

Survol de l'optique quantique

Les superpositions macroscopiques d'états (SME) que nous considèrerons dans ce cours impliquent soit des **photons**, soit des **bosons condensés**. Pour comprendre ces systèmes, le formalisme de l'optique quantique joue donc un rôle essentiel, soit de façon directe (cas des photons) soit en raison de l'analogie entre condensats atomiques et champs électromagnétiques (cas des bosons).

Cette leçon est donc consacrée à un survol du formalisme utile de l'optique quantique. Nous commencerons par rappeler l'analogie entre le champ électromagnétique et un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantifiés caractérisés par leurs opérateurs de création et d'annihilation de photons. Nous introduirons ensuite les observables importantes du champ (énergie, nombre de photons et quadratures). Puis nous décrirons des états du champ associés à un seul mode, en insistant particulièrement sur les états cohérents ou états quasi-classiques du champ et sur leurs superpositions (états « chats de Schrödinger »). Nous rappellerons ensuite comment on peut décrire le couplage du champ avec des atomes et nous montrerons comment une source atomique permet de générer des photons uniques alors qu'une source de courant classique crée des champs cohérents. Nous présenterons enfin un modèle simple de détecteur de photons et parlerons de signaux de comptage de photons simple et double.

Décomposition du champ électromagnétique libre en ondes planes

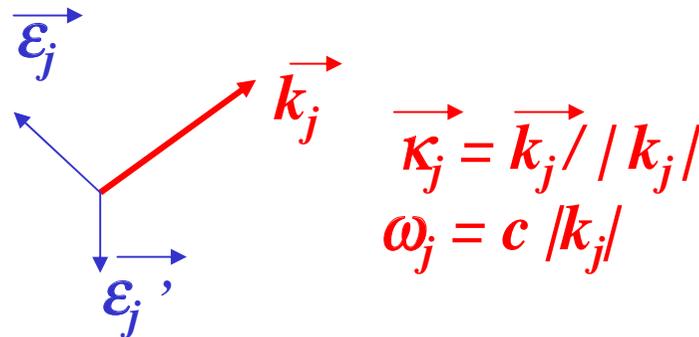
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_j A_j \left[a_j \vec{\varepsilon}_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} + a_j^* \vec{\varepsilon}_j^* e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} \right] \quad (2-1) \quad \text{Potentiel vecteur}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{d\vec{A}(\vec{r}, t)}{dt} = i \sum_j E_j \left[a_j \vec{\varepsilon}_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} - a_j^* \vec{\varepsilon}_j^* e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} \right]; (E_j = \omega_j A_j) \quad (2-2)$$

Champ électrique

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = i \sum_j \left(\frac{E_j}{c} \right) \left[a_j \vec{\kappa}_j \times \vec{\varepsilon}_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} - a_j^* \vec{\kappa}_j \times \vec{\varepsilon}_j^* e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} \right] \quad (2-3)$$

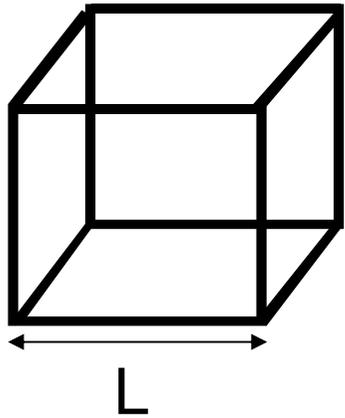
Champ magnétique



$a_j(t) = a_j(0) e^{-i\omega_j t}$: variables normales

Le champ est une somme d'oscillateurs harmoniques indépendants

Somme discrète de modes
(« boîte de quantification »)



$$\begin{aligned} k_x &= n_x 2\pi / L, \\ k_y &= n_y 2\pi / L, \\ k_z &= n_z 2\pi / L \end{aligned}$$

$$\Sigma_j \longleftrightarrow 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \iiint d^3 \vec{k}$$

Hamiltonien (énergie) du champ:

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \right) d^3 \vec{r} = \epsilon_0 L^3 \sum_j E_j^2 (a_j a_j^* + a_j^* a_j) \quad (2-4)$$

$$H = \sum_j \frac{\hbar \omega_j}{2} (a_j a_j^* + a_j^* a_j) \quad (2-5) \quad \text{avec:} \quad E_j = \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2 \epsilon_0 L^3}}$$

$$H = \sum_j \hbar \omega_j (X_j^2 + P_j^2) \quad (2-6)$$

$$a_j = \sqrt{m \omega_j / 2 \hbar} x_j + (i / \sqrt{2 m \hbar \omega_j}) p_j = X_j + i P_j \quad (2-7)$$

Quantification (opérateurs d'annihilation et de création de quanta):

$$x_j \rightarrow \hat{x}_j; p_j \rightarrow \hat{p}_j \quad \text{avec} \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i \hbar \delta_{jk} \quad (2-8)$$

$$\rightarrow [\hat{X}_j, \hat{P}_k] = \frac{i}{2} \delta_{jk} \rightarrow [\hat{a}_j, \hat{a}_k^+] = \delta_{jk} \quad (2-9)$$

Les opérateurs sont représentés «sans chapeau» dans la suite

Quantification en onde plane ou ondes stationnaires d'une cavité

Opérateurs associé à un mode $(\vec{k}, \vec{\varepsilon})$ dans le point de vue de Heisenberg:

$$a(t) = a(0) e^{-i\omega t} \quad (2-10)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}} \vec{\varepsilon} \left(a(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \quad (2-11)$$

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2-12)$$

(Dans le point de vue de Schrödinger où E ne dépend pas de t, le champ est donné par les expressions ci-dessus où a(t) est remplacé par a)

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}} \quad (2-13)$$

Fluctuations du vide ou « champ par photon » dans la boîte de quantification de volume $V=L^3$

L est souvent un paramètre de quantification que l'on fait tendre vers l'infini à la fin des calculs, de façon à retrouver un continuum de modes. Le champ par photon tend alors vers 0. Dans le cas de l'Electrodynamique en cavité, le volume V de quantification reste fini et a un sens physique précis: c'est le volume physique de la cavité réelle dans laquelle le champ est confiné.

