rangle_B \quad (5-16)$$

Récapitulation: les deux procédures pour effectuer l'expérience de pensée EPR



Forme de Kraus du super-opérateur d'évolution

Les ${}_B \langle \varphi_j | \Phi_\mu \rangle_{AB}$ dans (5-16) sont des états de A, fonctions des coefficients a_{ji} qui définissent les $|\varphi_j\rangle_B$ (voir équation (5-8)). Les relations entre $|\varphi_j\rangle_A$ et $|\varphi_j\rangle_B$ d'une part et entre $|\varphi_j\rangle_B$ et ${}_B \langle \varphi_j | \Phi_\mu \rangle_{AB}$ d'autre part étant anti-linéaires, la relation entre $|\varphi_j\rangle_A$ et ${}_B \langle \varphi_j | \Phi_\mu \rangle_{AB}$ définit une application *linéaire* de l'espace de Hilbert de A dans lui-même que l'on notera M_μ :

$$M_\mu |\varphi\rangle_A = \sqrt{Nq_\mu} {}_B \langle \varphi | \Phi_\mu \rangle_{AB} \quad (5-17)$$

Avec cette notation introduite dans (5-16), on obtient enfin:

$$\mathcal{E}_A \left(|\varphi_j\rangle_A \langle \varphi_j| \right) = \sum_{\mu=1}^{N^2} M_\mu |\varphi_j\rangle_A \langle \varphi_j| M_\mu^\dagger \quad (5-18)$$

ce qui est une forme de Kraus, pour un état initial pur $|\varphi_j\rangle_A$. Si cet état initial est un mélange $\rho_A = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle_A \langle \varphi_j|$, la linéarité de \mathcal{E}_A mène à l'expression de Kraus (5-4), dont nous démontrons ainsi la validité générale. On montre aussi facilement que les M_μ définis par (5-17) satisfont la relation de complétude (5-5). **La forme de Kraus est valable pour toute évolution d'un système isolé (évolution unitaire) ou d'un système ouvert (couplage à un environnement produisant de la décohérence, couplage à un appareil de mesure non lue...)**

Evolution par super-opérateur vue comme une mesure généralisée non lue

La forme de Kraus est absolument générale, pour tout super-opérateur linéaire complètement positif. Elle existe quelle que soit la nature de l'environnement du système ouvert. En comparant (5-4) à (4-4), nous voyons que **toute évolution par super-opérateur linéaire complètement positif peut être vue comme une mesure généralisée non lue dont les éléments sont les M_{μ}** .

On peut toujours représenter un super-opérateur agissant sur un système A comme résultant d'une évolution unitaire d'un système étendu A+E_f, suivie d'une mesure projective non lue dans E_f, où E_f est un environnement fictif de dimension au moins égale au nombre n des générateurs de Kraus non nuls. Cet environnement est *initialement* dans un état de référence $|0\rangle_{E_f}$ et les systèmes A et E_f séparés. L'évolution ultérieure intrique A à E_f et l'état final du système A résulte d'une opération de mesure projective non lue sur E_f (voir la discussion des équations (4-5,-6,-7)). Nous avons changé la notation, remplaçant B par E_f pour ne pas confondre E_f, responsable fictif de l'évolution non unitaire de A, avec le système, non couplé à A, dont l'existence nous a permis d'établir la formule de Kraus. Noter également que E_f est un environnement fictif, a priori différent de l'environnement réel E responsable physique de l'évolution de A.

Deux remarques sur la décomposition de Kraus

Nombre de générateurs: Pour tout super-opérateur agissant sur un système A à N dimensions, il existe une forme de Kraus avec $n \leq N^2$ générateurs M_μ . On peut évidemment choisir une représentation de $\mathcal{L}_A \otimes I_B (|\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|)$ dans (5-14) incluant des états $|\Phi_\mu\rangle_{AB}$ non orthogonaux en nombre arbitraire. On peut alors avoir plus de N^2 termes dans la somme (5-18). (Nous reviendrons plus loin sur l'ambiguïté de cette décomposition). Le point important est qu'il existe toujours une expression du super-opérateur à nombre de termes égal ou inférieur à N^2 , indépendamment de la dimension (en général infinie) de l'environnement auquel A est couplé. Ce résultat est l'apport essentiel de l'approche de cette leçon. L'analyse usuelle de l'évolution d'un système ouvert, obtenue en prenant la trace sur le réservoir de l'état du système A+E conduit a priori à un nombre infini de générateurs M (leçon 1).

