

11.

Décohérence des chats de Schrödinger: points de vue complémentaires.

Superpositions d'états de position d'une particule matérielle ou d'états cohérents d'un mode du champ.

Quelques notions sur la décohérence dans le cas du mouvement Brownien. De l'équation pilote du mouvement Brownien à celle d'un champ en optique quantique.

La décohérence des superpositions d'états du champ décrite par différents types de trajectoires: sauts de parité du nombre de photons, localisation et diffusion de phase quantique.

Le problème des superpositions macroscopiques

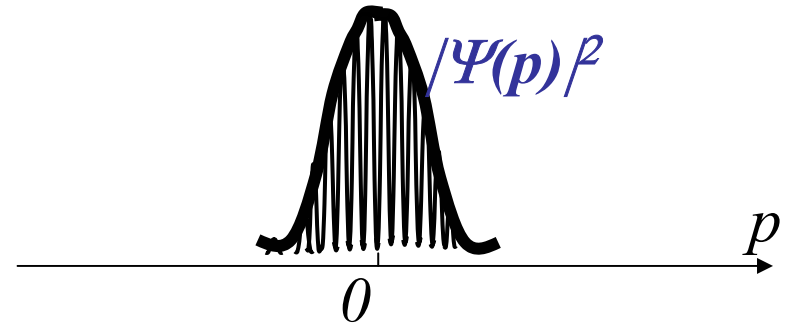
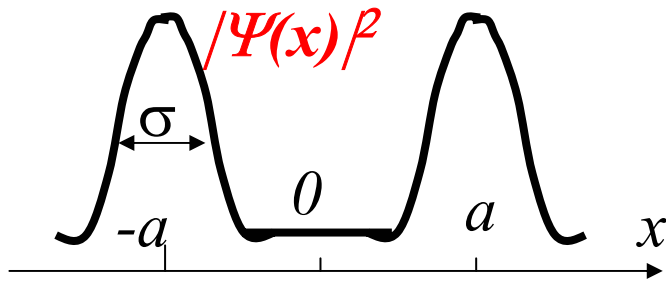
Comme nous l'avons vu dans les cours 2001-2002 et 2002-2003 et dans la leçon 5, les superpositions macroscopiques d'état jouent un rôle essentiel dans la théorie de la mesure et en information quantique. Nous les abordons ici dans le cadre de l'étude des systèmes ouverts, couplés à un environnement dans lequel des mesures sont virtuellement ou réellement effectuées.

L'exemple le plus simple de superposition est celui d'une particule, délocalisée en deux points séparés par une distance grande devant sa longueur d'onde de de Broglie thermique. C'est le cas d'un atome ou d'une molécule dans un interféromètre de type Young. L'expérience a été faite avec de nombreux atomes et même avec de grosses molécules (C_{60}).

C'est encore le cas d'une particule dans un puits de potentiel harmonique, oscillant avec deux mouvements de phases opposées (expérience effectuée sur un ion par Wineland et al. La particule est alors périodiquement délocalisée (en particulier aux points tournants du mouvement).

En optique quantique, un mode du champ joue le rôle d'oscillateur que l'on peut préparer dans une superposition macroscopique. Les composantes de la superposition sont des états cohérents, de phase ou d'amplitudes différentes. Il y a une grande analogie entre cette situation et celle d'un oscillateur matériel.

Superpositions macroscopiques d'états de position d'une particule matérielle



Superposition de 2 paquets gaussiens de largeur σ décrivant la particule centrée en $x = \pm a$ ($a \gg \sigma$), avec une impulsion moyenne nulle. Cette situation décrit la position (normale à la direction de propagation) du centre de masse d'un atome ou d'une molécule au moment de sa traversée des trous d'un interféromètre de Young. C'est aussi l'état d'un oscillateur mécanique dans une superposition de 2 états correspondant aux points tournants du mouvement d'amplitudes opposées. La cohérence de la superposition se manifeste dans la distribution des impulsions: modulation de période $h/2a$, avec une enveloppe gaussienne de largeur h/σ correspondant à la distribution d'impulsion obtenue pour un paquet d'onde. C'est une conséquence directe de la conjugaison de Fourier position-impulsion:

$$\begin{aligned} \psi(x) \propto \varphi(x - a) + \varphi(x + a) &\rightarrow \tilde{\psi}(p) \propto \int dx [\varphi(x - a) + \varphi(x + a)] e^{-ipx/\hbar} \\ &\propto \sin(pa / \hbar) \int dx \varphi(x) e^{-ipx/\hbar} \quad (11-1) \end{aligned}$$

Décohérence de la superposition entre états de positions: rappel sur le mouvement Brownien

La distribution d'impulsion est la transformée de Fourier des termes non-diagonaux en position de l'opérateur densité de la particule:

$$P(p) = \langle p | \rho | p \rangle = \int dx dx' \langle p | x \rangle \langle x | \rho | x' \rangle \langle x' | p \rangle \propto \int dx du e^{-ipu/\hbar} \rho_{x, x+u} = \int du e^{-ipu/\hbar} \chi(u)$$

avec $\chi(u) = \int dx \rho_{x, x+u}$ (11-2)

La probabilité $P(p)$ n'est modulée que s'il y a des éléments de matrice non nuls de ρ entre états de position séparés de $\sim 2a$.

La théorie du mouvement Brownien fournit un modèle de décohérence (voir Leçon 5). Celle-ci est due aux chocs de molécules sur la particule. L'évolution rapide de l'état du système est alors décrite par un terme à la Lindblad construit sur l'opérateur de position x de la particule:

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{décohérence}} = -\frac{m\gamma k_B T}{\hbar^2} (x^2 \rho + \rho x^2 - 2x\rho x) \quad (11-3)$$

Les états de position, états propres de l'opérateur de saut, sont des pointer states approchés (tant qu'on peut négliger l'évolution due aux autres termes de l'équation pilote). Les superpositions de ces états sont d'autant plus fragiles que leur distance est plus grande (voir page suivante).