Au lieu de décomposer le champ en ondes planes, on le décompose alors sur les ondes stationnaires qui satisfont les conditions aux limites de la cavité. Le champ dans un de ces modes s'écrit (point de vue de Schrödinger):

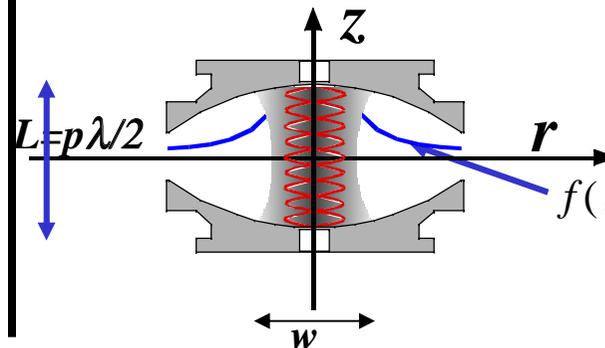
$$\vec{E}(\vec{r}) = i E_0 \vec{\varepsilon} \left(a f(\vec{r}) - a^\dagger f^*(\vec{r}) \right) \quad (2-14)$$

où f(r) est la fonction décrivant la variation spatiale du champ dans le mode. Le volume du mode est:

$$V = \iiint |f(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} \quad (2-15)$$

et le champ par photon: $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \quad (2-16)$

Cavité Fabry-Perrot: le mode de symétrie cylindrique correspond à une onde sinusoidale stationnaire le long de Oz multipliée par une Gaussienne de largeur w dans la direction transverse



$$f(r, z=0) = \exp(-r^2/w^2)$$

$$V = \frac{\pi}{4} L w^2$$

Opérateurs quadrature du champ

Opérateurs qui dans chaque mode correspondent aux observables **X** et **P** de l'oscillateur:

$$X = \frac{a + a^\dagger}{2} ; P = \frac{a - a^\dagger}{2i} = \frac{e^{-i\pi/2} a + e^{i\pi/2} a^\dagger}{2} \quad (2-17)$$

et de façon plus générale les combinaisons de a et a^\dagger dépendant d'une phase φ de la forme

$$X_\varphi = \frac{e^{-i\varphi} a + e^{i\varphi} a^\dagger}{2} ; X_{\varphi+\pi/2} = \frac{e^{-i\varphi} a - e^{i\varphi} a^\dagger}{2i} \quad (2-18)$$

qui satisfont les relations de commutation:

$$[X_\varphi, X_{\varphi+\pi/2}] = \frac{i}{2} \quad (2-19)$$

correspondant aux «relations d'incertitude»:

$$\Delta X_\varphi \Delta X_{\varphi+\pi/2} \geq \frac{1}{4} \quad (2-20)$$

Si on préfère introduire des quantités ayant la dimension d'un champ électrique, on écrira plutôt:

$$X_\varphi^E = E_0 X_\varphi ; [X_\varphi^E, X_{\varphi+\pi/2}^E] = iE_0^2 / 2 = i\hbar\omega / 4\varepsilon_0 V$$

$$\Delta X_\varphi^E \Delta X_{\varphi+\pi/2}^E \geq \frac{E_0^2}{4} = \hbar\omega / 8\varepsilon_0 V \quad (2-21)$$

Voir plus loin comment on mesure ces observables

Base des états propres d'une quadrature

(*analogie avec un oscillateur mécanique*)

L'état propre de la quadrature X_φ correspondant à la valeur propre réelle continue x sera noté $|x\rangle_\varphi$:

$$X_\varphi |x\rangle_\varphi = x |x\rangle_\varphi \quad (2-22)$$

Les états $|x\rangle_\varphi$, non normalisables, obéissent aux relations d'orthogonalité et de fermeture:

$${}_\varphi \langle x | x' \rangle_\varphi = \delta(x - x'); \int |x\rangle_\varphi \langle x| dx = 1 \quad (2-23)$$

et le passage d'une base $|x\rangle_\varphi$ à la base de l'observable conjuguée $|x\rangle_{\varphi+\pi/2}$ s'écrit (transformation de Fourier):

$$\begin{aligned} |x\rangle_{\varphi+\pi/2} &= \int dy |y\rangle_{\varphi\varphi} \langle y | x \rangle_{\varphi+\pi/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2i x y} |y\rangle_\varphi \end{aligned} \quad (2-24)$$

Facteur 2 à cause du choix de normalisation des variables conjuguées (1/2 dans Eq.2-19)

Etats propres du nombre de photons a^+a dans un mode

Le vide: $a^+a |0\rangle = 0$

Etat à zéro photon: état fondamental du champ dans le mode (d'énergie $\hbar\omega/2$) et état propre de valeur propre 0 de a :

$$a |0\rangle = 0 \quad (2-25)$$

Valeurs moyennes nulles des quadratures du champ dans cet état:

$$\langle 0 | X_\varphi | 0 \rangle = 0 \quad (2-26)$$

Fluctuation de la quadrature:

$$\Delta X_\varphi^{(0)} = \sqrt{\langle 0 | X_\varphi^2 | 0 \rangle} = 1/2 \quad (2-27)$$

(Le vide a des fluctuations isotropes «minimales»)

Distribution de probabilité $P^{(0)}(x)$ de la mesure d'une quadrature X_φ dans le vide (analogie avec l'état fondamental d'un oscillateur mécanique):

$$P^{(0)}(x) = \left| \langle x | 0 \rangle \right|^2 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} e^{-2x^2} \quad (2-28)$$

Le vide présente des fluctuations gaussiennes et isotropes du champ autour de 0.