Exception à la forme de Kraus: Une mesure « lue » correspond à une transformation de l'opérateur densité qui n'a pas la forme de Kraus (voir eqs.(1-22) et (4-3)). Le super-opérateur correspondant n'est pas linéaire (à cause du terme de normalisation au dénominateur de ces expressions). La « réduction du paquet d'onde » correspondant à l'acquisition explicite d'une information (résultat « enregistré » de la mesure) est le cas (important) de transformation physique ne prenant pas la forme de Kraus.

Ambiguïté des générateurs de Kraus

Différents ensembles de générateurs de Kraus correspondent au même super-opérateur. Cette ambiguïté n'est pas surprenante, puisque les opérateurs densités sur lesquels agissent les super-opérateurs sont eux même multiformes (voir leçons 1 et 2). Il est tout d'abord évident que deux ensembles de générateurs (M_μ) et (N_ν) reliés par les relations réciproques:

$$N_\nu = \sum_\mu U_{\nu\mu} M_\mu ; \quad M_\mu = \sum_\nu U_{\mu\nu}^+ N_\nu \quad (5-19)$$

où U est une matrice unitaire quelconque décrivent le même super-opérateur. On a en effet:

$$\mathfrak{L}(\rho) = \sum_\mu M_\mu \rho M_\mu^+ = \sum_{\mu,\nu,\nu'} U_{\mu\nu}^+ N_\nu \rho U_{\nu,\mu} N_\nu^+ = \sum_\nu N_\nu \rho N_\nu^+ \quad (5-20)$$

Il n'est pas nécessaire que les deux ensembles (M_μ) et (N_ν) aient le même nombre d'éléments. On peut en effet compléter l'ensemble de cardinal le plus petit par des opérateurs nuls. Nous verrons dans la suite des exemples de super-opérateurs décrits par des formes de Kraus de cardinaux différents.

Réciproquement, deux représentations de Kraus du même super-opérateur sont toujours reliées entre elles par des expressions de la forme (5-19). Ce résultat général peut se démontrer à partir du théorème GHJW établi à la leçon 2. Nous le laissons ici comme exercice.

Nécessité d'une séparation initiale du système et de l'environnement pour définir un super-opérateur

Nous avons fait l'hypothèse de la séparation initiale de A et de l'environnement E. Nous avons défini l'opérateur densité de A et nous l'avons couplé à un environnement séparé de A à l'instant initial.

Si A et E sont initialement intriqués, l'état ultérieur de A ne dépend pas que de $\rho_A(0)$ et $\rho_E(0)$, mais aussi des corrélations initiales entre A et E contenues dans $\rho_{AE}(0)$. La notion de super-opérateur perd alors son sens. Illustrons ce point sur un exemple simple.

A et E sont deux qubits couplés par l'opérateur unitaire d'évolution dont l'action sur l'intervalle de temps t est définie par:

$$\begin{aligned} U_{AE} |0\rangle_A |0\rangle_E &= |0\rangle_A |0\rangle_E & ; U_{AE} |1\rangle_A |1\rangle_E &= |1\rangle_A |1\rangle_E \\ U_{AE} |0\rangle_A |1\rangle_E &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_E + |1\rangle_A |0\rangle_E) & ; U_{AE} |1\rangle_A |0\rangle_E &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_E - |1\rangle_A |0\rangle_E) \end{aligned} \quad (5-21)$$

L'évolution des états $|0\rangle_A |1\rangle_E$ et $|1\rangle_A |0\rangle_E$ est analogue à l'oscillation de Rabi en optique quantique (A :atome à deux niveaux et E: champ contenant 0 ou 1 photon); de façon plus exacte, (5-21) décrit le couplage de deux spins 1/2.