Décohérence de la superposition entre états de positions: mouvement Brownien (suite)

Ecrivons (11- 3) pour un élément de matrice entre états $|x\rangle$ et $|x'\rangle$:

$$\left(\frac{d\rho_{xx'}}{dt}\right)_{\text{décohérence}} = -\frac{m\gamma k_B T}{\hbar^2} (x - x')^2 \rho_{xx'} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\chi(u)}{dt}\right)_{\text{décohérence}} = -\frac{m\gamma k_B T}{\hbar^2} u^2 \chi(u) \quad (11-4)$$

On en déduit que les cohérences entre états de position différentes décroissent exponentiellement dans le temps, avec un taux proportionnel au carré de leur distance. Le temps caractéristique de décohérence s'écrit:

$$T_{\text{décohérence}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\hbar^2}{4mk_B T a^2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\lambda_T}{2a}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{mk_B T}} \quad (11-5)$$

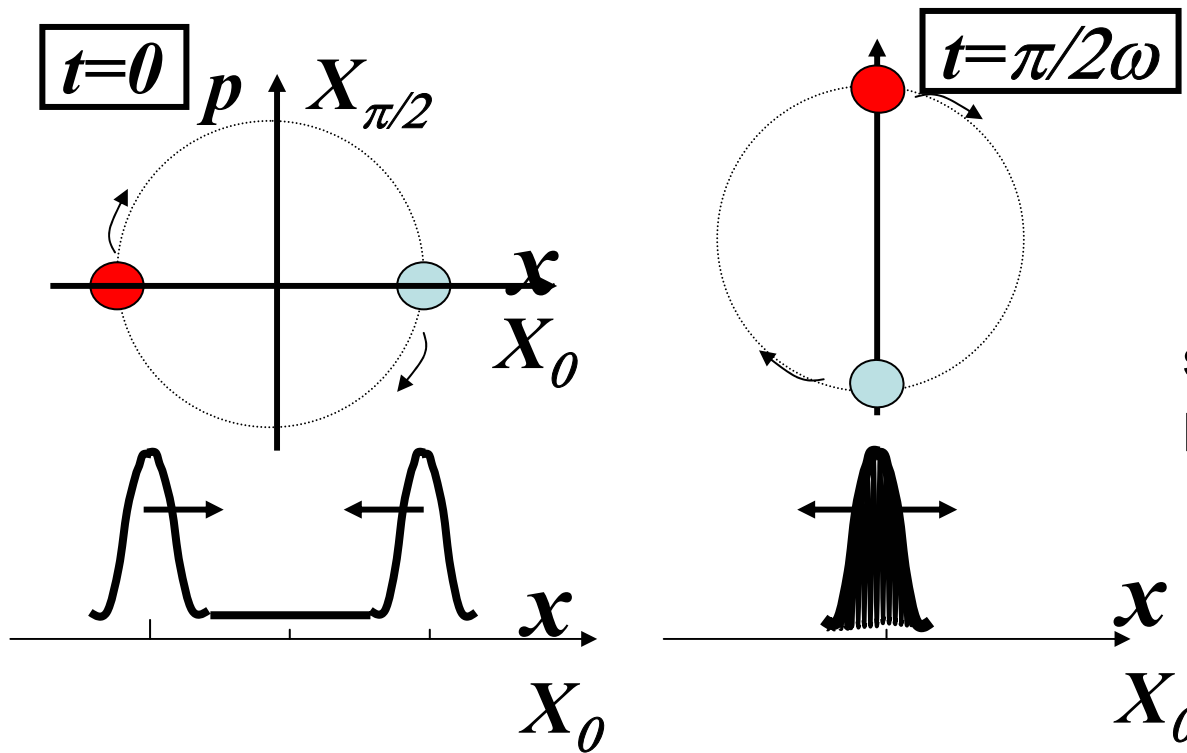
La quantité $1/\gamma$ représente le temps d'amortissement de la particule Brownienne due à la friction sur le gaz de molécules dans lequel elle baigne. *Le temps de décohérence est beaucoup plus court, dans le rapport du carré de la longueur d'onde de de Broglie thermique de la particule divisée par la distance des éléments de la superposition.* Pour une particule macroscopique, ce rapport est très petit et le temps de décohérence très court. Dès que les cohérences spatiales se sont amorties, les interférences en p disparaissent (voir equ. 11-2). Tous les effets d'interférence sont détruits. Ce modèle explique bien l'absence de franges d'interférences dans un interféromètre où la particule est soumise à des collisions sur un gaz résiduel.

De la particule Brownienne dans une superposition d'états de position au champ dans une superposition d'états de phase

Placer une particule dans un puits simplifie le problème Brownien (pas d'étalement du paquet d'onde). Pour une particule macroscopique, la période dans le puits est en général grande devant $T_{\text{décohérence}}$. On ne peut alors pas faire une approximation de champ tournant (*RWA*) et le couplage entre la particule et E fait intervenir l'opérateur x , somme des opérateurs de création et d'annihilation de phonons a et a^+ . L'opérateur x est alors opérateur saut dans le terme à la Lindblad (11-3) de l'équation Caldeira-Leggett. Les pointer states sont les états propres de position de la particule.

Une particule très légère, un ion dans un piège avec peu de collisions sur le gaz résiduel (cf Wineland et al) est décrite par une équation différente. La période d'oscillation est très petite devant $T_{\text{décohérence}}$. On peut alors ne garder que l'un des termes (a) dans le couplage avec E (approximation *RWA*) et l'équation pilote complète prend une forme de Lindblad plus simple que celle de Caldeira-Leggett. On rencontre la même situation pour la décohérence d'un champ, tant que le nombre de photons est assez petit pour que la décohérence soit lente comparée à l'oscillation. L'opérateur de saut est a et les pointer states sont les états propres de a , les états cohérents (paquets d'onde gaussiens).