Etat de Fock à n photons
(énergie $(n+1/2)\hbar\omega$):

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad ; \quad a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (2-29) \quad (2-30)$$

$$|n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (2-31)$$

Valeur moyenne et fluctuation des quadratures:

$$\langle n | X_\varphi | n \rangle = 0 \quad ; \quad \Delta X_\varphi^{(n)} = \sqrt{\langle n | X_\varphi^2 | n \rangle} = \frac{1}{2} \sqrt{2n+1} \quad (2-32)$$

(un état de Fock de $n > 0$ a des fluctuations isotropes non minimales)

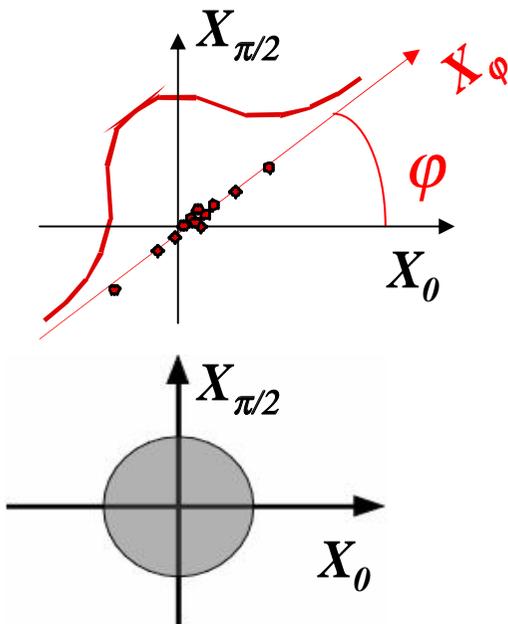
La distribution de probabilité $P^{(n)}(x)$ de la mesure d'une quadrature X_φ dans l'état $|n\rangle$ s'obtient à partir de l'expression déduite de l'analogie avec un oscillateur:

$$P^{(n)}(x) = \left| \langle x | n \rangle \right|^2 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} e^{-2x^2} \left(H_n(x\sqrt{2}) \right)^2 \quad (2-33)$$

où $H_n(x)$ est le polynôme d'Hermite de rang n .

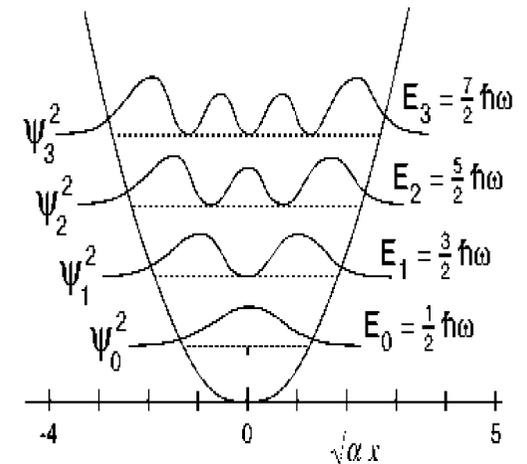
Représentation graphique qualitative des fluctuations de quadrature dans un état de Fock

Le vide présente des fluctuations gaussiennes et isotropes du champ autour de 0. La largeur de la distribution de ces fluctuations est (en unité de champ E_0) égale à $1/2$.

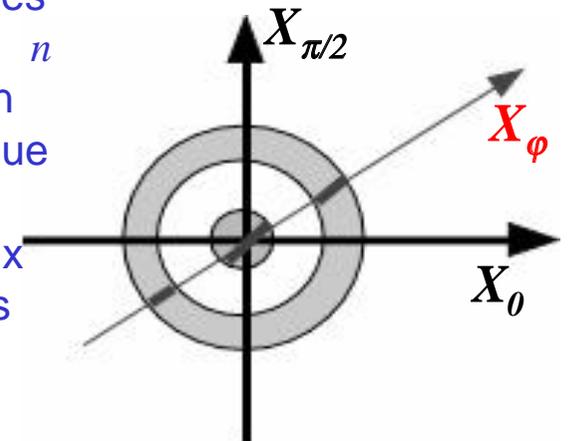


Représentation dans l'espace des phases de la quadrature X_φ comme un axe faisant l'angle φ avec l'axe X_0 . Un ensemble de mesures de X_φ dans le vide donne une distribution gaussienne de points. Il est naturel de représenter le vide comme un cercle de diamètre unité centré à l'origine de l'espace des phases

Distribution de la quadrature X_φ pour les états de Fock $n = 0, 1, 2$ et 3



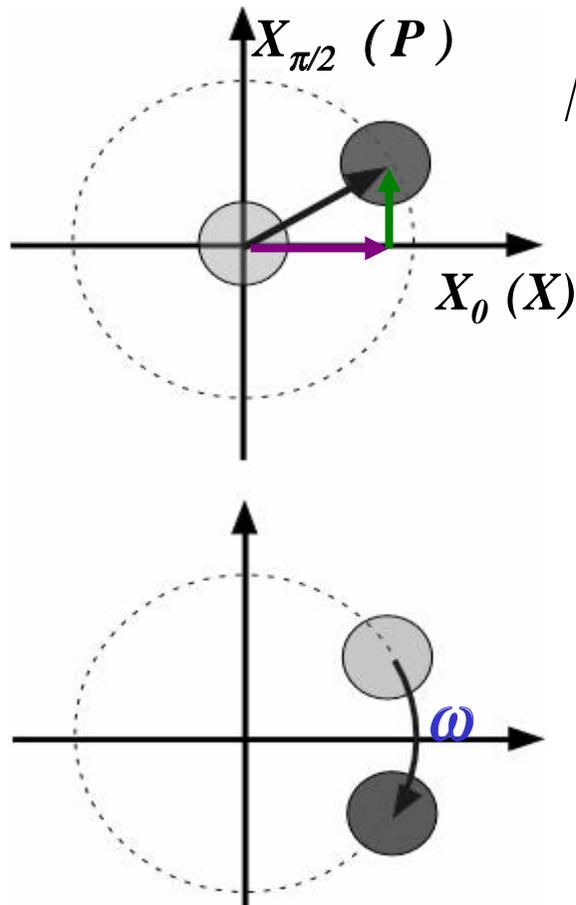
Représentation qualitative dans l'espace des phases de l'état de Fock $n = 2$: l'intersection avec l'axe X_φ indique les segments correspondant aux valeurs x les plus probables...