Nécessité d'une séparation initiale du système et de l'environnement (suite)

Supposons A et E initialement dépolarisés, avec des opérateurs densités:

$$\rho_A(0) = \frac{1}{2} (|0\rangle_{AA}\langle 0| + |1\rangle_{AA}\langle 1|) \quad ; \quad \rho_E(0) = \frac{1}{2} (|0\rangle_{EE}\langle 0| + |1\rangle_{EE}\langle 1|) \quad (5-22)$$

Cette condition initiale ne correspond pas pour E à un cas pur, contrairement à ce que nous avons admis plus haut. Le point essentiel ici est que l'état initial (5-22) peut être réalisé soit avec deux systèmes séparés:

$$\rho_{AE}(0) = \rho_A(0)\rho_E(0) \quad (5-23)$$

soit avec 2 systèmes intriqués dans un état de Bell, par exemple:

$$|\Psi(0)\rangle_{AE} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_E + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_E) \quad (5-24)$$

On montrera en exercice que dans le premier cas, on trouve $\rho_{AE}(t) = I_A/2$ et dans le second $\rho_{AE}(t) = |0\rangle_A \langle 0|$. Ainsi l'état final du qubit A ne dépend pas seulement de son état initial et de celui de E, mais aussi des corrélations initiales entre ces deux systèmes. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.

6.

Exemples de super-opérateurs: évolution générale d'un qubit.

Exemple simple de décomposition de Kraus: l'évolution la plus générale d'un qubit: modèles simples de décohérence pour un système à deux niveaux.

Super-opérateurs élémentaires pour un qubit

Description de l'évolution d'un spin couplé à un environnement ou d'un porteur élémentaire d'information transporté par une « canal » en présence de bruit.

Les opérateurs de Kraus M_μ sont des superpositions de I et des matrices de Pauli. Considérons tout d'abord quelques super-opérateurs élémentaires et leur interprétation physique. En combinant I avec σ_x , σ_y ou σ_z , on peut former les trois super-opérateurs (où p a le sens d'une probabilité-voir plus loin):

$$\mathcal{L}_i(\rho) = (1-p)\rho + p\sigma_i\rho\sigma_i \quad (i = x, y, z) \quad (6-1)$$

ayant chacun deux générateurs hermitiques satisfaisant la relation de complétude:

$$M_0^i = \sqrt{1-p} I; \quad M_1^i = \sqrt{p} \sigma_i \quad \text{avec} \quad (M_0^i)^2 + (M_1^i)^2 = I \quad (6-2)$$

Envisageons les trois transformations correspondant à $i = x, z$ et y .

Le basculement de bit (« bit flip » $i = x$):

On a alors:

$$X\rho X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix} ; \mathcal{E}_x(\rho) = (1-p)\rho + pX\rho X = \begin{pmatrix} (1-p)\rho_{00} + p\rho_{11} & (1-p)\rho_{01} + p\rho_{10} \\ (1-p)\rho_{10} + p\rho_{01} & (1-p)\rho_{11} + p\rho_{00} \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

On peut donner de cette transformation une représentation unitaire (mesure généralisée) avec un environnement constitué d'un qubit E:

$$U_{AE}|a\rangle_A \otimes |0\rangle_E = \sqrt{1-p}|a\rangle_A \otimes |0\rangle_E + \sqrt{p}|a \oplus 1\rangle_A \otimes |1\rangle_E \quad (a = 0,1) \quad (6-4)$$

La mesure de l'environnement laisse le qubit inchangé (E trouvé dans 0 avec la probabilité $1-p$) ou le fait basculer (E trouvé dans 1 avec la probabilité p).

Représentation géométrique du basculement de bit

En utilisant les relations:

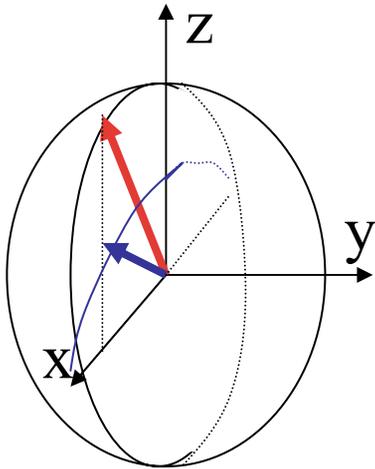
$$XIX = I; \quad X\sigma_x X = \sigma_x; \quad X\sigma_y X = -\sigma_y; \quad X\sigma_z X = -\sigma_z \quad (6-5)$$

on montre:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \left(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right) \xrightarrow{\mathbb{f}_x} \frac{1-p}{2} \left(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right) + \frac{p}{2} \left(I + n_x \sigma_x - n_y \sigma_y - n_z \sigma_z \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(I + n_x \sigma_x + (1-2p)n_y \sigma_y + (1-2p)n_z \sigma_z \right) \quad (6-6) \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{f}_x} \begin{pmatrix} n_x & (1-2p)n_y & (1-2p)n_z \end{pmatrix} \quad (6-7)$$



Transformation affine du vecteur de Bloch: sa composante x reste invariante et les composantes y et z sont contractées de $(1-2p)$. Un cas pur (extrémité du vecteur de Bloch sur la sphère de Bloch) devient un mélange (extrémité dans la sphère). La sphère de Bloch se contracte selon un ellipsoïde de révolution d'axe Ox .