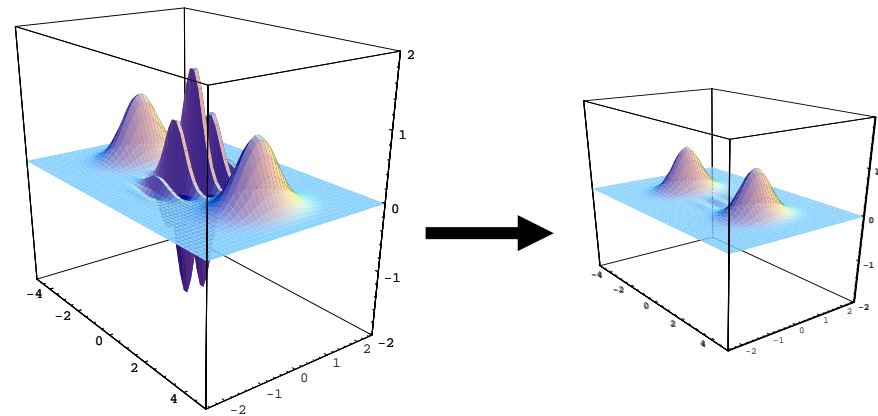
Rappel sur oscillateur mécanique et champ dans une superposition d'états cohérents de phases différentes



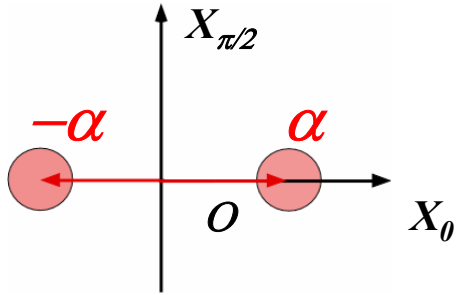
Correspondance entre x, p (pour la particule) et quadratures conjuguées $X_0, X_{\pi/2}$ (pour le champ). Les distributions des quadratures s'échangent tous les quart de période. Interférence entre les deux paquets gaussiens « en collision ». Mesure des quadratures du champ par homodynage

La fonction de Wigner présente deux pics gaussiens et un terme d'interférence entre les deux, signature de la cohérence. Ce terme disparaît vite sous l'effet de la décohérence.

Préparation de ces états décrite en 2002-2003.



Quelques rappels sur les « chats de phase » ($|\alpha| \gg 1$)



$$|\Psi_{chat}^{pair}\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})}} \approx (1/\sqrt{2})(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (11-6a)$$

$$|\Psi_{chat}^{impair}\rangle = \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})}} \approx (1/\sqrt{2})(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (11-6b)$$

Parité du nombre de photons:

Corriger!

$$P_n^{chat\ pair} \approx e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} [1 + (-1)^n] ; \quad P_n^{chat\ impair} \approx e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} [1 - (-1)^n] \quad (11-7)$$

Les chats de phase pairs (resp. impairs) ne contiennent que des nombres pairs (resp. impairs) de photons. Ils sont états propres de l'opérateur parité $P = e^{i\pi a^\dagger a}$:

$$P|\Psi_{chat}^{pair}\rangle = |\Psi_{chat}^{pair}\rangle ; \quad P|\Psi_{chat}^{impair}\rangle = -|\Psi_{chat}^{impair}\rangle \quad (11-8)$$

L'opérateur d'annihilation transforme un chat pair en chat impair et vice versa:

$$a|\Psi_{chat}^{pair}\rangle \approx \frac{\alpha}{\sqrt{2}} [|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle] = \alpha|\Psi_{chat}^{impair}\rangle ; \quad a|\Psi_{chat}^{impair}\rangle \approx \frac{\alpha}{\sqrt{2}} [|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle] = \alpha|\Psi_{chat}^{pair}\rangle \quad (11-9)$$

Equation de Lindblad avec opérateur saut a : l'environnement « mesure » l'intensité du champ

La forme usuelle de l'équation de Lindblad avec opérateur de saut a est donnée par l'équation (9-13):

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{\Gamma_0}{2} (a^+ a \tilde{\rho} + \tilde{\rho} a^+ a) + \Gamma_0 a \tilde{\rho} a^+$$

La représentation unitaire de cette équation correspond à une mesure virtuelle de l'intensité du champ (expérience de pensée de comptage de photons; voir leçon 5). Si l'on a initialement préparé un chat de phase pair, le premier saut quantique, sur chaque trajectoire stochastique, le transforme en un chat impair (voir équations (9-18) et (11-8)). Le second saut recrée un chat pair et ainsi de suite. La fréquence moyenne des sauts est égale à Γ/α^2 , un grand nombre de sauts se produisant avant une décroissance appréciable de l'amplitude du champ (on suppose $|\alpha| \gg 1$).

La moyenne sur les trajectoires stochastiques donne comme limite, atteinte en un temps de l'ordre de $1/\Gamma|\alpha|^2$, un mélange statistique à poids égaux des chats pairs et impairs, que l'on peut écrire de façon équivalente, pour $1/\Gamma|\alpha|^2 \ll t \ll 1/\Gamma$:

$$\tilde{\rho}_{\text{décoheré}} \approx \frac{1}{2} |\Psi_{\text{chat}}^{\text{pair}}\rangle \langle \Psi_{\text{chat}}^{\text{pair}}| + \frac{1}{2} |\Psi_{\text{chat}}^{\text{impair}}\rangle \langle \Psi_{\text{chat}}^{\text{impair}}| = \frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha| + \frac{1}{2} |-\alpha\rangle \langle -\alpha| \quad (11-10)$$

Analogie entre décohérence d'un chat de phase par mesure de l'intensité dans l'environnement et basculement de phase d'un qubit

L'analyse précédente rappelle la description (leçon 4) des trajectoires stochastiques d'un qubit soumis à un opérateur de saut quantique Z de basculement de phase. Pour préciser cette analogie, effectuons la correspondance:

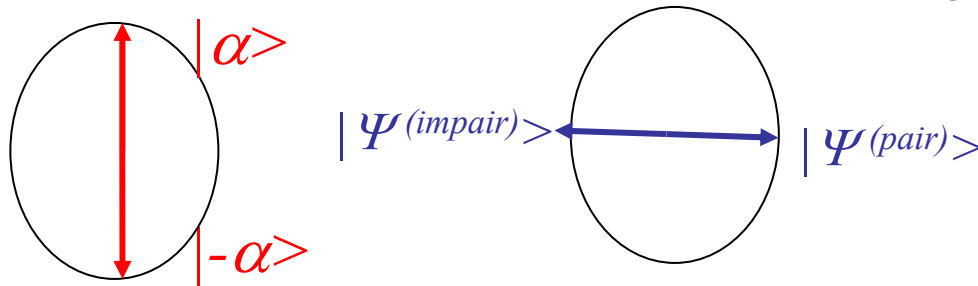
$$\begin{aligned} a &\rightarrow Z \\ |\alpha\rangle &\rightarrow |0\rangle_z ; \quad |-\alpha\rangle \rightarrow |1\rangle_z \\ |\Psi_{chat}^{pair}\rangle &\rightarrow |0\rangle_x ; \quad |\Psi_{chat}^{impair}\rangle \rightarrow |1\rangle_x \\ \Gamma|\alpha|^2 &\rightarrow \gamma_{qubit} \end{aligned} \quad (11-11)$$

Le champ effectue des sauts à des instants aléatoires entre les états de chat pair et impair, de même que le qubit est soumis à un basculement de phase aléatoire entre les états 0 et 1 dans la base X . Le résultat est, dans les deux cas, une évolution irréversible vers un opérateur densité mélange statistique à poids égaux des deux états concernés, que l'on peut de façon équivalente décrire comme un mélange des états dans une base orthogonale (états $|\alpha\rangle$ ou états du qubit 0 et 1 dans la base Z).