Etats cohérents d' un mode du champ

(voir leçon 3 du cours 2001-2002)

L'opérateur unitaire $D(\alpha) = \exp[\alpha a^+ - \alpha^* a]$ décrit une translation dans l'espace des phases dans la direction dont les projections sur X_0 et $X_{\pi/2}$ sont $\alpha_1 = \text{Re}(\alpha)$ et $\alpha_2 = \text{Im}(\alpha)$. Lorsqu'on applique cette translation au vide, le paquet Gaussien centré à l'origine est déplacé. Il se met ensuite à tourner dans l'espace des phases sans se déformer. Il s'agit d'un état cohérent quasi-classique, la meilleure approximation possible d'un oscillateur classique.



$$|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)|0\rangle \quad (2-34)$$

A partir du théorème de Glauber ($e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$ si $[A,B]$ commute avec A et B), on montre:

$$D(\alpha) = e^{-i\alpha_1\alpha_2} \underbrace{\exp(2i\alpha_2 X_0)}_{\text{Translation de } \alpha_2 \text{ le long de la quadrature } X_{\pi/2}} \underbrace{\exp(-2i\alpha_1 X_{\pi/2})}_{\text{Translation de } \alpha_1 \text{ le long de la quadrature } X_0} \quad (2-35)$$

Déphasage

Evolution:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (2-36)$$

Interprétation simple en terme d'oscillateur mécanique

Rappel des propriétés des états cohérents

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^+ - \alpha^* a] = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) \quad (2-37)$$

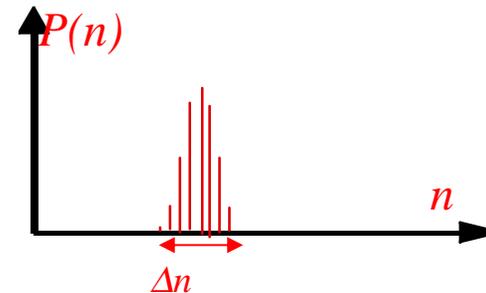
Décomposition sur les états $|n\rangle$ et l'évolution dans le temps de l'état cohérent:

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha) |n\rangle \quad \text{avec} \quad C_n(\alpha) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (2-38)$$

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+1/2)\omega t} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

La loi de Poisson pour la distribution de n :

$$\bar{n} = |\alpha|^2 \quad ; \quad \frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (2-39)$$



$|\alpha\rangle$ est état propre de a avec la v.p. α (attention: a non hermitique et les $|a\rangle$ non orthogonaux):

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \text{et} \quad \langle\alpha|a^+ = \langle\alpha|\alpha^* \quad (2-40)$$

Produit scalaire:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-(|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \alpha^*\beta)}; \quad |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad (2-41)$$

Etats quasi-orthogonaux lorsque $|\alpha-\beta| \gg 1$

Relation de fermeture:

$$\frac{1}{\pi} \iint d\alpha_1 d\alpha_2 |\alpha\rangle \langle\alpha| = 1 \quad (2-42)$$

Distribution de la quadrature X_0 dans un état cohérent:

L'amplitude de probabilité de trouver x lorsqu'on mesure X_0 dans l'état $|\alpha\rangle$ est :

$$\langle x|\alpha\rangle = \langle x|D(\alpha)|0\rangle = \exp(-i\alpha_1\alpha_2) \langle x|\exp(2i\alpha_2 X_0)|x\rangle \langle x|\exp(-2i\alpha_1 X_{\pi/2})|0\rangle \quad (2-43)$$

Relation de fermeture sur la base $|y\rangle_{\pi/2}$
des états propres de $X_{\pi/2}$

$$\begin{aligned} \langle x|\alpha\rangle &= \exp(-i\alpha_1\alpha_2) \exp(2i\alpha_2 x) \int dy \langle x|y\rangle_{\pi/2} \exp(-2i\alpha_1 y) \langle y|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-i\alpha_1\alpha_2) \exp(2i\alpha_2 x) \int dy \exp[2i(x - \alpha_1)y] \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-y^2) \end{aligned} \quad (2-44)$$

Utiliser eq (2-24):

L'intégration sur y fait apparaître la Gaussienne translatée le long de la quadrature X_0 :

$$\langle x|\alpha\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-i\alpha_1\alpha_2) \exp(2i\alpha_2 x) \exp[-(x - \alpha_1)^2] \quad (2-45)$$

Modulation exprimant la translation le long de $X_{\pi/2}$

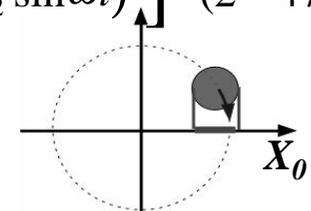
D'où la distribution de probabilité de X :

$$P(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp[-2(x - \alpha_1)^2] \quad (2-46)$$

et son évolution temporelle:

$$P(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp[-2(x - \alpha_1 \cos\omega t - \alpha_2 \sin\omega t)^2] \quad (2-47)$$

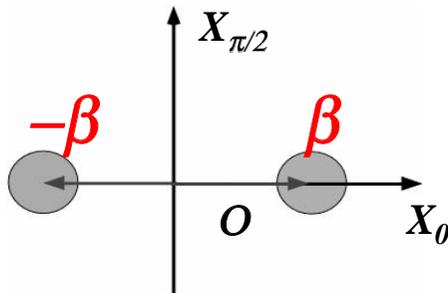
La rotation de l'état cohérent dans le plan de phase entraîne une oscillation du centre du paquet Gaussien le long de X_0 (ainsi que dans n'importe quelle autre direction de quadrature)



Superposition d' états cohérents

Parmi les états du rayonnement, nous allons nous intéresser particulièrement aux superpositions de deux états cohérents quasi-orthogonaux, représentés par deux cercles disjoints de l' espace des phases. Ces états seront des prototypes des « chats de Schrödinger ». Nous verrons plus loin comment on peut les préparer et les étudier et s'en servir pour analyser le phénomène de décohérence. Nous nous limiterons ici à en donner quelques propriétés remarquables.

