

9.

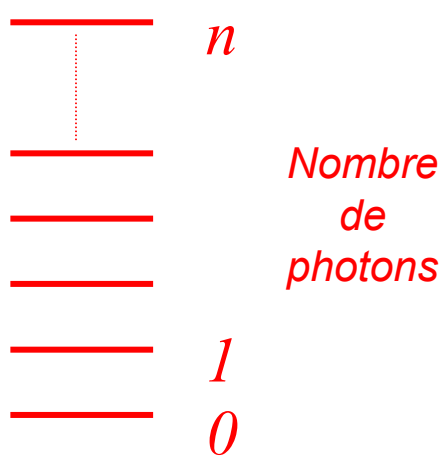
Evolution d'états cohérents et d'états de Fock du rayonnement.

Equation pilote sous la forme de Lindblad pour un mode du champ couplé à un environnement en équilibre thermodynamique. Evolution d'un état de Fock à $T=0K$ et $T>0K$. Trajectoires stochastiques et leur moyenne.

Evolution d'un état cohérent couplé à un environnement à $T=0K$: trajectoire unique et non intrication avec l'environnement. Interprétation physique de ces propriétés classiques de l'état cohérent.

«Mesures homodynes» associées à des formes de Lindblad différentes de l'équation pilote.

Rappels sur la description d'un mode du champ (cours 2001-2002 et 2002-2003)



Opérateurs d'annihilation et de création de photons:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad ; \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (9-1a)$$

$$[a, a^+] = 1 \quad (9-1b)$$

Hamiltonien du mode:
$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad (9-2)$$

Etat cohérent (loi de Poisson pour la distribution du nombre de photons):

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha) |n\rangle \quad ; \quad C_n(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad ; \quad \bar{n} = |\alpha|^2 \text{ et } \Delta n = \sqrt{\bar{n}} = |\alpha| \quad (9-3)$$

Les états cohérents sont états propres de a :
$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (9-4)$$

Evolution libre d'un état cohérent pour un mode isolé (pas d'amortissement):

$$|\alpha(t)\rangle = U(t,0)|\alpha\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\alpha\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (9-5) \quad \textit{Rotation de la phase dans le plan de Fresnel}$$

Représentation unitaire de l'équation pilote décrivant la relaxation d'un oscillateur harmonique

Nous cherchons à établir l'équation pilote générale décrivant le couplage d'un oscillateur harmonique de fréquence ω avec un environnement en équilibre thermodynamique. Pour fixer les idées nous supposerons qu'il s'agit d'un mode du champ dans une cavité couplé aux modes extérieurs par transmission ou diffusion des miroirs.

Commençons par décrire une représentation unitaire de l'évolution infinitésimale du système, supposé couplé à un environnement fictif E_f . Nous pouvons considérer que E_f est initialement décrit par un état pur $|0\rangle_{E_f}$. L'oscillateur peut soit perdre de l'énergie, ce qui correspond à une annihilation de photons (opérateur a), soit gagner de l'énergie ce qui correspond à une création de photons (a^+). Il faut donc considérer *a priori* deux opérateurs de saut et deux états fictifs de l'environnement $|1+\rangle_{E_f}$ et $|1-\rangle_{E_f}$, orthogonaux entre eux et à $|0\rangle_{E_f}$. Associant aux sauts décrits par a et a^+ des poids respectifs Γ et Γ' , on obtient la représentation unitaire de la transformation infinitésimale:

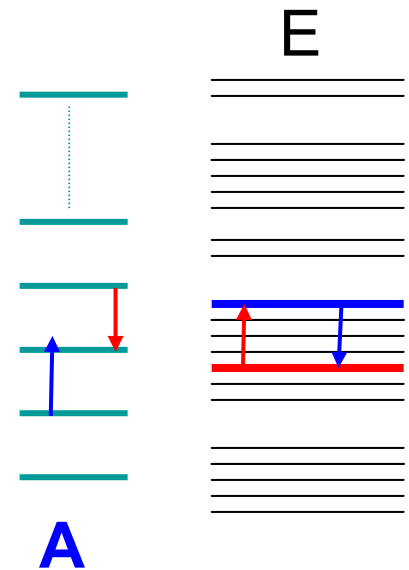
$$U_{AE_f}(\tau)|\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_{E_f} = \left[1_A - \frac{i}{\hbar} H\tau - \frac{\Gamma\tau}{2} a^+ a - \frac{\Gamma'\tau}{2} a a^+ \right] |\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_{E_f} + \sqrt{\Gamma\tau} (a|\varphi\rangle_A) \otimes |1+\rangle_{E_f} + \sqrt{\Gamma'\tau} (a^+|\varphi\rangle_A) \otimes |1-\rangle_{E_f} \quad (9-6)$$

Equation de Lindblad pour un mode du champ

On en déduit l'équation de Lindblad où le 1er terme décrit l'évolution libre du champ, le 2ème la perte de photons et le 3ème l'émission de photons par l'environnement:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] - \frac{\Gamma}{2} (a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a - 2a \rho a^\dagger) - \frac{\Gamma'}{2} (a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger - 2a^\dagger \rho a) \quad (9-7)$$

Pour fixer Γ/Γ' , supposons que l'environnement réel E est un grand réservoir en équilibre thermodynamique à une température T . Γ et Γ' dépendent alors de T . Tout processus de perte de photons s'accompagne d'une excitation du réservoir à partir d'un état inférieur vers un état supérieur (flèches rouges) alors que tout processus de gain de photon s'accompagne d'une désexcitation du réservoir d'un état supérieur vers un état inférieur (flèches bleues). Le rapport des taux de ces deux processus est celui des populations des niveaux initiaux du réservoir, soit:



$$\frac{\Gamma'(T)}{\Gamma(T)} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \quad (9-8)$$

et l'évolution est complètement déterminée par $\Gamma(T)$ et T .

Equation pilote en représentation d'interaction

On passe en représentation d'interaction pour éliminer l'évolution triviale due à H en définissant:

$$\tilde{\rho} = U^+(t)\rho U(t) = e^{iHt/\hbar} \rho e^{-iHt/\hbar} \quad (9-9)$$

et on obtient l'équation décrivant l'évolution due à la seule dissipation:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = & -\frac{\Gamma}{2} (a^+ a \tilde{\rho} + \tilde{\rho} a^+ a - 2a \tilde{\rho} a^+) \\ & - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \frac{\Gamma}{2} (a a^+ \tilde{\rho} + \tilde{\rho} a a^+ - 2a^+ \tilde{\rho} a) \end{aligned} \quad (9-10)$$

Pour établir cette équation, on utilise les relations:

$$e^{iHt/\hbar} a e^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega t} a \quad ; \quad e^{iHt/\hbar} a^+ e^{-iHt/\hbar} = e^{i\omega t} a^+ \quad (9-11)$$

Comme a et a^+ apparaissent ensemble en produit dans l'équation pilote, les termes de cette équation sont indépendants de t en représentation d'interaction. La première ligne de (9-10) décrit la fuite de photons vers l'environnement et la seconde décrit, pour $T > 0$, l'arrivée de photons thermiques dans le mode provenant de l'environnement.