Du basculement de parité à la mesure de la quadrature du chat

La décohérence du qubit initialement dans l'état $|0\rangle_x = (1/\sqrt{2})(|0\rangle_z + |1\rangle_z)$ s'interprète aussi bien comme un basculement aléatoire de $|0\rangle_x$ à $|1\rangle_x$ (opérateur de Lindblad proportionnel à Z , voir équ.(8-14)) que comme une mesure par l'environnement des états $|0\rangle_z$ et $|1\rangle_z$ (opérateur de Lindblad proportionnel à $|1\rangle_z\langle 1|$, voir équ. (8-15)).

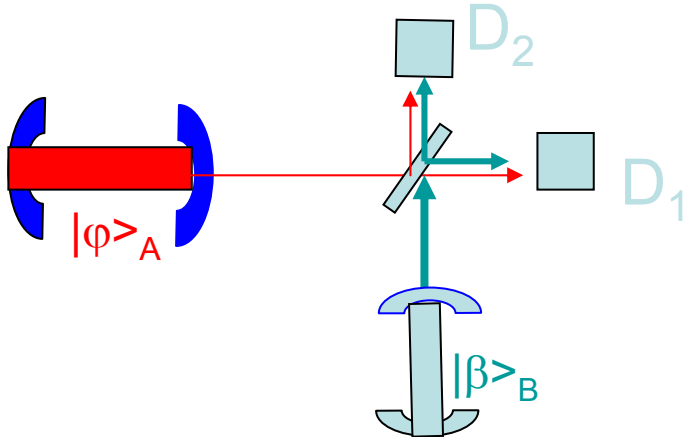
Le premier point de vue correspond, pour un chat de phase au basculement de parité (opérateur de Lindblad proportionnel à a). Le second correspond à une « mesure par l'environnement » distinguant les états $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$, c'est à dire à une mesure de la quadrature du chat alignée le long de la direction de $|\alpha\rangle$.



Cette analogie nous conduit à représenter les états $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ et les deux chats de phase sur une pseudo sphère de Bloch (voir ci-contre)

Nous avons vu (leçon 5) que la mesure de quadrature est associée à une équation pilote à 2 opérateurs de Lindblad proportionnels à $a+i\beta$ et $a-i\beta$, où β est l'amplitude du champ d'homodynage. Nous allons maintenant expliciter cette analogie en décrivant une mesure homodyne du chat de phase.

Observation de la quadrature d'un chat en un « clic »



Considérons un champ A préparé dans l'état $|\varphi\rangle_A$ donné par (11-6a) avec α (réel) $\gg 1$:

$$|\varphi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (11-12)$$

$$(\alpha = \sqrt{n} \gg 1 ; \langle \alpha | -\alpha \rangle = e^{-2|\alpha|^2} \ll 1)$$

Commençons par une expérience simple. Le champ échappé de A est mélangé à un champ cohérent **de même amplitude** (échappé d'une cavité identique), déphasé de $\pi/2$ par rapport à α :

$$\beta = -i\alpha \quad (11-13)$$

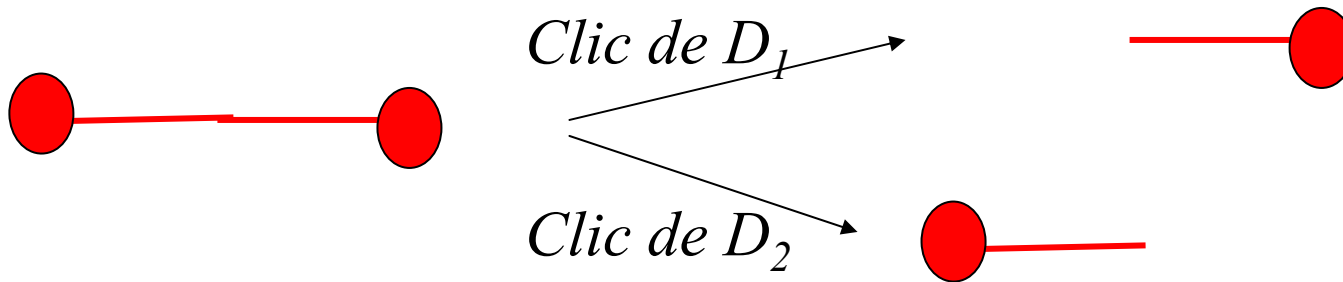
L'environnement mesure alors la quadrature du champ en phase (ou opposition de phase) avec les composantes de la superposition (11-12). Les probabilités de comptage de photons par D_1 et D_2 sont initialement égales:

$$p_1(\tau) = \frac{\Gamma\tau}{2} \langle \varphi | (a^+ - i\beta^*) (a + i\beta) | \varphi \rangle_A \approx \Gamma\tau\alpha^2; p_2(\tau) = \frac{\Gamma\tau}{2} \langle \varphi | (a^+ + i\beta^*) (a - i\beta) | \varphi \rangle_A \approx \Gamma\tau\alpha^2 \quad (11-14)$$

Si le 1er clic vient de D_1 : $|\varphi\rangle_A \rightarrow |\varphi\rangle_1 \propto (a + i\beta)|\varphi\rangle \propto \alpha|\alpha\rangle + 0|-\alpha\rangle$: saut dans $|\alpha\rangle$ (11-15a)

et s'il vient de D_2 : $|\varphi\rangle_A \rightarrow |\varphi\rangle_2 \propto (a - i\beta)|\varphi\rangle \propto 0|\alpha\rangle + \alpha|-\alpha\rangle$: saut dans $|-\alpha\rangle$ (11-15b)

Mesure homodyne d'un chat en un clic (suite)



La détection du 1^{er} photon, qui se produit en moyenne au bout de $t_1 = 1/\Gamma\alpha^2$, projette le champ dans $|\alpha\rangle$ ou $|-\alpha\rangle$, états propres des opérateurs de saut qui n'évoluent plus ensuite de façon soudaine. La probabilité que l'autre détecteur clique s'annule. Tous les photons détectés par la suite le sont par le même détecteur. Le champ cohérent évolue ensuite avec la constante de temps $1/\Gamma$ vers le vide (on peut ajuster l'amplitude du champ de référence β au cours de l'amortissement du champ pour toujours satisfaire (11-13)).