Exemple de « chat de phase »: superposition de deux états cohérents quasi-orthogonaux de phases opposées:



β réel:
 $\beta = \beta_1; \beta_2 = 0$

$$|\Psi_{chat}\rangle = \frac{|\beta\rangle + |-\beta\rangle}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\beta|^2})}} \approx (1/\sqrt{2})(|\beta\rangle + |-\beta\rangle) \quad (2-48)$$

Ou encore sous forme d'opérateur densité:

$$\rho_{chat} \approx \frac{1}{2} (|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta| + \underbrace{|\beta\rangle\langle-\beta| + |-\beta\rangle\langle\beta|}_{\text{Termes de cohérence}}) \quad (2-49)$$

$$\left(\rho_{chat} \neq \rho_{mélange} = \frac{1}{2} (|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta|) \right)$$

Distribution de la quadrature X_0 :

$$P_0^{(chat)}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-2(x-\beta)^2} + e^{-2(x+\beta)^2} \right) \quad (2-50)$$

Somme de deux gaussiennes symétriques par rapport à $x=0$. Pas d'interférence.

Distribution de la quadrature $X_{\pi/2}$:

$$P_{\pi/2}^{(chat)}(x) \approx \frac{1}{2} \left| \langle x|\beta\rangle_{\pi/2} + \langle x|-\beta\rangle_{\pi/2} \right|^2 \quad (2-51)$$

avec:

$$\langle x|\beta\rangle_{\pi/2} = \langle x|\beta e^{-i\pi/2}\rangle = \langle x|-i\beta\rangle =$$

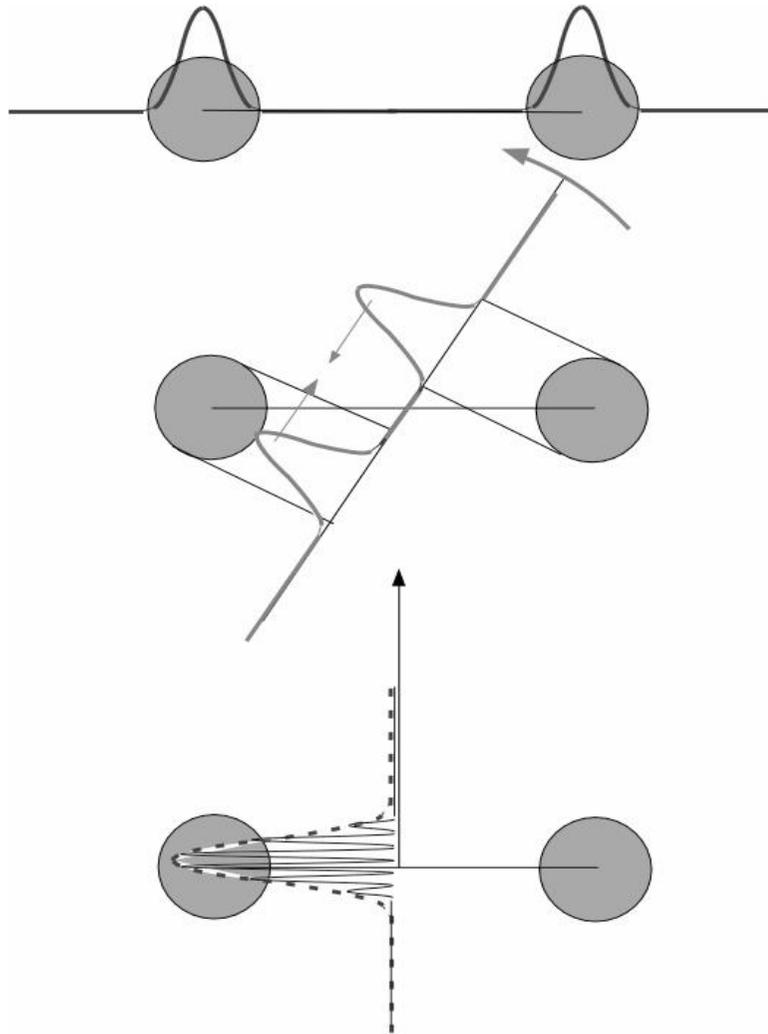
$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-2i\beta x) \exp(-x^2) \quad (2-52)$$

soit:

$$P_{\pi/2}^{(chat)} \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-2x^2} (1 + \cos 4\beta x) \quad (2-53)$$

Gaussienne centrée en $x=0$, modulée par un terme d'interférence avec franges de période $1/4\beta$ d'autant plus petite que β est plus grand.

Evolution en fonction de φ de la distribution de quadrature X_φ pour un chat de phase



La quadrature en phase (ou en opposition de phase) avec les deux composantes du chat a une distribution correspondant à la somme de deux Gaussiennes disjointes.

Lorsqu'on mesure une quadrature faisant un angle non nul avec la direction précédente, les deux Gaussiennes se rapprochent symétriquement.

Lorsqu'on atteint un angle φ voisin de $\pi/2$, les deux Gaussiennes se chevauchent et interfèrent. Les franges résultantes sont d'autant plus fines que les deux composantes sont plus séparées. L'interférence, qui ne se produit pas pour un mélange statistique, est une signature du caractère cohérent de la superposition.

Au lieu de faire tourner la quadrature à t fixé, on peut décrire de même l'évolution d'une quadrature en fonction du temps: image de deux paquets d'onde Gaussiens qui oscillent en opposition de phase et interfèrent quand ils se croisent en $x=0$

Couplage entre champ et charges: modèles de sources et de détecteurs

Le champ interagit avec des particules chargées (électrons atomiques, courants...) et ces interactions sont essentielles pour décrire l'émission du champ (sources) et sa mesure (détecteurs). Le Hamiltonien décrivant l'évolution du système « charges + champ » peut s'écrire en jauge de Coulomb et à la limite non-relativiste:

$$H_{charges+champ} = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left(\vec{p}_i - q_i \vec{A}(\vec{r}_i) \right)^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots) + \sum_j \hbar \omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) \quad (2-54)$$

Les $q_i, m_i, \vec{r}_i, \vec{p}_i$ sont respectivement la charge, masse, position et impulsion de la particule i . U est le potentiel Coulombien des charges, qui ne dépend que de leurs positions. La version classique de ce Hamiltonien redonne l'équation dynamique des charges sous l'effet de la force de Lorentz produite par le champ, et les équations de Maxwell décrivant l'évolution des champs produits par la distribution de charges et de courants.