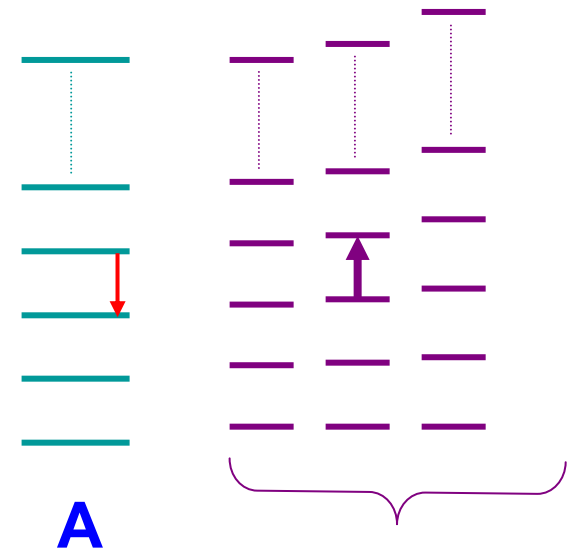
Nous avons établi (9-10) à partir de considérations générales, comme une équation pilote possible pour un oscillateur. En optique quantique, on arrive à cette équation à partir d'un traitement du couplage oscillateur environnement dans le cadre de l'approximation du champ tournant (voir cours 2002-2003).

Environnement constitué d'un continuum de modes du champ en équilibre thermodynamique

Si l'environnement réel de l'oscillateur A est un continuum d'oscillateurs en équilibre thermodynamique, on peut expliciter la dépendance en T du taux de relaxation Γ . Toute désexcitation de A s'accompagne de l'excitation d'un mode de E. La probabilité de cette excitation contient un terme spontané et un terme stimulé proportionnel au nombre moyen de photons thermiques présents dans chaque mode, soit, d'après la loi de Planck:

$$\Gamma(T) = [1 + \bar{n}(T)]\Gamma_0 = \left[1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\right]\Gamma_0 = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}}\Gamma_0 \quad (9-12)$$

où Γ_0 est le taux de relaxation du mode à $T=0K$. La relaxation de A est alors entièrement déterminée par les paramètres Γ_0 , ω et T .



Oscillateurs de E dont les niveaux excités sont à l'équilibre peuplés suivant la loi de Planck

Sauts quantiques d'un état de Fock (T=0)

Envisageons des trajectoires stochastiques correspondant à quelques situations simples. Nous nous plaçons en représentation d'interaction, qui élimine l'évolution libre (triviale) du champ. Commençons par un environnement à $T=0K$. L'équation pilote s'écrit:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{\Gamma_0}{2} (a^+ a \tilde{\rho} + \tilde{\rho} a^+ a) + \Gamma_0 a \tilde{\rho} a^+ \quad (9-13)$$

Probabilité d'absence de saut quantique dans un pas élémentaire:

$$p_0(\tau) = 1 - \Gamma_0 \tau \langle \varphi | a^+ a | \varphi \rangle = 1 - \langle n \rangle \Gamma_0 \tau \quad (9-14)$$

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{p_0(\tau)}} \left(|\varphi\rangle - \frac{\Gamma_0 \tau}{2} a^+ a |\varphi\rangle \right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{p_0(\tau)}} e^{-\frac{\Gamma_0 \tau}{2} a^+ a} |\varphi\rangle \quad (9-15) \end{aligned}$$

Un état de Fock initial reste invariant:

$$|n_0\rangle \rightarrow |n_0\rangle \quad (9-16)$$

En absence de saut, l'état de Fock, état propre de J, ne change pas.

Probabilité de saut quantique pendant un pas élémentaire:

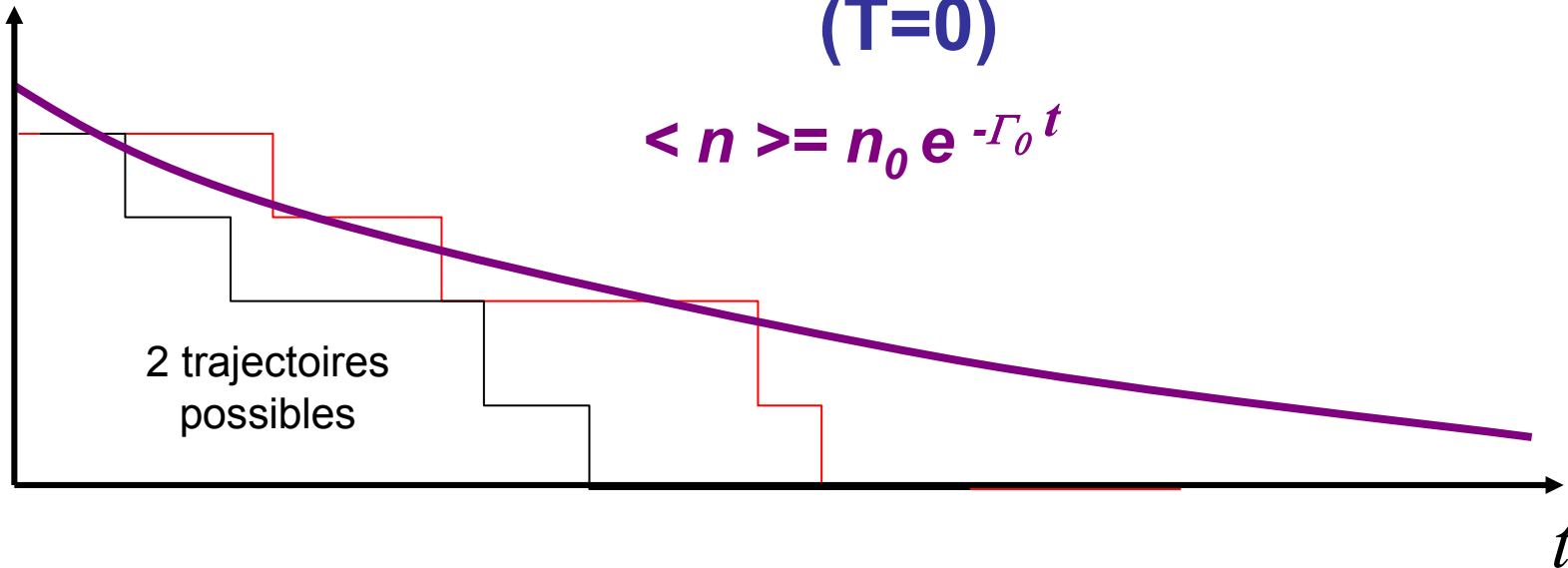
$$p_1(\tau) = \Gamma_0 \tau \langle \varphi | a^+ a | \varphi \rangle = \langle n \rangle \Gamma_0 \tau \quad (9-17)$$

$$|\varphi\rangle \rightarrow \frac{\sqrt{\Gamma_0 \tau} a |\varphi\rangle}{\sqrt{p_1(\tau)}} \quad (9-18)$$

Un saut (émission de photon dans l'environnement) fait effectuer au champ la transition:

$$|n_0\rangle \rightarrow |n_0-1\rangle \quad (9-19)$$

Trajectoires Monte Carlo pour un état de Fock initial ($T=0$)