Il y a dans ce cas deux trajectoires seulement: saut vers l'état $|\alpha\rangle$, suivi de l'amortissement de cet état vers le vide ou saut vers l'état $|-\alpha\rangle$ suivi du même amortissement. La matrice densité, obtenue en moyennant ces deux trajectoires devient manifestement, au bout d'un temps $1/\Gamma\alpha^2 \ll t \ll 1/\Gamma$:

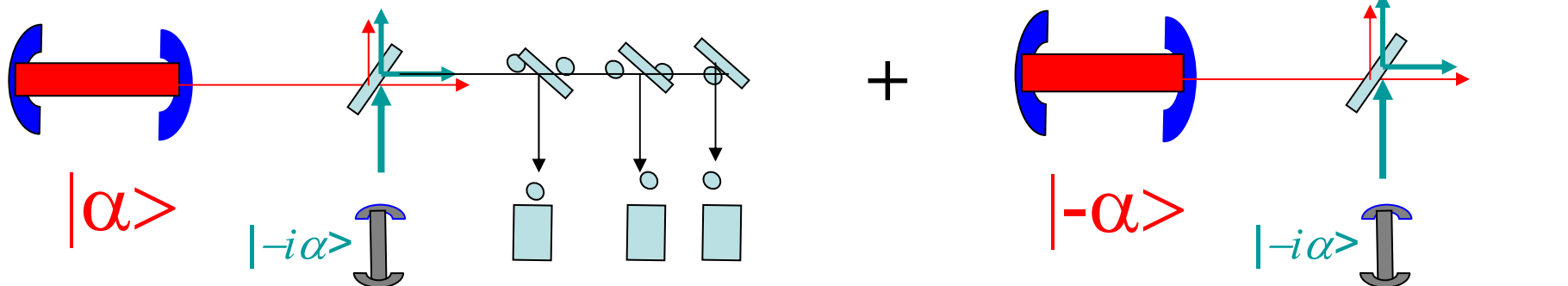
$$\rho \xrightarrow{1/\Gamma\alpha^2 \ll t \ll 1/\Gamma} \frac{1}{2} |\alpha e^{-\Gamma t/2}\rangle \langle \alpha e^{-\Gamma t/2}| + \frac{1}{2} |-\alpha e^{-\Gamma t/2}\rangle \langle -\alpha e^{-\Gamma t/2}| \quad (11-16)$$

Ce résultat est identique à celui donné par (11-10), et on vérifie bien que l'évolution de ρ ne dépend pas de la représentation de Lindblad choisie.

Aspects de la localisation illustrés par cette expérience idéale

Les pointer states $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ « envoient » tous les photons dans la même voie de détection. Les pointer states ont une réalité objective: on pourrait disposer de plusieurs détecteurs sur chacune des deux voies et tous les détecteurs « seraient d'accord pour localiser » le champ dans $|\alpha\rangle$ ou $|-\alpha\rangle$.

Une superposition des pointer states $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ s'intrique à des états finals différents des détecteurs, l'ensemble champ + détecteurs devenant non séparable. Le premier photon détecté dans l'une des deux voies « force » tous les autres à suivre le même chemin. Les états classiques émergent du processus de localisation et un consensus s'établit entre tous les observateurs pour dire si le champ est dans un état ou dans l'autre. La localisation par diffusion de photons d'une particule matérielle est un phénomène semblable (photons diffusés dans l'espace libre).



Localisation de l'état du chat par mesure continue

Cette localisation du chat illustre la modification de l'état d'un système produite par acquisition d'information. Si D_1 clique, cela signifie que le champ ne peut pas être dans l'état $|\alpha\rangle$ car l'amplitude du champ dans la voie de ce détecteur est nulle pour cet état. Inversement, si D_2 clique, le champ ne peut être dans l'état $|\alpha\rangle$. Ici, l'information est acquise en un coup parce que l'amplitude du champ de référence est égale à celle du champ mesuré. De façon plus réaliste, on ne connaît pas a priori cette amplitude. On choisit en général un champ de référence d'amplitude $|\beta|$ très grande devant celle du champ étudié afin d'avoir un grand signal de comptage sur lequel un terme d'interférence important, proportionnel à $|\beta|$, fournit l'information cherchée sur la quadrature du champ (cours 2002-2003). Nous reprenons la description de l'expérience en posant:

$$\beta = -i x \alpha \text{ avec } x \text{ réel } \gg 1 \quad (11-17)$$

Le taux de comptage moyen devient $\Gamma |\beta|^2 = \Gamma x^2 |\alpha|^2 \gg \Gamma |\alpha|^2$. Les photons sont comptés plus vite, mais il en faut plus pour acquérir l'information qui localise le champ. Nous allons décrire ce processus de mesure continue qui se rapproche d'une situation réaliste. Nous montrons que le temps de localisation est le même que pour une détection en un clic, indépendant de l'amplitude de la référence. Il correspond à la détection d'environ x^2 photons, chacun apportant une petite part de l'information nécessaire à la localisation.

Evolution continue des amplitudes des composantes du chat dans la mesure de quadrature

Ecrivons l'état du chat sous la forme (voir figure de la pseudo sphère de Bloch 4 pages plus haut):

$$|\varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\alpha\rangle \quad ; \quad (0 < \theta \leq \pi) \quad (11-18)$$

qui le décrit comme un pseudo qubit. L'état initial du système correspond à $\theta=\pi/2$. Nous supposons comme précédemment que les deux composantes du système sont bien séparées ($\alpha \gg 1$). Nous allons voir que θ évolue très vite, sous l'effet de la mesure, soit vers 0 soit vers π , ce qui correspond bien à une localisation du système.