Si le mouvement des charges est imposé (indépendant du champ) et classique (fluctuations négligeables des \vec{r}_i et \vec{p}_i), le Hamiltonien du champ se réduit à:

$$H_{champ}^{sources\ classiques} = \sum_j \hbar \omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) - \iiint d^3\vec{r} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i); \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (2-55)$$

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ est la distribution classique de courants. Ce Hamiltonien peut s'obtenir à partir de l'expression du Lagrangien classique du champ. On peut également le retrouver à partir de l'expression générale de $H_{charges+champ}$ en y faisant tendre les m_i vers l'infini tout en maintenant les $\vec{p}_i/m_i = \vec{v}_i$ finis. Le mouvement des charges ne dépend plus alors de A . Il faut cependant garder le terme linéaire en A du Hamiltonien pour décrire l'action des courants imposés sur le champ. Le terme d'interaction devient:

$$H_{int} = - \sum_i q_i \vec{v}_i(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}_i(t)) \quad (2-56)$$

ce qui est bien identique au terme de (2-55).

Source atomique de photon: oscillation de Rabi et préparation d'un état de Fock n=1 dans une cavité

atome à *un électron* couplé à *un mode* du champ dans une cavité. Processus résonnants ou quasi-résonnants à 1 photon (on néglige le terme en A^2 qui crée ou annihile 0 ou 2 photons):

$$H_{\text{charges+champ}} = H_{\text{at}} + H_{\text{champ}} + H_{\text{int}}$$

$$H_{\text{at}} = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}); H_{\text{champ}} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{q}{m} \frac{E}{\omega} [(\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}) a f(\vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) a^\dagger f^*(\vec{r})] \quad (2-57)$$

H_{at} a deux niveaux d'énergie $|e\rangle$ et $|g\rangle$ tels que la transition $e \rightarrow g$ est résonnante (ou quasi-résonnante) avec le champ. L'approximation du champ tournant («RWA») permet d'écrire:

$$H_{\text{int}} \approx -\frac{q}{m} \frac{E}{\omega} [f(\vec{r}) (\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}})_{eg} |e\rangle \langle g| a + f^*(\vec{r}) (\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}^*)_{ge} |g\rangle \langle e| a^\dagger] \quad (2-58)$$

Absorption de photon
Émission de photon

Soit, en introduisant la fréquence de Rabi $\Omega(r)$:

$$H_{\text{int}} \approx \frac{\hbar\Omega}{2} [|e\rangle \langle g| a + |g\rangle \langle e| a^\dagger];$$

$$\Omega(\vec{r}) = -\frac{q}{m} f(\vec{r}) (\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}})_{eg} \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega\epsilon_0 V}} \quad (2-59)$$

(on peut prendre sans perte de généralité f et $(p \cdot \mathcal{E})_{eg}$ réels).

Emission et absorption réversible d'un photon à résonance exacte (atome en $r=0$; on pose $\Omega(0) = \Omega$)

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle |0\rangle \rightarrow$$

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\Omega t / 2) |e\rangle |0\rangle - i \sin(\Omega t / 2) |g\rangle |1\rangle \quad (2-60)$$

Oscillation de Rabi et Intrication atome-champ.
Pour $\Omega t = \pi$, création d'un état de Fock à un photon dans le mode

Atome à deux niveaux et continuum de modes: émission spontanée de photon dans l'espace libre

Hamiltonien à l'approximation RWA:

$$H_{\text{int}} = -\frac{q}{m} \sum_j \frac{E_j}{\omega_j} (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_j)_{eg} e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} |e\rangle \langle g| a_j - \frac{q}{m} \sum_j \frac{E_j}{\omega_j} (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_j^*)_{ge} e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} |g\rangle \langle e| a_j^\dagger \quad (2-61)$$

Solution de l'équation d'évolution en représentation d'interaction (d'après Wigner-Weisskopf, on néglige le terme de Lambshift de déplacement des niveaux, qui renormalise leurs énergies):

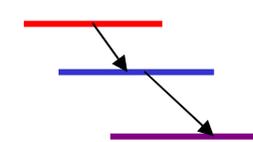
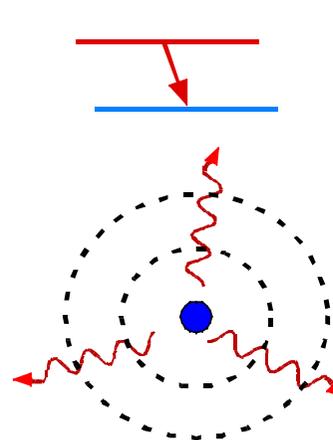
$$|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{-\Gamma t/2} |e, 0\rangle + \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \sum_j \langle g, 1_j | H_{\text{int}} |e, 0\rangle \frac{1 - e^{-\Gamma t/2} e^{-i(\omega_{eg} - \omega_j)t}}{i(\omega_{eg} - \omega_j - i\Gamma/2)} |g, 1_j\rangle \quad (2-62)$$

Γ est la largeur naturelle de l'état e , qui s'exprime simplement en fonction de $(p \cdot \epsilon)_{eg}$ et ω_{eg} .

Au bout d'un temps $t \gg 1/\Gamma$, le champ est décrit par une superposition d'états $|1_j\rangle$ à un photon, (distribution Lorentzienne en fréquence de largeur Γ). Le paquet d'onde à un photon correspondant s'écrit (on laisse au lecteur le calcul de l'expression des c_j à partir de 2-61 et 2-62):

$$|\Psi(t \gg 1/\Gamma)\rangle = \sum_j c_j a_j^\dagger |0\rangle \quad (2-63)$$

Paquet d'onde d'un photon dont la distribution angulaire est déterminée par $(p \cdot \epsilon)_{eg}$ dont les c_j dépendent.