Trajectoires en marches d'escalier. Dispersion du nombre de photon pour t fini. Reconstruction en moyenne de la décroissance exponentielle de l'énergie du champ. L'équation pilote pour la probabilité d'avoir n photons s'écrit d'après (9-13):

$$\frac{d\tilde{\rho}_{nn}}{dt} = -\Gamma_0 n \tilde{\rho}_{nn} + \Gamma_0 (n+1) \tilde{\rho}_{n+1,n+1} \quad (9-20)$$

et le nombre moyen de photons évolue suivant une loi exponentielle de taux Γ_0 :

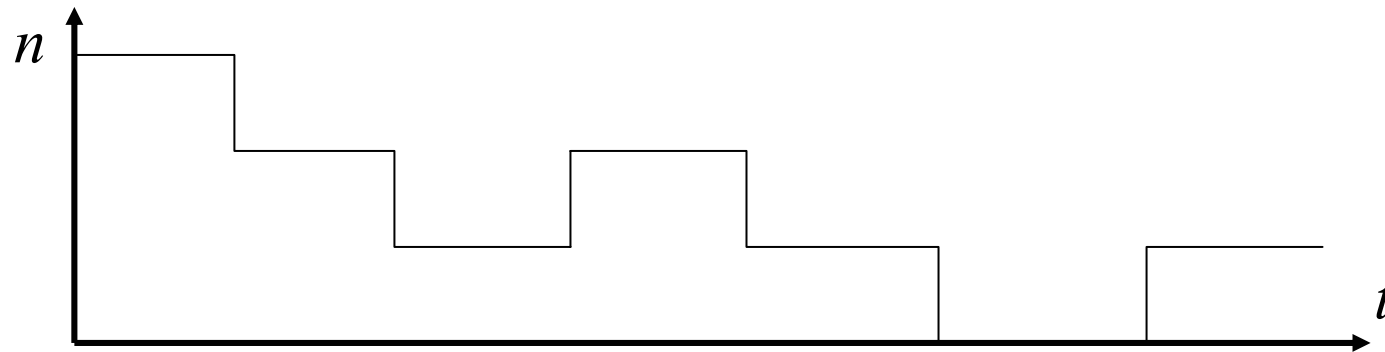
$$\begin{aligned} \frac{d\langle n \rangle}{dt} &= \sum_n n \frac{d\tilde{\rho}_{nn}}{dt} = -\Gamma_0 \sum_n n^2 \tilde{\rho}_{nn} + \Gamma_0 \sum_n n(n+1) \tilde{\rho}_{n+1,n+1} \\ &= -\Gamma_0 \sum_n n^2 \tilde{\rho}_{nn} + \Gamma_0 \sum_n (n-1)n \tilde{\rho}_{n,n} = -\Gamma_0 \sum_n n \tilde{\rho}_{nn} = -\Gamma_0 \langle n \rangle \quad (9-21) \end{aligned}$$

Evolution d'un état de Fock initial ($T > 0K$)

L'équation pilote est alors donnée par (9-10). Il y a deux opérateurs de saut (a et a^+). En absence de saut, l'évolution d'un état $|\varphi\rangle$ du champ s'écrit:

$$|\varphi\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p_0(\tau)}} \left(|\varphi\rangle - \left(\frac{\Gamma\tau}{2} a^+ a + \frac{\Gamma'\tau}{2} a a^+ \right) |\varphi\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{p_0(\tau)}} \left(\left(I - \frac{\Gamma\tau}{2} \right) |\varphi\rangle - \frac{(\Gamma + \Gamma')\tau}{2} a^+ a |\varphi\rangle \right) \quad (9-22)$$

où la relation de commutation $[a, a^+] = 1$ permet de passer de la 1ère expression à la 2ème. Il en résulte qu'un état de Fock, état propre de $a^+ a$, n'évolue toujours pas en absence de saut. En cas de saut, le champ peut maintenant effectuer aussi bien des transitions $n \rightarrow n-1$ (perte de photon) que $n \rightarrow n+1$ (diffusion de photon thermique de l'environnement vers le mode). Le champ reste un état de Fock et les trajectoires sont maintenant du type ci-dessous:



On montre qu'après un temps $t \gg 1/\Gamma, 1/\Gamma'$, le nombre de photons fluctue autour de la moyenne thermodynamique (loi de Planck):

$$\bar{n} = \left[e^{\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)} - 1 \right]^{-1} \quad (9-23)$$

Trajectoire d'un champ cohérent (T= 0K)

Revenons à $T=0K$ et considérons maintenant un champ initial cohérent:

Pas de saut avec probabilité:

$$p_0(\tau) = 1 - \Gamma_0 \tau \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle = 1 - |\alpha|^2 \Gamma_0 \tau \quad (9-24)$$

$$|\alpha\rangle \rightarrow \frac{|\alpha\rangle - \frac{\Gamma_0 \tau}{2} a^+ a |\alpha\rangle}{\sqrt{p_0(\tau)}} \propto \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(1 - n \frac{\Gamma_0 \tau}{2}\right) |n\rangle \quad (9-25)$$

Saut avec probabilité:

$$p_1(\tau) = |\alpha|^2 \Gamma_0 \tau \quad (9-26)$$

$$|\alpha\rangle \rightarrow \frac{a|\alpha\rangle}{\sqrt{p_1(\tau)}} = |\alpha\rangle \quad (9-27)$$

A l'inverse de l'état de Fock, l'état cohérent n'évolue qu'en absence de saut et reste invariant quand un saut se produit (voir discussion de ce comportement paradoxal pages suivantes). Appelons t_1 l'instant du premier saut. Le nombre de pas correspondant est t_1/τ . L'état initial a évolué jusqu'à t_1 suivant:

$$|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha(t_1)\rangle \propto \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(1 - n \frac{\Gamma_0 \tau}{2}\right)^{\frac{t_1}{\tau}} |n\rangle = \sum_n \frac{(\alpha e^{-\Gamma_0 t_1/2})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (9-28)$$

L'état reste cohérent jusqu'à t_1 , son amplitude décroissant exponentiellement entre 0 et t_1 . Le saut à cet instant ne modifie pas l'état. Une 2ème phase sans saut de durée t_2 lui succède, pendant laquelle l'état reste toujours cohérent son amplitude devenant $\alpha \exp[-\Gamma(t_1+t_2)/2]$ etc... Le champ reste donc cohérent avec une amplitude exponentiellement amortie et ne subit aucune discontinuité. **Une seule trajectoire et le champ reste dans un état pur non intriqué avec E:**

$$|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-\Gamma_0 t/2}\rangle \quad (9-29)$$

Expliquer l'amortissement d'un état cohérent

Intuitivement, on comprend l'amortissement d'un état de Fock: l'énergie du champ est constante tant que E ne change pas (pas de photon détecté). Elle décroît par sauts discrets au fur et à mesure que les photons qui s'échappent du système sont comptés. Cette image est valable quand le champ peut être décrit comme un ensemble de particules en nombre initial bien défini.

Pour un état initial cohérent, le nombre de photons est incertain et cette interprétation est fautive. Le formalisme montre que l'énergie moyenne du champ ne change pas quand des photons se perdent. Elle ne décroît que pendant les intervalles de temps où on est sûr qu'aucun photon ne s'est échappé! Ce comportement paradoxal est responsable de la propriété classique de la relaxation du champ: il évolue sans s'intriquer avec son environnement, son amplitude suivant une loi de décroissance exponentielle d'oscillateur amorti.