Pour $p = 1$, le vecteur de Bloch est réfléchi par rapport à Ox

Le basculement de phase (« phase flip » $i=z$):

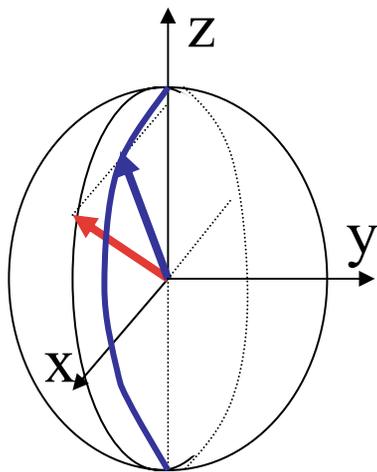
$$Z\rho Z = \begin{pmatrix} \rho_{00} & -\rho_{01} \\ -\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} ; \mathfrak{E}_z(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-2p)\rho_{01} \\ (1-2p)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (6-8)$$

Représentation unitaire avec un qubit E:

$$U_{AE} \left[\frac{|0\rangle_A \pm |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \right] \otimes |0\rangle_E = \sqrt{1-p} \left[\frac{|0\rangle_A \pm |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \right] \otimes |0\rangle_E + \sqrt{p} \left[\frac{|0\rangle_A \mp |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \right] \otimes |1\rangle_E \quad (6-9)$$

Suivant que E est mesuré dans l'état 0 (avec la probabilité $1-p$) ou dans 1 (probabilité p) les états propres de X restent invariants ou s'échangent.

Représentation géométrique du basculement de phase:



$$\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathfrak{E}_z} \begin{pmatrix} (1-2p)n_x & (1-2p)n_y & n_z \end{pmatrix} \quad (6-10)$$

Affinité du vecteur de Bloch dans le plan xOy: la composante z reste invariante et les deux composantes x et y sont contractées de $(1-2p)$. La sphère de Bloch devient un ellipsoïde de révolution d'axe Oz. Pour $p=1$, il s'agit de la réflexion par rapport à Oz.

Combinaison des basculements de bit et de phase ($i=y$):

L'opérateur Y est le produit des opérateurs X et Z (à un facteur i près, voir leçon 1). Le super-opérateur de générateur Y est donc une combinaison des deux types de basculement précédemment étudiés:

$$Y\rho Y = XZ\rho ZX = \begin{pmatrix} \rho_{11} & -\rho_{10} \\ -\rho_{01} & \rho_{00} \end{pmatrix} ;$$

$$\mathfrak{L}_y(\rho) = (1-p)\rho + pY\rho Y = \begin{pmatrix} (1-p)\rho_{00} + p\rho_{11} & (1-p)\rho_{01} - p\rho_{10} \\ (1-p)\rho_{10} - p\rho_{01} & (1-p)\rho_{11} + p\rho_{00} \end{pmatrix} \quad (6-11)$$

Trouver une représentation unitaire en exercice. Montrer qu'il s'agit d'une affinité du vecteur de Bloch dans le plan xOz .

La sphère de Bloch devient un ellipsoïde de révolution d'axe Oy .

Addition symétrique des trois types de basculement: dépolarisation du qubit.

On choisit les 4 opérateurs: $M_0 = \sqrt{1-p}I; M_i = \sqrt{\frac{p}{3}}\sigma_i$ qui vérifient $M_0^2 + \sum_i M_i^2 = 1$

$$\mathfrak{L}_{dep}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z) \quad (6-12)$$

La transformation laisse le qubit invariant avec la probabilité $(1-p)$ et lui fait subir avec des probabilités égales $p/3$ les trois basculements décrits plus haut. On constate à partir des equs (6-3), (6-8) et (6-11) que $X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z = 2I - \rho$. En effectuant ce remplacement dans (6-12), on écrit cette transformation sous une forme équivalente exprimant que le qubit est remplacé par **un état complètement dépolarisé** avec la probabilité $4p/3$, et laissé inchangé avec la probabilité complémentaire (interprétation en terme de probabilité valable pour $p < 3/4$):

$$\mathfrak{L}_{dep}(\rho) = \left(1 - \frac{4p}{3}\right)\rho + \frac{4p}{3} \frac{I}{2} \quad (6-13)$$