On décrit de même une source atomique pouvant émettre une paire de photons en coïncidence, sur une cascade de deux transitions

Source de courant classique: génération d' états cohérents et translation du champ dans l' espace des phases

Hamiltonien du champ couplé à un courant classique:

$$H_{champ} = H_{libre} - \iiint d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (2-64)$$

Considérons le cas où un courant monochromatique de densité:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r}) \cos \omega t$$

excite un mode résonnant du champ dans une cavité. En faisant l'approximation RWA, on met l'interaction sous la forme:

$$H_{int} = - \iiint d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \approx - (s_0 e^{i\omega t} a + s_0^* e^{-i\omega t} a^+) \quad (2-65)$$

où

$$s_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{8\epsilon_0 \omega V}} \iiint d^3\vec{r} f(\vec{r}) (\vec{j}_0(\vec{r}) \cdot \vec{\epsilon}) \quad (2-66)$$

décrit le recouvrement du mode avec la distribution de courant source.

et en passant en représentation d'interaction:

$$\tilde{H}_{int} = e^{iH_{libre}t/\hbar} H_{int} e^{-iH_{libre}t/\hbar} = - (s_0 a + s_0^* a^+) \quad (2-67)$$

D'où l'évolution du champ à partir du vide à t=0:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle &= e^{-i\tilde{H}_{int}t/\hbar} |0\rangle = \left(e^{i\frac{s_0 t}{\hbar} a + i\frac{s_0^* t}{\hbar} a^+} \right) |0\rangle \\ &= D(is_0 t / \hbar) |0\rangle = |\alpha = is_0 t / \hbar\rangle \quad (2-68) \end{aligned}$$

Le courant classique génère un état cohérent dans le mode, dont l'amplitude croît proportionnellement au temps (nombre moyen de photons en t²).

L'amplitude moyenne du champ généré est:

$$|is_0 t / \hbar| \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} = \frac{t}{4\epsilon_0 V} \int d^3\vec{r} f(\vec{r}) (\vec{j}_0(\vec{r}) \cdot \vec{\epsilon}) \quad (2-69)$$

qui est une quantité indépendante de h (c'est l'amplitude donnée par un calcul entièrement classique): le champ rayonné par une source classique imposée est un état cohérent dont l'amplitude est donnée par le calcul classique correspondant. Il correspond à une translation du vide et possède les mêmes fluctuations que celui-ci.

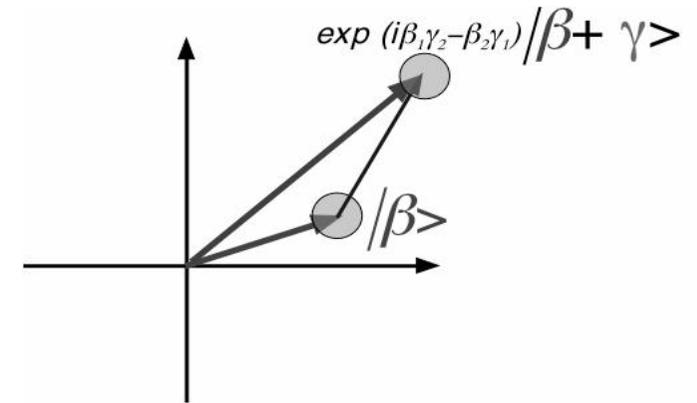
Translation du champ dans l'espace des phases par action d'une source classique pendant un temps donné t

Une translation quelconque $D(\gamma)$ d'un champ dans l'espace des phases est réalisée par l'application pendant un temps t donné d'une source classique d'amplitude et de phase appropriées ($\gamma = i s_0 t / \hbar$). /

Translation d'un champ cohérent:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(0)\rangle &= |\beta\rangle \rightarrow |\tilde{\Psi}(t)\rangle = D(\gamma = i s_0 t / \hbar) |\beta\rangle \\ &= \exp(\gamma a^+ - \gamma^* a) \exp(\beta a^+ - \beta^* a) |0\rangle = e^{i(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)} |\beta + \gamma\rangle \quad (2-70) \end{aligned}$$

(translation du vecteur représenté par le complexe γ accompagnée d'un déphasage global de l'état)



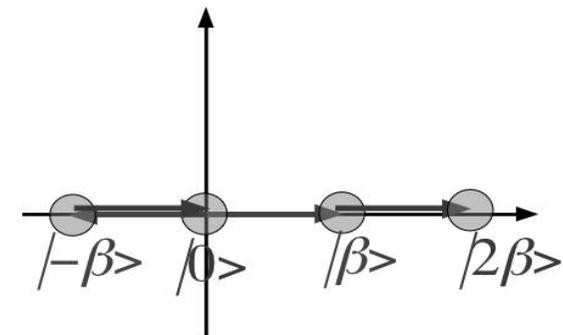
Translation d'un chat de phase ($\beta = \beta_1$ réel, $\beta_2=0$):

$$|\tilde{\Psi}(0)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (|\beta\rangle + |-\beta\rangle) \rightarrow |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[e^{i(\beta \gamma_2)} |\beta + \gamma\rangle + e^{-i(\beta \gamma_2)} |-\beta + \gamma\rangle \right] \quad (2-71)$$

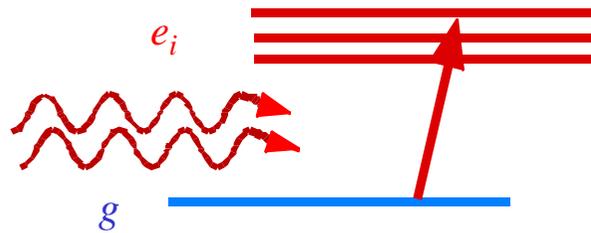
Cas particulier $\gamma = \beta$:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) [|2\beta\rangle + |0\rangle] \quad (2-72)$$

Chat de phase transformé en chat d'amplitude (voir leçon 1)



Modèle de compteur de photons



Atome possédant un niveau fondamental g et un « continuum » de niveaux excités i (modèle de photo-ionisation).