Pour résoudre ce paradoxe, notons que l'état du champ est un objet mathématique contenant l'information permettant de faire des prédictions sur des résultats d'observations. Après une mesure de E , l'information que l'on a sur A est modifiée par la connaissance du résultat de la mesure. Ce résultat peut être un changement d'état de E (détection d'un photon émis). Il peut aussi être le constat d'un non-changement de E (pas de photon émis), ce qui est aussi une information susceptible de modifier la connaissance du système (voir page suivante).

Non-évolution d'un état cohérent dans un saut

L'invariance de l'état cohérent au cours d'un saut résulte du fait qu'il est état propre de l'opérateur de saut a :

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \xrightarrow{\text{saut}} |\varphi\rangle_{\text{après}} = \frac{a|\alpha\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle}} = \frac{1}{|\alpha|} \sum_n \sqrt{n} C_n |n-1\rangle \quad (9-30)$$

et l'identité, déduite de (9-3):

$$\frac{1}{|\alpha|} \sqrt{n} C_n = C_{n-1} \quad (9-31)$$

fait que l'état ne change pas, même si chaque composante perd 1 quantum. En fait, deux effets se compensent. D'une part, chaque terme de la superposition perd un photon. *Si la probabilité de perte était indépendante de n* , ceci conduirait à une diminution de l'énergie moyenne du champ. D'autre part, la probabilité de perte étant proportionnelle à n (effet d'émission stimulée), le fait qu'un quantum ait été émis augmente *la probabilité a posteriori que le champ contenait avant le saut un nombre de photons plus grand que sa moyenne*.

Appelant P_n la probabilité inconditionnelle d'avoir n photons dans l'état cohérent et P'_n celle qu'il y ait eu n photons *avant l'émission constatée d'un photon*, on a:

$$P_n = |C_n|^2 \quad ; \quad P'_n = \frac{n}{|\alpha|^2} P_n > P_n \quad \text{si} \quad n > \bar{n} = |\alpha|^2 \quad (9-32)$$

L'information apportée par le saut favorise les grands n . Cet effet de probabilité conditionnelle compense la diminution du nombre de photons et l'état du champ ne change pas!

L'émission d'un photon peut même augmenter le nombre moyen de photon dans un champ!

La modification de l'état due à une acquisition d'information liée à la détection d'un photon émis par le champ peut même, dans certains cas, l'emporter sur l'effet direct de perte de photon et conduire à une augmentation du nombre moyen de photons. Considérons l'effet d'un saut quantique sur l'état non classique:

$$|\varphi\rangle_0 = \sqrt{1-\varepsilon}|0\rangle + \sqrt{\varepsilon}|n\rangle \quad (9-33)$$

qui contient un nombre moyen de photons $\langle n \rangle = \varepsilon n \ll n$ si $\varepsilon \ll 1$.

Immédiatement après un saut (qui se produit avec la probabilité $\varepsilon n \tau$ pendant un intervalle de temps τ), cet état se projette sur $|n-1\rangle$. Le nombre moyen de photons passe ainsi de εn à $n-1 \gg \varepsilon n$, bien que le système ait perdu de l'énergie au cours du saut. Ceci se produit bien sûr avec une faible probabilité et en moyenne, l'énergie est évidemment conservée.

Notons qu'il s'agit d'un effet de probabilité conditionnelle somme toute trivial, même s'il peut apparaître paradoxal. Il s'apparente au dicton « *on ne prête qu'aux riches* ». *Constater qu'un champ a pu perdre de l'énergie exclut la possibilité qu'il n'en ait pas eu avant le processus et élimine donc l'alternative que le champ soit dans l'état vide.*

Expliquer l'amortissement d'un champ cohérent en absence d'émission de photon

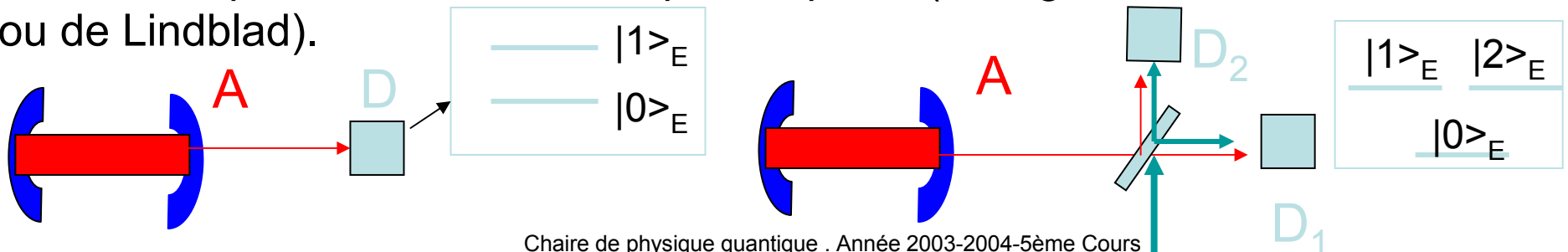
Un état cohérent perd de l'énergie pendant les phases où aucun photon n'est détecté dans E. C'est encore un effet conditionnel d'acquisition d'information. L'équ(9-25) montre qu'après un intervalle τ de non-émission, l'amplitude d'avoir n photons est réduite d'autant plus que n est plus grand. Ainsi, le fait de ne pas détecter de photon donne une indication modifiant les probabilités à priori en faveur des faibles nombres de photons. Plus le temps passe sans «clic», plus il est probable que le champ initial contenait peu de quanta. En fait, tout champ cohérent a une probabilité (exponentiellement faible) d'être vide ($P_0 = \exp(-|\alpha|^2) = \exp(-\langle n \rangle) \neq 0$). Dans le cas (peu probable) où on constate l'absence de photon pendant un temps long devant $1/\Gamma_0$, on en conclut que le champ est vide. L'absence d'émission conduit, continûment et sans saut, d'un état cohérent de grand nombre moyen de photons vers le vide! Noter l'analogie avec l'émission spontanée d'une superposition d'états atomiques (leçon précédente).