Représentation géométrique: l'équation (6-13) s'écrit également:

$$\mathfrak{L}_{dep}(\rho) = \frac{1}{2} \left(I + \left(1 - \frac{4p}{3}\right) \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right) \quad \text{soit:} \quad \vec{n} \xrightarrow{\mathfrak{L}_{dep}} \left(1 - \frac{4p}{3}\right) \vec{n} \quad (6-14)$$

Contraction isotrope du vecteur de Bloch.

Exemple d'ambivalence de la décomposition de Kraus

Le basculement de phase d'un qubit, décrit par l'équation (6-8) peut être vu comme résultant d'une évolution unitaire couplant A à un autre qubit E (equ. (6-9)). Le même super-opérateur peut aussi être interprété comme résultant de l'évolution unitaire de A couplé à un système à 3 états 0,1,2 (qutrit E') suivant les équations:

$$\begin{aligned}U_{AE'}|0\rangle_A \otimes |0\rangle_{E'} &= \sqrt{1-p'}|0\rangle_A \otimes |0\rangle_{E'} + \sqrt{p'}|0\rangle_A |1\rangle_{E'}, \\U_{AE'}|1\rangle_A \otimes |0\rangle_{E'} &= \sqrt{1-p'}|1\rangle_A \otimes |0\rangle_{E'} + \sqrt{p'}|1\rangle_A |2\rangle_{E'}\end{aligned}\quad (6-15)$$

Avec la probabilité $1-p'$ il ne se passe rien, alors qu'avec la probabilité p' , le qubit A induit, sans lui-même subir de transition, un « processus de diffusion » qui porte E' dans des états orthogonaux 1 et 2 différents suivant que A est dans 0 ou 1. Il y a à présent 3 générateurs de Kraus donnés par simple inspection de (6-15):

$$N_0 = \sqrt{1-p'}I; N_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p'} \end{pmatrix} \text{ avec } N_0^2 + N_1^2 + N_2^2 = I \quad (6-16)$$

Ambivalence de la décomposition de Kraus (suite)

Ces générateurs correspondent à une évolution:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p')\rho + p'N_1\rho N_1 + p'N_2\rho N_2 = \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p')\rho_{01} \\ (1-p')\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (6-17)$$

qui est bien identique au basculement de phase donné par l'équation (6-8) avec $p'=2p$. Les deux familles de générateurs de Kraus:

$$\{\sqrt{1-p}I, \sqrt{p}Z\} \text{ et } \{\sqrt{1-2p}I, \sqrt{2p}|0\rangle\langle 0|, \sqrt{2p}|1\rangle\langle 1|\} \quad (6-18)$$

correspondent ainsi (pour $p \leq 1/2$) au même super-opérateur (trouver en exercice l'opération unitaire les transformant l'une dans l'autre). Noter qu'il s'agit d'un exemple où le même super-opérateur peut être représenté par des opérateurs de Kraus en nombres différents (2 ou 3).

Ambivalence de la décomposition de Kraus (fin)

Nous venons d'interpréter la décohérence d'un qubit en le couplant à un qutrit E pour avoir dans l'environnement un état neutre ($|0\rangle_E$) et 2 états finals de diffusion différents ($|1\rangle_E$ et $|2\rangle_E$) associés aux états 0 et 1 du qubit. En fait, la diffusion peut se décrire à l'aide d'un simple qubit E''. Considérons la représentation unitaire:

$$U'_{AE''} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_{E''} = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_{E''} \quad ; \quad U'_{AE''} |1\rangle_A \otimes |0\rangle_{E''} = \sqrt{1-q} |1\rangle_A \otimes |0\rangle_{E''} + \sqrt{q} |1\rangle_A \otimes |1\rangle_{E''} \quad (6-19)$$

L'environnement ne change pas si le qubit A est dans l'état 0 et il a une probabilité q de basculer vers l'état $|1\rangle_{E''}$ si A est dans l'état 1. Les opérateurs de Kraus sont maintenant:

$$N'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-q} \end{pmatrix}; N'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad N_0'^2 + N_1'^2 = 1 \quad (6-20)$$

et un calcul simple donne:

$$\mathfrak{L}(\rho) = N'_0 \rho N'_0 + N'_1 \rho N'_1 = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \sqrt{1-q} \rho_{01} \\ \sqrt{1-q} \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (6-21)$$

Le super-opérateur est identique à (6-8) et (6-17) avec $(1-q)^{1/2} = 1-p' = 1-2p$:

$$N'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2p \end{pmatrix}; N'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p'(2-p')} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{p(1-p)} \end{pmatrix} \quad (6-22)$$

Nous avons ainsi une 3ème représentation équivalente du même processus.