Dans les intervalles entre les détections, les deux composantes voient leur amplitude se réduire exponentiellement avec la constante de temps $1/\Gamma$. Ceci a pour effet de réduire progressivement la séparation des deux composantes du chat. Ce processus, étudié à la leçon 5, est très lent par rapport au temps de localisation. Nous le négligerons donc, en nous concentrant sur le début de l'évolution ($\Gamma t \ll 1$).

Evolution continue des amplitudes des composantes du chat dans la mesure de quadrature (suite)

Les clics de D_i ($i = 1, 2$) se produisent avec les probabilités ($\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$):

$$p_i(\tau) = \frac{\Gamma\tau}{2} \langle \varphi | (a^+ + \varepsilon_i x \alpha) (a + \varepsilon_i x \alpha) | \varphi \rangle = \frac{\Gamma\tau\alpha^2}{2} [1 + 2\varepsilon_i x \cos\theta + x^2] \quad (11-19)$$

et conduisent aux états définis après le saut par:

$$\begin{aligned} |\varphi_i\rangle &\propto (\varepsilon_i x + 1) \cos\frac{\theta}{2} |\alpha\rangle + (\varepsilon_i x - 1) \sin\frac{\theta}{2} |-\alpha\rangle \propto \cos\frac{\theta}{2} |\alpha\rangle + \frac{\varepsilon_i x - 1}{\varepsilon_i x + 1} \sin\frac{\theta}{2} |-\alpha\rangle \\ &\approx \cos\frac{\theta}{2} |\alpha\rangle + \left(1 - \frac{2\varepsilon_i}{x}\right) \sin\frac{\theta}{2} |-\alpha\rangle \quad (11-20) \end{aligned}$$

qui correspondent, pour des clics de D_1 et D_2 , à des évolutions en sens opposés de l'angle θ . Le saut $\delta\theta$ du paramètre θ à chaque clic est donné par:

$$\tan\left(\frac{\theta + \delta\theta_i}{2}\right) \approx \tan\frac{\theta}{2} + \frac{\delta\theta_i}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \approx \tan\frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{2\varepsilon_i}{x}\right) \rightarrow \delta\theta_i = -\frac{2\varepsilon_i \sin\theta}{x} \quad (11-21)$$

Evolution continue des amplitudes des composantes du chat dans la mesure...(suite)

Au début du processus ($\theta=\pi/2$), les probabilités de clics D_1 et D_2 sont égales et l'évolution de θ commence comme une marche aléatoire symétrique à une dimension de pas $\pm 2/x$. Le pas de la marche aléatoire diminue au cours du temps et les probabilités de sauts $\varepsilon=+1$ et $\varepsilon=-1$ deviennent différentes. Un examen de (11-19) montre que si $\theta>\pi/2$, D_2 clique plus que D_1 et l'amplitude de l'état $|\alpha\rangle$ tend à augmenter: il y a plus de pas vers θ croissant que vers θ décroissant et la dérive de θ amplifie le déséquilibre des deux amplitudes. Si au contraire $\theta < \pi/2$, $p_1(t) > p_2(t)$, il y a plus de pas vers θ petit et le déséquilibre est également amplifié. On en déduit que la mesure continue rend l'état du chat instable. Les premiers pas au hasard éloignent θ de sa valeur initiale $\pi/2$, dans un sens ou l'autre avec des probabilités égales. Dès que ceci s'est produit, le mouvement s'accélère et le système aboutit à $\theta=0$ ($|\alpha\rangle$) ou $\theta=\pi$ ($|- \alpha\rangle$).

Avant une analyse quantitative, évaluons l'ordre de grandeur du temps de localisation. En un temps t , il y a $\Gamma t \alpha^2 x^2$ clics. En admettant que la marche de θ est aléatoire de pas moyen $\pm 1/x$, elle éloigne au bout du temps t l'angle θ de $\pi/2$ d'une quantité de l'ordre de $(\Gamma t \alpha^2 x^2)^{1/2} x^{-1} = (\Gamma t \alpha^2)^{1/2}$ indépendante de x . Le système aboutit ainsi en $\theta=0$ ou π après un temps tel que $\Gamma t \alpha^2$ est de l'ordre de 1, soit $T \approx 1/\Gamma \alpha^2$, petit devant $1/\Gamma$ (même résultat que précédemment).

Autre modèle de décohérence: mesure de la quadrature complémentaire sensible aux interférences du chat: diffusion de phase quantique

Nous avons supposé que le champ de référence β avait une phase en avance de $\pi/2$ sur celle des composantes du chat, ce qui revient à mesurer la quadrature du chat en phase avec ces composantes. Cette quadrature a deux valeurs possibles, $\pm \alpha$, et nous venons de voir que très vite la mesure réduit l'état du champ à l'un des deux états correspondant à ces valeurs (ce qui correspond à une localisation en position pour un oscillateur harmonique). Nous avons vu (cours 2002-2003) que l'on peut aussi bien mesurer la quadrature du champ orthogonale aux composantes du chat. C'est elle qui fait apparaître un signal d'interférences révélant le caractère cohérent de la superposition d'états (voir cours 2002-2003). Pour mesurer cette quadrature, il faut que le champ de référence soit en phase avec les composantes du chat, soit:

$$\beta = x\alpha \quad ; \quad x \text{ réel } \gg 1 \quad (11-27)$$

Nous allons montrer que le processus de mesure ne localise alors plus le système, mais produit une diffusion de sa phase quantique, en un temps encore de l'ordre de $1/\Gamma\alpha^2$.