Reprenant l'exemple frappant d'une superposition de 0 et n photons (en favorisant maintenant la composante à n photons dans l'état initial), on voit que l'absence de saut conduit exponentiellement le champ vers le vide suivant:

$$|\varphi\rangle_1 = \sqrt{\varepsilon}|0\rangle + \sqrt{1-\varepsilon}|n\rangle \xrightarrow{\text{pas de saut}} \frac{\sqrt{\varepsilon}|0\rangle + \sqrt{1-\varepsilon} e^{-n\Gamma t/2}|n\rangle}{\sqrt{\varepsilon + (1-\varepsilon)e^{-n\Gamma t}}} \quad (9-34)$$

Interprétations de l'équation pilote du champ (T=0K)

Nous avons interprété l'amortissement d'un champ A comme résultant d'un processus stochastique dans un espace A+E. Chaque trajectoire de A correspond à une mesure continue de E. Le saut de E de $|0\rangle_E$ à $|1\rangle_E$ (clic) correspond à une détection d'un photon s'échappant de A; l'absence de saut (E reste dans $|0\rangle_E$; pas de clic) correspond à une période sans photon. Les états $|0\rangle_E$ et $|1\rangle_E$ décrivent les 2 états d'un détecteur quadratique D de l'intensité s'échappant de A (fig. de gauche). Nous savons (cours 2002-2003) qu'il existe d'autres mesures du champ. Au lieu de l'intensité (a^+a), on peut mesurer une quadrature ($ae^{i\phi} + a^+e^{-i\phi}$). On mélange avec une lame le champ et une référence cohérente de même fréquence et on mesure l'intensité résultante qui contient un terme d'interférence proportionnel à la valeur moyenne de la quadrature en avance de $\pi/2$ sur la phase de la référence. Si la lame est symétrique, on dispose de 2 détecteurs D_1 et D_2 avec signaux d'interférence opposés (fig. de droite). E a alors 3 états: $|0\rangle_E$ (pas de clic), $|1\rangle_E$ (clic de D_1) et $|2\rangle_E$ (clic de D_2). Les 2 types de mesure décrivent des expériences de pensée différentes mais correspondent à la même équation pilote (ambiguïté des formes de Kraus ou de Lindblad).



Forme de Lindblad associée à l'observation continue des quadratures du champ (T=0)

Remplaçons dans l'équation pilote (9-13) l'opérateur de Lindblad $L_1 = \sqrt{\Gamma_0} a$ par les deux opérateurs:

$$L_1^\beta = \sqrt{\frac{\Gamma_0}{2}} (a + i\beta) \quad ; \quad L_2^\beta = i\sqrt{\frac{\Gamma_0}{2}} (a - i\beta) \quad (9-35)$$

où β est un nombre complexe quelconque. Il est facile de voir que les termes en β s'éliminent de l'équation pilote et que l'on a l'identité:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \left(2L_i^\beta \tilde{\rho} L_i^{\beta+} - L_i^{\beta+} L_i^\beta \tilde{\rho} - \tilde{\rho} L_i^{\beta+} L_i^\beta \right) = \frac{\Gamma_0}{2} \left(2a\tilde{\rho}a^+ - a^+a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}a^+a \right) \quad (9-36)$$

Les 2 formes de cette équation sont équivalentes. Celle qui fait apparaître a est adaptée à l'expérience de pensée où l'on « mesurerait » l'intensité du champ échappé de A (un seul détecteur D et un seul opérateur de Lindblad). L'autre forme correspond à la « mesure » de la quadrature du champ (2 opérateurs de Lindblad et 2 détecteurs D_1 et D_2).

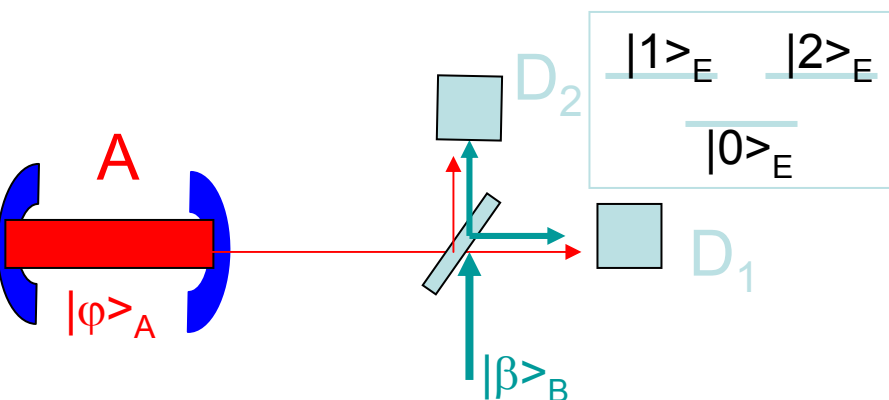
Pour préciser cette interprétation, appelons b l'opérateur champ du mode de référence (mode se propageant verticalement sur la figure de la page précédente). Rappelons qu'une lame symétrique mélange dans ses voies de sortie les deux modes suivant les relations (cours 2002-2003):

$$a \rightarrow \frac{a + ib}{\sqrt{2}} \quad ; \quad b \rightarrow \frac{ia + b}{\sqrt{2}} \quad (9-37)$$

Evolution du système champ +environnement au cours d'une observation de la quadrature du champ

Introduisons, en plus du champ A s'échappant horizontalement de la cavité et de E (détecteurs combinés D_1 - D_2 à 3 états), un champ de référence B préparé dans l'état cohérent $|\beta\rangle_B$ dans le mode se propageant verticalement (voir figure). Soit l'évolution infinitésimale unitaire du système A+B+E:

$$\begin{aligned}
 U_{ABE}(\tau) |\varphi\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \otimes |0\rangle_E &= \left[I_A - \frac{\Gamma_0 \tau}{4} (a^+ - ib^+) (a + ib) - \frac{\Gamma_0 \tau}{4} (a^+ + ib^+) (a - ib) \right] |\varphi\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \otimes |0\rangle_E \\
 &+ \sqrt{\frac{\Gamma_0 \tau}{2}} (a + ib) |\varphi\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \otimes |1\rangle_E + i \sqrt{\frac{\Gamma_0 \tau}{2}} (a - ib) |\varphi\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \otimes |2\rangle_E = \\
 &\left[I_A - \frac{\tau}{2} (L_1^\beta + L_1^{\beta\dagger} + L_2^\beta + L_2^{\beta\dagger}) \right] |\varphi\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \otimes |0\rangle_E + \sqrt{\tau} L_1^\beta |\varphi\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \otimes |1\rangle_E + \sqrt{\tau} L_2^\beta |\varphi\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \otimes |2\rangle_E \quad (9-38)
 \end{aligned}$$



La dernière ligne de (9-38) permet de déterminer les trajectoires stochastiques associées à l'équation pilote définie à l'aide des opérateurs de Lindblad L_1^β et L_2^β , à condition de redéfinir les 3 états de l'environnement comme $|0\rangle_E |\beta\rangle_B$, $|1\rangle_E |\beta\rangle_B$ et $|2\rangle_E |\beta\rangle_B$.