Processus d'absorption gouverné par le terme d'interaction champ-atome (RWA):

$$H_{\text{int}} \approx -\frac{q}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \approx -\frac{q}{m} \sum_i (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon})_{ig} |e_i\rangle \langle g| \sum_j \frac{E_j}{\omega_j} a_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} + h.c. \quad (2-73)$$

On a représenté ici l'interaction d'un champ multi-mode de polarisation donnée e avec l'atome. On notera que le processus résonnant concerne essentiellement des modes dont la fréquence ω_j est voisine de la fréquence moyenne ω_0 de la « bande d'absorption ». On peut donc écrire:

$$H_{\text{int}} \approx - \underbrace{\sum_i \frac{q}{im\omega_0} (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon})_{ig} |e_i\rangle \langle g|}_{\mathcal{K}_{ig}} \underbrace{\sum_j iE_j a_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}}_{E^+(\vec{r})} + h.c. \quad (2-74)$$

Il est commode de séparer les parties de fréquence positive et négatives du champ électrique:

$$E^+(\vec{r}) = i \sum_j E_j a_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} ; \quad E^-(\vec{r}) = -i \sum_j E_j a_j^+ e^{-i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} \quad (2-75)$$

Modèle de compteur de photons (suite)

E^+ et E^- annihilent et créent respectivement des photons. En définissant les coefficients de couplage κ_{ig} , on met le terme d'interaction sous la forme:

$$H_{\text{int}} = -\sum_i \left(\kappa_{ig} |e_i\rangle \langle g| E^+(\vec{r}) - \kappa_{ig}^* |g\rangle \langle e_i| E^-(\vec{r}) \right) \quad (2-76)$$

Passons enfin en représentation d'interaction par rapport à l'hamiltonien non couplé:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{int}} &= e^{i(H_{at} + H_{\text{champ}})t/\hbar} H_{\text{int}} e^{-i(H_{at} + H_{\text{champ}})t/\hbar} \\ &= -\sum_i \left(\kappa_{ig} |e_i\rangle \langle g| e^{i\omega_{ig}t} E^+(\vec{r}, t) - \kappa_{ig}^* e^{-i\omega_{ig}t} |g\rangle \langle e_i| E^-(\vec{r}, t) \right) \quad (2-77) \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître E^+ et E^- dans le point de vue de Heisenberg (opérateurs dépendant du temps). En supposant qu'à $t=0$ le système est dans l'état $|\tilde{\Psi}(0)\rangle = |g\rangle |\tilde{\Psi}_{\text{champ}}\rangle$ on obtient au premier ordre de la théorie des perturbations l'état à l'instant t :

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(t)\rangle &\approx |g\rangle |\tilde{\Psi}_{\text{champ}}\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \tilde{H}_{\text{int}}(t') |g\rangle |\tilde{\Psi}_{\text{champ}}\rangle \\ &= |g\rangle |\tilde{\Psi}_{\text{champ}}\rangle - \frac{1}{i\hbar} \sum_i \kappa_{ig} |e_i\rangle \int_0^t dt' e^{i\omega_{ig}t'} E^+(\vec{r}, t') |\tilde{\Psi}_{\text{champ}}\rangle \quad (2-78) \end{aligned}$$

On obtient alors la probabilité totale de photo-ionisation à l'instant t en sommant les contributions de tous les états finals:

$$P_e(t) = \sum_i \langle \tilde{\Psi}(t) | e_i \rangle \langle e_i | \tilde{\Psi}(t) \rangle \quad (2-79)$$

Taux de comptage de photons simple et double

La probabilité totale d'excitation de l'atome à l'instant t , $P_e(t)$, s'écrit:

$$P_e(t) = \sum_i \langle \tilde{\Psi}(t) | e_i \rangle \langle e_i | \tilde{\Psi}(t) \rangle = \frac{1}{\hbar^2} \sum_i |\kappa_{ig}|^2 \int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{i\omega_{ig}(t'-t'')} \langle \tilde{\Psi}_{champ} | E^-(\vec{r}, t'') E^+(\vec{r}, t') | \tilde{\Psi}_{champ} \rangle \quad (2-80)$$

La sommation sur les états finals i de l'atome est assimilable à une intégration sur un continuum. On suppose la variation du couplage $|\kappa_{ig}|^2$ suffisamment lente pour le remplacer par une constante $|\kappa_0|^2$ sur la largeur du continuum. L'intégration de l'exponentielle sur ω_{ig} fait alors apparaître la fonction $2\pi \delta(t'-t'')$. On obtient donc finalement:

$$P_e(t) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\kappa_0|^2 \int_0^t \langle \tilde{\Psi}_{champ} | E^-(\vec{r}, t') E^+(\vec{r}, t') | \tilde{\Psi}_{champ} \rangle \quad (2-81)$$

La dérivée $dP_e(t)/dt$ représente la probabilité de détecter un processus de photo-ionisation par unité de temps à l'instant t , à l'aide d'un atome en \mathbf{r} . C'est le taux de comptage simple $w_1(\mathbf{r}, t)$:

$$w_1(\vec{r}, t) = \frac{dP_e(t)}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\kappa_0|^2 \langle \tilde{\Psi}_{champ} | E^-(\vec{r}, t) E^+(\vec{r}, t) | \tilde{\Psi}_{champ} \rangle \quad (2-82)$$

$w_1(\mathbf{r}, t)$ est proportionnel à la valeur moyenne dans l'état du champ de l'opérateur hermitique $E^-(\mathbf{r}, t)E^+(\mathbf{r}, t)$, produit des parties de fréquence négative et positives du champ électrique (attention à l'ordre: la partie de fréquence positive est à droite).

Si l'état du champ est connu par son opérateur densité ρ_{champ} , le taux de comptage devient:

$$w_1(\vec{r}, t) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\kappa_0|^2 \text{Tr} \left[\rho_{champ} E^-(\vec{r}, t) E^+(\vec{r}, t) \right] \quad (2-83)$$

On définit de même le **taux de comptage double** décrivant la probabilité de détecter une photo-ionisation au point \mathbf{r} , dans un intervalle de temps unité autour de t et une photo-ionisation au point \mathbf{r}' , dans l'intervalle unité autour de t' :

$$w_2(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \propto \text{Tr} \left[\rho_{champ} E^-(\vec{r}, t) E^-(\vec{r}', t') E^+(\vec{r}', t') E^+(\vec{r}, t) \right] \quad (2-84)$$