Basculement de phase ou décohérence? deux interprétations du même phénomène

Les équations (6-9) d'une part, (6-15) et (6-19) d'autre part décrivent donc le même phénomène, la perte de cohérence entre les états 0 et 1 du qubit, alors que les probabilités de le trouver dans chacun de ces états sont non affectées. Deux interprétations différentes sont ainsi possibles. Dans l'une (eq.(6-9)) le qubit subit des sauts quantiques entre les états $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$, dans l'autre (eqs (6-15) ou (6-19), il induit, sans changer d'état, des transitions dans l'environnement E, qui dépendent de l'état dans lequel il se trouve. Cette information, disséminée dans E, détruit la cohérence entre les états du système, suivant un processus de complémentarité étudié dans les cours précédents et qui apparaît ici sous son aspect le plus simple.

Les deux mécanismes semblent *a priori* différents. Le saut de phase apparaît comme un processus de basculement entre deux états discrets, superposition des états 0 et 1, alors que la fuite d'information dans l'environnement sans transition du système ressemble plus à un processus continu de diffusion de phase. En fait il s'agit du même effet physique. Si l'on sait corriger les erreurs associées au basculement de phase d'un qubit, on aura *ipso facto* corrigé sa décohérence. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Modèle simple d'émission spontanée d'un qubit

Le basculement du qubit généré par l'opérateur X est symétrique (transitions $0 \rightarrow 1$ et $1 \rightarrow 0$). Considérons maintenant un basculement asymétrique (saut $0 \rightarrow 1$ seul). C'est le cas de l'émission spontanée d'un atome à 2 niveaux de l'état excité vers l'état fondamental. Pour construire le super-opérateur correspondant, considérons la représentation unitaire impliquant un qubit E schématisant le champ de rayonnement ($|0\rangle_E$ et $|1\rangle_E$ représentent des états à 0 et 1 photon respectivement):

$$U_{AE}|0\rangle_A \otimes |0\rangle_E = \sqrt{1-p}|0\rangle_A \otimes |0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_A \otimes |1\rangle_E \quad ; \quad U_{AE}|1\rangle_A \otimes |0\rangle_E = |1\rangle_A \otimes |0\rangle_E \quad (6-25)$$

On en déduit les générateurs de Kraus:

$$M_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_0^2 + M_1^+ M_1 = 1 \quad (6-26)$$

et le super-opérateur d'émission spontanée \mathcal{E}_{es} :

$$\mathcal{E}_{es}(\rho) = M_0 \rho M_0 + M_1 \rho M_1^+ = \begin{pmatrix} (1-p)\rho_{00} & \sqrt{1-p}\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & \rho_{11} + p\rho_{00} \end{pmatrix} \quad (6-27)$$

On montrera que le vecteur de Bloch subit une contraction anisotrope et une translation:

$$\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{E}_{es}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-p} n_x & \sqrt{1-p} n_y & (1-p) n_z - p \end{pmatrix} \quad (6-28)$$

Conclusions de la troisième leçon

Nous avons établi, à partir d'une expérience de pensée à la EPR, la forme universelle que doit satisfaire le super-opérateur décrivant une transformation quelconque de l'opérateur densité d'un système physique appartenant à un espace de dimension finie.

Ce super-opérateur peut se mettre de multiples façons sous la forme d'une somme de termes (somme de Kraus), chacun étant associé à un opérateur générateur de la transformation. L'action du super-opérateur peut s'interpréter comme un processus de mesure généralisée non lue du système, en faisant intervenir un système auxiliaire jouant le rôle d'un environnement dans lequel une mesure projective est effectuée.

Les diverses opérations quantiques sur un qubit unique ont été analysées en détail pour illustrer la théorie générale. L'existence de formes équivalentes de la décomposition de Kraus a été soulignée sur cet exemple simple. L'ambivalence des interprétations physiques possibles pour un même processus de décohérence du système a été analysée en détails.