Interprétation de l'évolution unitaire infinitésimale du système champ + référence+détecteurs

Avec la probabilité:

$$p_1(\tau) = \frac{\Gamma_0 \tau}{2} {}_A \langle \varphi | \otimes {}_B \langle \beta | (a^+ - ib^+) (a + ib) | \varphi \rangle_A \otimes | \beta \rangle_B = \frac{\Gamma_0 \tau}{2} {}_A \langle \varphi | (a^+ - i\beta^*) (a + i\beta) | \varphi \rangle_A \quad (9-39)$$

le champ A subit le saut: $|\varphi\rangle_A \rightarrow |\varphi_1\rangle_A \propto (a + i\beta) |\varphi\rangle_A \quad (9-40)$

et avec la probabilité:

$$p_2(\tau) = \frac{\Gamma_0 \tau}{2} {}_A \langle \varphi | \otimes {}_B \langle \beta | (a^+ + ib^+) (a - ib) | \varphi \rangle_A \otimes | \beta \rangle_B = \frac{\Gamma_0 \tau}{2} {}_A \langle \varphi | (a^+ + i\beta^*) (a - i\beta) | \varphi \rangle_A \quad (9-41)$$

il effectue le saut: $|\varphi\rangle_A \rightarrow |\varphi_2\rangle_A \propto (a - i\beta) |\varphi\rangle_A \quad (9-42)$

Enfin, avec la probabilité complémentaire: $p_0(\tau) = 1 - p_1(\tau) - p_2(\tau) \quad (9-43)$

A évolue continûment (les états ci-dessous sont non normés):

$$|\varphi\rangle_A \rightarrow |\varphi_0\rangle_A \propto |\varphi\rangle_A - \frac{\Gamma_0 \tau}{4} (a^+ - i\beta^*) (a + i\beta) |\varphi\rangle_A - \frac{\Gamma_0 \tau}{4} (a^+ + i\beta^*) (a - i\beta) |\varphi\rangle_A \propto e^{-\frac{\Gamma_0 \tau}{2} a^+ a} |\varphi\rangle_A \quad (9-44)$$

On reconnaît dans (9-39) et (9-41) les taux de comptage de photons par D_1 et D_2 (voir cours 2001-2002). Ainsi, l'évolution stochastique de A est déterminée par les probabilités de clics (sauts (9-40) et (9-42)) ou par l'absence de clic (évolution continue (9-44)). Pour déterminer une trajectoire, on procède par itération (voir plus haut). A chaque pas, on remet à zéro D_1 et D_2 et le champ B dans l'état $|\beta\rangle_B$.

Mesure continue de quadrature: état cohérent et cas général

La forme de l'équation pilote à un opérateur de Lindblad privilégie les états cohérents, états propres de a . Il en est de même de la forme à 2 opérateurs, les états cohérents étant aussi états propres de L_1^β et L_2^β . Au cours d'une mesure continue d'une quadrature de A , un état cohérent $|\alpha\rangle_A$ reste donc invariant si un clic se produit. En absence de clic, l'état évolue suivant:

$$|\alpha\rangle_A \rightarrow |\alpha_0\rangle_A \propto e^{-\frac{\Gamma_0\tau}{2} a^+ a} |\alpha\rangle_A = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{[\alpha \exp(-\Gamma_0\tau/2)]^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_A \quad (9-45)$$

En normalisant et en itérant jusqu'à l'instant t_1 du premier saut, on retrouve (9-29). Comme dans le cas d'une mesure de l'intensité, on montre ainsi qu'un état cohérent évolue suivant la trajectoire certaine $|\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-\Gamma t/2}\rangle$.

Pour déterminer une trajectoire à partir d'un *état initial quelconque de A* on applique les règles générales suivantes (états non normalisés):

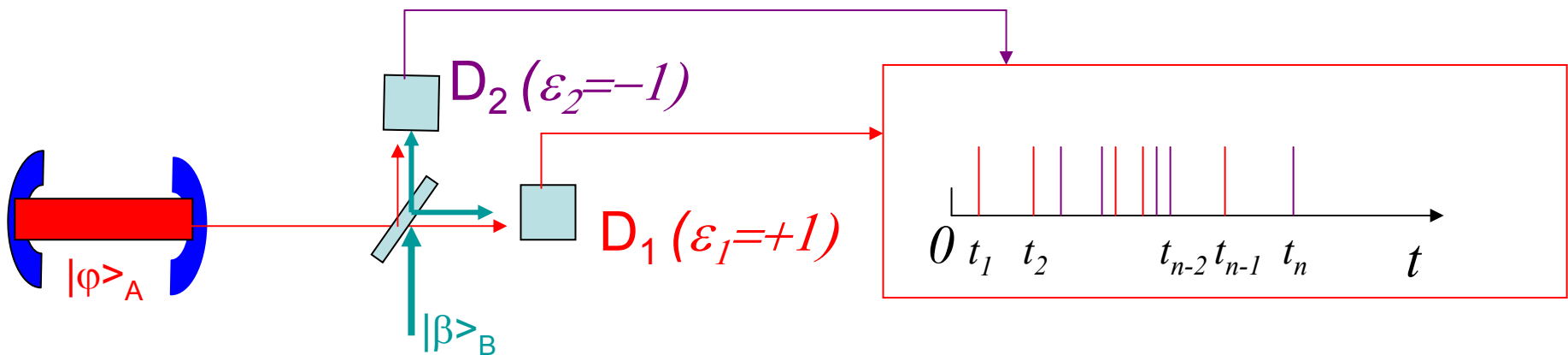
$$\text{si } D_1 \text{ "clic": } |\varphi(t + \tau)\rangle \propto (a + i\beta) |\varphi(t)\rangle$$

$$\text{si } D_2 \text{ "clic": } |\varphi(t + \tau)\rangle \propto (a - i\beta) |\varphi(t)\rangle$$

$$\text{si pas de clic: } |\varphi(t + \tau)\rangle \propto e^{-\frac{\Gamma_0\tau}{2} a^+ a} |\varphi(t)\rangle \quad (9-46)$$

Trajectoire associée à un comptage d'une suite de n photons par D_1, D_2 :

$$|\varphi(t_n)\rangle \propto [a + i\varepsilon_n\beta] e^{-\frac{\Gamma_0(t_n-t_{n-1})a^+a}{2}} [a + i\varepsilon_{n-1}\beta] e^{-\frac{\Gamma_0(t_{n-1}-t_{n-2})a^+a}{2}} \dots \dots \dots [a + i\varepsilon_2\beta] e^{-\frac{\Gamma_0(t_2-t_1)a^+a}{2}} [a + i\varepsilon_1\beta] e^{-\frac{\Gamma_0 t_1 a^+a}{2}} |\varphi(0)\rangle_A \quad (9-47)$$



Un clic de D_1 à l'instant t correspond à l'action de l'opérateur $a+i\beta$ et un clic de D_2 à l'action de $a-i\beta$. Entre deux clics séparés d'un intervalle de temps $q\tau$, l'état évolue sous l'effet de l'opérateur $\exp[-(\Gamma_0 q \tau/2)a^+a]$. La probabilité d'un clic dépend de l'état à cet instant, donc de la trajectoire antérieure. La simulation se fait par la méthode de Monte Carlo. Nous appliquerons la formule (9-47) à un certain nombre de problèmes intéressants dans la dernière leçon.

10.

Etats stables vis à vis de la décohérence (« pointer states »).

Généralisation des états cohérents: les états « pointeurs » (pointer states) d'un processus de décohérence décrit par une équation pilote à un seul opérateur de Lindblad. Conditions suffisantes d'existence des pointer states.

Pointer states approchés s'intriquant « lentement » avec l'environnement. Exemples de pointer states.

Théorie de la mesure et pointer states.

Généralisation des états cohérents: pointer states

Les états cohérents restent des états purs au cours de l'évolution dissipative en présence d'un réservoir à $T=0K$ parce qu'ils satisfont à deux conditions:

- (a) Ils sont états propres de l'opérateur de saut quantique $L_I = \sqrt{\Gamma} a$
- (b) L'évolution en absence de saut préserve leur caractère d'état propre de a .