Décohérence du chat vue comme un processus de diffusion de phase quantique (suite)

Il convient maintenant d'écrire l'état du champ sous la forme:

$$|\varphi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + e^{i\psi} |-\alpha\rangle) \quad (11-28)$$

où ψ est une phase aléatoire, égale à 0 à l'instant initial et qui dépend de la trajectoire. Reprenant la même analyse que plus haut, nous déterminons les probabilités $p_i(\tau)$ de clics de D_1 et D_2 et les sauts correspondants de l'état du champ:

$$p_i(\tau) = \frac{\Gamma\tau}{2} \langle \varphi | (a^\dagger - i\varepsilon_i x \alpha) (a + i\varepsilon_i x \alpha) | \varphi \rangle = \frac{\Gamma\tau\alpha^2}{2} [1 + x^2] \approx \frac{\Gamma\tau\alpha^2 x^2}{2} \quad (11-29)$$

$$\begin{aligned} |\varphi_i\rangle_A &\propto (i\varepsilon_i x + 1) |\alpha\rangle + (i\varepsilon_i x - 1) e^{i\psi} |-\alpha\rangle \propto |\alpha\rangle + \frac{i\varepsilon_i x - 1}{i\varepsilon_i x + 1} e^{i\psi} |-\alpha\rangle \approx |\alpha\rangle + \left(1 + \frac{2i\varepsilon_i}{x}\right) e^{i\psi} |-\alpha\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + e^{i(\psi + \delta\psi_i)} |-\alpha\rangle) \quad \text{avec} \quad \delta\psi_i = \frac{2\varepsilon_i}{x} \quad (11-30) \end{aligned}$$

Décohérence du chat vue comme un processus de diffusion de phase quantique (suite)

Nous voyons sur (11-29) et (11-30) que la détection d'un photon dans une des deux voies fait maintenant tourner dans un sens ou l'autre la phase quantique de la superposition, sans changer le poids des états $|\alpha\rangle$ et $|\alpha\rangle$. Alors que le vecteur de Bloch du pseudo qubit associé au chat « tourne » dans un plan méridien de la sphère de Bloch sous l'effet des mesures qui localisent les composantes, il tourne dans le plan équatorial quand on mesure la quadrature de phase orthogonale aux composantes. Ce problème a été analysé en détail par *P. Milman, Y. Castin, and L. Davidovich (Phys.Rev. A **61**,063803 (2000))*.

On notera que les probabilités des deux types de saut sont ici identiques: le taux de comptage ne dépend pas de la phase quantique du champ. Le « pas » du saut de phase est également constant. L'évolution de la phase est donc une marche aléatoire classique. Elle conduit à une diffusion gaussienne de cette phase. On définit comme dans le cas précédent une distribution de phase $P(\psi, t)$ et on écrit son équation d'évolution infinitésimale:

$$P(\psi, t + dt) = \sum_{i=1,2} P(\psi - \delta\psi_i, t) p_i(dt) + \left[1 - \sum_{i=1,2} p_i(dt) \right] P(\psi, t) \quad (11-31)$$

Décohérence du chat vue comme un processus de diffusion de phase quantique (fin)

Après une manipulation analogue à celle menant à (11-24), on obtient:

$$\frac{1}{2\Gamma\alpha^2} \frac{\partial P(\psi, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} \quad (11-32)$$

Il n'y a qu'un terme de diffusion à coefficient constant (« pas » invariable) sans terme de dérive (probabilités de saut à droite et à gauche égales et indépendantes de ψ). La situation est donc plus simple que dans le cas précédent. La solution de l'équation avec condition initiale $P(\psi, 0) = \delta(\psi - \psi_0)$ est:

$$P(\psi, t) = \frac{\exp(-(\psi - \psi_0)^2 / 8\Gamma\alpha^2 t)}{\sqrt{8\pi\Gamma\alpha^2 t}} \quad (11-33)$$

L'étalement de phase est complet au bout d'un temps de l'ordre de $1/\Gamma\alpha^2$, encore indépendant de x . C'est bien sûr le même temps de décohérence que celui trouvé dans les autres scénarii. Si la mesure n'est pas lue, le champ est décrit par un opérateur densité superposition incohérente à poids égaux des projecteurs sur $|\alpha\rangle$ et $|\alpha\rangle$. Ceci n'est valable que tant que les composantes sont orthogonales, c'est à dire pour $t \ll 1/\Gamma$. Pour des temps plus longs, il faut inclure l'amortissement du champ, ce qui donne des expressions plus lourdes.

Qu'avons nous appris sur la décohérence du chat de phase?

Décrite par l'équation pilote (9-13):

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{\Gamma_0}{2} (a^+ a \tilde{\rho} + \tilde{\rho} a^+ a) + \Gamma_0 a \tilde{\rho} a^+$$

elle peut s'interpréter de différentes façons à l'aide de trajectoires Monte Carlo correspondant à divers types de mesures non lues dans l'environnement. Chaque interprétation correspond à une forme équivalente de cette équation, associée à des opérateurs de Lindblad différents. La moyenne statistique des trajectoires conduit à une solution unique pour l'opérateur densité.

Si on se limite à décrire l'évolution sur un intervalle de temps court devant le temps d'amortissement du champ, la décohérence peut s'interpréter comme celle d'un qubit évoluant sur une pseudo sphère de Bloch. Le chat initial est décrit par un vecteur dans le plan équatorial de la sphère. Trois modèles équivalents de décohérence intéressants ont été décrits, similaires à des processus de décohérence d'un spin en RMN: (i) saut de parité du vecteur qui bascule aléatoirement d'un état à son symétrique par rapport à l'axe Oz, (ii) diffusion le long d'un méridien de la sphère avec localisation au pôle nord ou sud et (iii) diffusion de phase le long de l'équateur. Nous les récapitulons page suivante.

3 scénarii de décohérence d'un qubit (ou d'un chat)

$$\frac{d\rho}{dt} = \Gamma[Z\rho Z - \rho] = -\frac{1}{T_2} \begin{pmatrix} 0 & \rho_{01} \\ \rho_{01} & 0 \end{pmatrix} ; |\varphi\rangle_A = c_0|0\rangle_A + c_1|1\rangle_A \xrightarrow{t \gg T_2} \rho_A = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & 0 \\ 0 & |c_1|^2 \end{pmatrix} \quad (11-34)$$

Cette équation pilote d'un spin en RMN, décrit un processus de décohérence caractérisé par la constante de temps appelée T_2 . Elle a 3 interprétations, correspondant à des mécanismes divers, mais conduisant au même résultat pour un observateur du spin (qubit), sans information sur l'environnement:

(i) **Saut quantique aléatoire** (tous les temps T_2 en moyenne):

$$c_0|0\rangle_A + c_1|1\rangle_A \rightarrow Z(c_0|0\rangle_A + c_1|1\rangle_A) = c_0|0\rangle_A - c_1|1\rangle_A \quad (11-35)$$

C'est le «phase flip» du bit, mécanisme d'erreur type en information quantique.