De tels états, qui ne s'intriquent pas à l'environnement ont un caractère classique. On les appelle des états pointeurs (ou «pointer states»). Ils restent purs, alors que leurs superpositions deviennent vite des mélanges statistiques (nous étudierons ce problème en détail dans la dernière leçon). Généralement, un pointer state de A doit être un état qui évolue de façon infinitésimale sous l'effet du couplage avec E_f sous une forme séparée **au 1er ordre en $\sqrt{\tau}$** :

$$|\varphi_{PS}(0)\rangle_A \otimes |0\rangle_{E_f} \rightarrow |\varphi_{PS}(\tau)\rangle_A \otimes |\psi_{PS}(\tau)\rangle_{E_f} \quad (10-1)$$

Quelles sont les conditions pour qu'un état pur, évoluant sous l'effet d'une équation pilote à un opérateur de Lindblad L_I , reste séparé de l'environnement pour tout temps t ? L'évolution unitaire infinitésimale du système $A+E_f$ s'écrit:

$$|\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_E \rightarrow \left[I_A - \frac{i}{\hbar} H \tau - \frac{\tau}{2} L_1^+ L_1 \right] |\varphi\rangle_A \otimes |0\rangle_E + \sqrt{\tau} (L_1 |\varphi\rangle_A) \otimes |1\rangle_E \quad (10-2)$$

Conditions suffisantes pour qu'un état soit un pointer states

La condition nécessaire de factorisation de l'état A+E à l'ordre $O(\sqrt{\tau})$ est que $L_1|\phi\rangle_A$ et $|\varphi\rangle_A$ soient proportionnels, c'-à-d que $|\varphi\rangle_A$ soit état propre de L_1 :

$$L_1|\varphi\rangle_A = \lambda|\varphi\rangle_A \quad (10-3)$$

ce qui généralise la condition (a) ci-dessus. Il faut de plus que l'évolution entre deux sauts préserve les états propres de L_1 , de façon que l'intrication ne se produise pas au saut suivant. Ceci implique la condition, équivalente au (b) ci-dessus:

$$L_1|\varphi\rangle_A = \lambda|\varphi\rangle_A \quad \rightarrow \quad L_1|\varphi'\rangle_A = \lambda'|\varphi'\rangle_A \quad \text{si} \quad |\varphi'\rangle_A = \left[I - \frac{i}{\hbar} H\tau - \tau \frac{L_1^+ L_1}{2} \right] |\varphi\rangle_A \quad (10-4)$$

De façon générale on montre aisément que l'on a, à l'ordre $O(\tau)$:

$$L_1|\varphi'\rangle_A = L_1|\varphi\rangle_A - \frac{i\tau}{\hbar} L_1 H |\varphi\rangle_A - \tau \frac{L_1 L_1^+ L_1}{2} |\varphi\rangle_A \approx \lambda|\varphi'\rangle_A - \frac{i\tau}{\hbar} [L_1, H] |\varphi\rangle_A - \frac{\tau\lambda}{2} [L_1, L_1^+] |\varphi\rangle_A \quad (10-5)$$

Conditions suffisantes pour qu'un état soit un pointer states (suite)

L'équation (10-5) montre que (10-4) est satisfaite si $[L_1, H]$ et $[L_1, L_1^+]$ sont nuls, constants ou, de façon plus générale, fonctions de L_1 :

$$[L_1, H] = f(L_1) \quad (10-6a); \quad [L_1, L_1^+] = g(L_1) \quad (10-6b)$$

Si les relations (10-6) sont satisfaites, on a en effet:

$$L_1 |\varphi'\rangle_A \approx \left(\lambda - \frac{i\tau}{\hbar} f(\lambda) - \frac{\tau\lambda}{2} g(\lambda) \right) |\varphi'\rangle_A \quad (10-7)$$

et l'état propre de L_1 reste un état pur tout au long de l'évolution stochastique.

Lorsque L_1 obéit aux équations (10-6a,b), ses états propres ne s'intriquent jamais avec l'environnement. C'est encore le cas, même si $[L_1, L_1^+]$ ne satisfait pas (10-6b), pourvu que l'état propre de L_1 soit de valeur propre $\lambda = 0$ et que L_1 satisfasse la relation (10-6a). Ces états non-intriqués avec leur environnement sont appelés états pointeurs (*pointer states*). Ils jouent comme nous allons le voir un rôle essentiel dans l'analyse de la frontière classique-quantique.

Pointer states approchés: états s'intriquant lentement avec l'environnement

Considérons maintenant un processus décrit par un opérateur de Lindblad unique L_1 ne satisfaisant pas les conditions (10-6a,b). Même s'ils ne sont pas indéfiniment stables, les états propres de L_1 ne s'intriquent que « lentement » avec l'environnement. L'intrication ne se produit qu'aux ordres supérieurs en temps, parce que l'état du système A évolue entre les sauts et cesse d'être un état propre de L_1 . Ce résultat peut se retrouver en calculant la vitesse de variation de la trace du carré de l'opérateur densité:

$$\frac{d}{dt}(\text{Tr}\rho^2) = 2\text{Tr}\rho\frac{d\rho}{dt} = 2\text{Tr}(\rho L_1 \rho L_1^+ - \rho L_1^+ L_1 \rho) \quad (10-8)$$

On notera que le terme d'évolution hamiltonienne ne contribue pas à cette quantité (l'invariance de la trace par permutation annule les deux termes provenant du commutateur de H et de ρ). Si on a à un instant donné $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, l'équation (10-8) donne:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\text{Tr}\rho^2) = \langle\varphi|L_1^+|\varphi\rangle\langle\varphi|L_1|\varphi\rangle - \langle\varphi|L_1^+L_1|\varphi\rangle \quad (10-9)$$

et le membre de droite de (10-9) est égal à 0 si $|\varphi\rangle$ est état propre de L_1 . C'est une condition **suffisante** pour que la «vitesse d'intrication» de A et de E soit nulle au premier ordre en t .

Exemples de pointer states

Oscillateur amorti à $T=0k$: états cohérents.

A est un oscillateur avec $L_I = \sqrt{\Gamma} a$. Les relations (10-6a,b) sont satisfaites. On a:

$$[L_1, H] = \hbar\omega\sqrt{\Gamma} [a, a^\dagger a] = \hbar\omega\sqrt{\Gamma} a = \hbar\omega L_1 \quad (10-10a); \quad [L_1, L_1^\dagger] = \Gamma [a, a^\dagger] = \Gamma I_A \quad (10-10b)$$

Les états cohérents, états propres de a sont *pointer states* parfaits.

Décohérence d'un qubit: les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

Nous avons considéré 2 opérateurs de Lindblad différents (8-14b) et (8-15b). Dans les 2 cas, cet opérateur est hermitique ($L_I = L_I^\dagger$) et commute avec H (proportionnel à Z). Les commutateurs des équations (10-6a,b) sont nuls. Les états propres de L_I sont $|0\rangle_z$ et $|1\rangle_z$, *pointer states* parfaits de la décohérence.

Mouvement Brownien à $T > 0K$ d'une particule de masse m : états position

Une particule subissant des collisions dans un gaz est décrite par une équation pilote avec un terme à la Lindblad (Caldeira-Leggett, analysé dans Giulini et al, cité dans la leçon 1):

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \frac{\gamma}{2i\hbar} [x, p\rho + \rho p] - \frac{m\gamma k_B T}{\hbar^2} (x^2 \rho + \rho x^2 - 2x\rho x) \quad (10-11)$$

Évolution libre lente
(étalement du paquet
d'onde)

Terme de
friction
(évolution
lente)

Terme de diffusion
rapide (décohérence) à
la Lindblad

Les états propres de x
sont *pointer states*
approchés. Cas général
pour tout environnement
«mesurant» la position
du système

Pointer states et théorie de la mesure

Revenons au problème de la mesure d'une observable O_A d'un système A (voir cours 2001-2002). Modélisons le mètre M par un curseur à une dimension subissant une translation conditionnelle, dépendant de l'état de A. Le Hamiltonien d'interaction A-M est alors de la forme:

$$H_{AM} = gO_A \cdot P_M \quad (10-12)$$

où P_M est l'opérateur impulsion du mètre, générateur de ses translations et g une constante de couplage homogène à une vitesse. Appelons ε_i les valeurs propres de O_A et P_i les projecteurs sur les espaces propres associés. Appelons $|X_0\rangle_M$ l'état initial du mètre. On peut se le représenter comme un paquet Gaussien de petite largeur ΔX autour de $X=0$. Supposons que l'on effectue la mesure sur A dans l'état $|\varphi\rangle_A$. L'évolution unitaire du système A+M (première étape de la mesure) s'écrit:

$$|\varphi\rangle_A \otimes |X_0\rangle_M \rightarrow e^{-iH_{AM}\tau/\hbar} |\varphi\rangle_A \otimes |X_0\rangle_M = \sum_i P_i |\varphi\rangle_A \otimes |X_0 + g\tau\varepsilon_i\rangle_M \quad (10-13)$$

où $|X_0 + g\tau\varepsilon_i\rangle_M$ est le paquet gaussien translaté de l'origine de $g\tau\varepsilon_i$. (Nous supposons que le couplage A-M s'effectue en un temps court par rapport au temps caractéristique d'évolution libre des deux systèmes et nous négligeons cette évolution ici).

Pointer states et mesure (suite)

L'intrication décrite par (10-13) est une étape essentielle de la mesure. Elle implique que la mesure des états de M entraîne celle des états propres de O_A . Cette analyse laisse cependant non résolue une ambiguïté du problème de la mesure. Pour le comprendre, considérons une situation simple: la mesure de l'observable Z d'un qubit préparé dans l'état $|0\rangle_x$. Après achèvement du processus unitaire, le système A+M est dans l'état, cas particulier de (10-13):

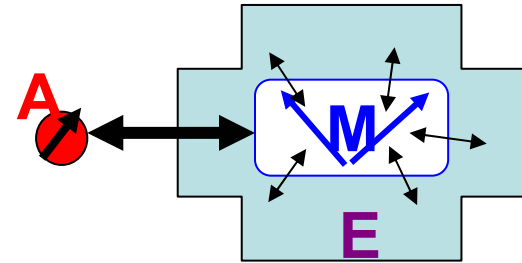
$$|0\rangle_{x,A} |X_0\rangle_M \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_{z,A} |X_0 + g\tau\rangle + |1\rangle_{z,A} |X_0 - g\tau\rangle \right] \quad (10-14)$$

qui peut s'écrire aussi, par changement de base:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_{x,A} \otimes \frac{|X_0 + g\tau\rangle + |X_0 - g\tau\rangle}{\sqrt{2}} + |1\rangle_{x,A} \otimes \frac{|X_0 + g\tau\rangle - |X_0 - g\tau\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (10-15)$$

Ces expressions équivalentes décrivent 2 situations physiques très différentes. La forme (10-14) indique que M mesure le qubit A, avec des probabilités égales, dans les états 0 et 1 de la base Z. La forme (10-15) semble indiquer que le même appareil mesure A, avec des probabilités égales, dans les états 0 et 1 de la base X. Or les deux observables Z et X ne commutent pas et ces deux mesures sont donc incompatibles! Dans le 1er cas les états de M sont des paquets gaussiens centrés sur des positions définies. Dans le second, se sont des superpositions de tels paquets, des chats de Schrödinger. Si M est considéré comme un système quantique isolé, le paradoxe ne peut être levé.

Pointer states et mesure (fin)



Pour résoudre ce problème, la théorie de la décohérence décrit M comme un système ouvert, couplé à un environnement macroscopique E. Sous l'effet de ce couplage, les états de position distincts de M sont des *pointer states*. Ils restent purs, mais se corrèlent en un temps très court à des états mutuellement orthogonaux de E (nous analysons ce processus à la leçon 6). Le système A+M+E évolue suivant:

$$|\varphi\rangle_A \otimes |X_0\rangle_M \otimes |0\rangle_E \rightarrow \sum_i P_i |\varphi\rangle_A \otimes |X_0 + g\tau\varepsilon_i\rangle_M \otimes |e_i\rangle_E \quad ; \quad \langle e_i | e_j \rangle_E = \delta_{ij} \quad (10-16)$$

A+M est ainsi rapidement décrit par un opérateur densité où n'apparaissent que les corrélations classiques entre états propres de O_A et états position de M:

$$\rho_{AM} \rightarrow \sum_i P_i |\varphi\rangle_A \langle \varphi|_A \otimes |X_0 + g\tau\varepsilon_i\rangle_M \langle X_0 + g\tau\varepsilon_i| \quad (10-17)$$

Les corrélations de type «chat» décrites par (10-14) ont disparu!

Un appareil de mesure d'une observable O_A de A est constitué d'un mètre M et d'un environnement E. Il corrèle par une transformation unitaire les états propres de O_A à des états «classiques» de position de M, pointer states par rapport au couplage à E. Par extension, les produits des états classiques de M et des états propres de O_A sont des pointer states de A+M en présence de E.

Conclusions de la cinquième leçon

Nous avons introduit une équation de Lindblad générale décrivant la relaxation d'un mode du champ en présence d'un environnement en équilibre thermodynamique. Nous avons analysé les trajectoires stochastiques du champ pour un état de Fock initial et une température nulle ou finie du réservoir.

Nous avons également décrit la trajectoire de Monte Carlo pour un état initial cohérent, à température nulle du réservoir. Nous avons montré que cette trajectoire est alors certaine, l'oscillateur restant dans un état cohérent dont l'amplitude s'amortit, sans intrication avec l'environnement. Nous avons analysé cette situation particulière en montrant que l'état cohérent n'évolue paradoxalement qu'en absence de saut quantique. Nous avons également introduit une forme équivalente de la même équation pilote à deux opérateurs de Lindblad, correspondant à une expérience de pensée où l'on mesurerait par méthode homodyne balancée une quadrature de l'oscillateur.

Nous avons décrit la relaxation d'un champ, mais le même formalisme peut s'appliquer à un oscillateur quelconque, par exemple à un système mécanique.

Nous avons montré que les états cohérents appartiennent à une classe d'états «classiques» qui ne s'intriquent pas avec l'environnement, les pointer states, dont nous avons analysé les propriétés et donné quelques exemples. Nous avons enfin relié la notion de pointer state à celle de mesure idéale.