(ii) **Décohérence par diffusion des états dans l'environnement**, décrite par:

$$[c_0|0\rangle_A + c_1|1\rangle_A] \otimes |0\rangle_E \xrightarrow{t \gg T_2} c_0|0\rangle_A \otimes |0\rangle_E + c_1|1\rangle_A \otimes |1\rangle_E \quad (11-36)$$

(iii) **Diffusion par marche aléatoire de la phase quantique**:

$$c_0|0\rangle_A + c_1|1\rangle_A \rightarrow c_0|0\rangle_A + e^{i\delta\varphi} c_1|1\rangle_A ; \langle \delta\varphi^2(t) \rangle \approx \frac{t}{T_2} \quad (11-37)$$

C'est un processus de relaxation sans basculement pour un spin qui se déplace dans un gradient de champ et subit des collisions changeant aléatoirement sa direction («*retrécissement par le mouvement*» en RMN). Ces 3 mécanismes, d'effet identique sur ρ , permettent aussi d'interpréter la décohérence d'un chat de Schrödinger du champ.

Conclusion de la sixième leçon

Nous avons analysé l'évolution d'une superposition d'états cohérents du champ sous différents points de vue, en la décrivant comme résultant de divers types de mesure dans l'environnement. Ces points de vue sont équivalents tant qu'on ne s'intéresse qu'au système lui-même sans lire ces mesures.

Leur multiplicité résulte de l'ambiguïté des représentations de l'opérateur densité d'un système quantique et de celle de l'équation pilote qui peut se mettre sous des formes de Lindblad différentes.

Les différentes descriptions de la décohérence d'un chat de phase du champ rappellent les divers modes de décohérence d'un qubit, qui peut être vue soit comme un saut de phase soudain, soit comme une lecture des états du qubit par l'environnement, soit encore comme un processus de diffusion lente de la phase quantique de la superposition d'états du qubit.

12.

Conclusion du cours et aperçu (provisoire) sur le cours de l'année 2004-2005

Rappelons les résultats essentiels obtenus cette année:

L'opérateur densité ρ_A d'un système physique A couplé à un environnement possède une infinité de formes possibles, toutes déductibles d'une fonction d'onde unique définie dans un espace étendu, obtenu en adjoignant à A un système auxiliaire B. Les différentes expressions de ρ_A correspondent à divers types de mesures non lues effectuées sur B.

On définit des mesures généralisées de A comme résultant d'un couplage de A avec B, suivi d'une mesure projective dans B. Ces mesures sont définies par un ensemble de générateurs, opérateurs de A, satisfaisant une relation de fermeture.

Toute évolution physique de ρ_A peut se décrire comme le résultat d'une mesure généralisée, comptant au plus N^2 générateurs où N est la dimension de l'espace de A (forme de Kraus du super-opérateur d'évolution du système).

Conclusion du cours de cette année (suite)

Lorsque A est couplé à un grand environnement, celui-ci perd très vite la mémoire de son interaction avec A et l'approximation de Markov permet de décrire l'évolution de ρ_A par une équation pilote, équation différentielle du premier ordre en temps, qui peut toujours s'exprimer à l'aide d'au plus N^2-1 opérateurs de sauts quantiques de A.

Ces opérateurs permettent de simuler l'évolution stochastique de l'opérateur densité du système, telle qu'on pourrait l'observer en effectuant une lecture continue de son environnement.

Nous avons décrit les trajectoires stochastiques pour quelques systèmes simples, qubits ou oscillateur dans un état de Fock, état cohérent ou superposition d'états cohérents (chats de Schrödinger). Nous avons généralisé l'étude des états cohérents et de leurs superpositions aux «pointer states», états stables vis à vis de la décohérence et non intriqués à leur environnement. Ces états jouent un rôle important dans la théorie de la mesure.

Cours 2004-2005: Contrôle de la décohérence (théorie et expériences)

Dans le cours de cette année, l'observation continue d'un système quantique unique couplé à un environnement a été décrit comme *une expérience de pensée* servant à déterminer les trajectoires stochastiques du système. Celles-ci sont en général des intermédiaires utiles pour le calcul de l'opérateur densité, qui contient toute l'information que l'on peut avoir sur le système.

Il existe cependant des expériences dans lesquelles ces trajectoires peuvent être *effectivement* observées, par mesure explicite continue effectuée sur un système quantique unique. Le système reste alors décrit par une fonction d'onde. *Sa cohérence peut être préservée, mais avec une phase quantique qui varie aléatoirement d'une réalisation de la mesure à une autre.* Nous décrirons quelques unes de ces expériences, déjà réalisées, ou en projet.

Nous chercherons également à répondre à une question essentielle: *la décohérence peut-elle être en pratique contrôlée, voire efficacement combattue afin de maintenir un système ouvert dans une superposition cohérente pour un temps très long, voire indéfini?* Cette question est importante pour améliorer la précision des mesures spectroscopiques ou métrologiques ou pour rendre possibles des opérations logiques complexes d'information quantique.

Aperçu sur le cours 2004-2005 (fin)

Plusieurs stratégies sont proposées pour essayer de contrôler ou de limiter la décohérence. Citons deux types de méthodes particulièrement importantes:

-La mise en œuvre de codes correcteurs d'erreurs qui consistent à mesurer sur le système un symptôme de décohérence, puis d'agir en conséquence pour corriger l'effet de décohérence et rétablir l'état antérieur du système. Ces méthodes exploitent de façon systématique les propriétés de l'intrication multi-particule. Certaines sont directement inspirées par les codes correcteurs des ordinateurs classiques (codage redondant de l'information). D'autres s'apparentent plutôt à des méthodes d'asservissement (feed-back) classiques.

--Le développement de méthodes de préparation et de contrôle de l'environnement (environnement engineering) qui consistent à fabriquer des réservoirs artificiels admettant pour pointer states les états que l'on cherche à préserver de la décohérence.

Nous donnerons des exemples de ces méthodes, déjà mises en œuvre dans des expériences, ou en projet. Nous essayerons d'analyser leurs limites.

Le cours sera accompagné de séminaires sur des avancées du domaine de recherche, ou sur la physique atomique et l'optique quantique au sens large.

Premier cours et premier séminaire le Mardi 5 Octobre 2004.