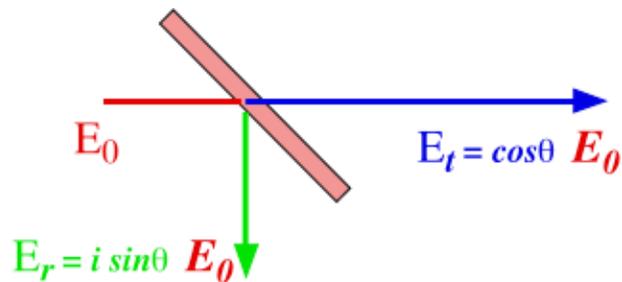


Lames séparatrices linéaires, couplage entre modes et interférences en optique quantique

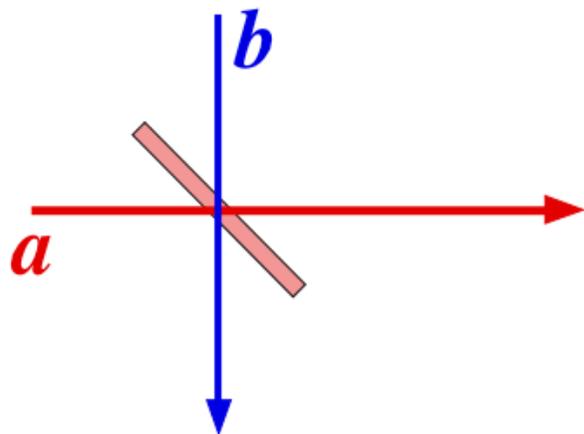
Nous analysons dans cette leçon des expériences d'interférence et de mesure de champs qui vont nous permettre de décrire des méthodes essentielles pour la préparation et l'étude des superpositions macroscopiques d'états. Nous avons dans la précédente leçon décrit des états mono-modes du champ. L'analyse des expériences d'interférence nous conduit à envisager à présent des champs à plusieurs modes, et à décrire le couplage entre ces modes.

Le couplage le plus simple entre deux modes est réalisé à l'aide d'une lame séparatrice linéaire. Nous commencerons par en donner un modèle simple, puis nous montrerons comment on peut, à l'aide de telles lames, réaliser des expériences d'interférence à un ou deux photons, dont nous analyserons brièvement les caractéristiques. Nous montrerons également qu'une lame séparatrice est l'élément essentiel pour réaliser une mesure « homodyne » d'une quadrature du champ électromagnétique. Enfin, nous verrons qu'une lame séparatrice fournit également un modèle simple de couplage du champ avec son environnement et nous montrerons à l'aide de ce modèle l'extrême fragilité d'un état « chat de phase » du champ.

Lame séparatrice linéaire



Classiquement, c'est une lame semi-réfléchissante sans perte qui transmet une fraction du champ et en réfléchit la fraction complémentaire, en déphasant la composante réfléchie de $\pi/2$. Nous ne considérons pas ici, pour simplifier, les effets de polarisation et décrivons le champ comme une quantité scalaire. Nous introduisons l'angle de mélange θ , $T = \cos^2 \theta$ et $1 - T = \sin^2 \theta$ représentant les facteurs de transmission et de réflexion en intensité de la lame.



Quantiquement, nous considérons deux modes d'onde plane de même fréquence, se propageant à angle droit l'un de l'autre, se croisant sur une lame dont la normale est une bissectrice de cet angle. Ces modes sont couplés par la transformation unitaire $U(\theta)$ définie par:

$$\begin{aligned} U^\dagger(\theta) a U(\theta) &= \cos \theta a + i \sin \theta b ; \\ U^\dagger(\theta) b U(\theta) &= i \sin \theta a + \cos \theta b \quad (3-1) \end{aligned}$$

On peut considérer que $U(\theta)$ est l'opérateur d'évolution unitaire $e^{-iHt/\hbar}$ associé au Hamiltonien:

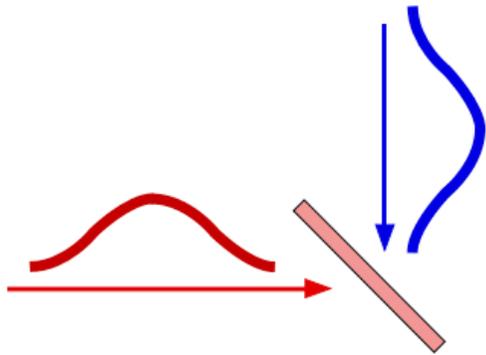
$$H = -\hbar g (ab^\dagger + a^\dagger b) \quad (3-2)$$

agissant pendant le temps $t = \theta/g$. On peut se servir pour cela de la relation de Baker-Hausdorff:

$$\exp(iG\theta) a \exp(-iG\theta) = a + i\theta[G, a] + \frac{i^2 \theta^2}{2!} [G, [G, a]] + \dots + \frac{i^n \theta^n}{n!} [G, [G, \dots [G, a]]] + \dots \quad (3-3)$$

en faisant $G = -(ab^\dagger + a^\dagger b)$. On démontre alors sans peine les relations (3-1).

Que représente physiquement ce modèle? Points de vue de Schrödinger et Heisenberg.



Dans une expérience réelle, les champs ont une enveloppe dépendant du temps et ils passent pendant un temps fini τ sur la lame. On peut voir le processus comme une collision de deux paquets d'onde (dont l'un peut être le vide), mélangés par la lame. Pour décrire ce processus, il faut en toute rigueur considérer que chaque paquet est une superposition de modes \mathbf{k} (opérateurs $a_{\mathbf{k}}$) répartis en fréquence sur un intervalle $c\Delta k = 1/\tau$. Une telle approche est mathématiquement lourde.

Un modèle équivalent beaucoup plus simple consiste à décrire les champs par des ondes planes stationnaires et à «brancher» et «débrancher» le couplage de la lame pendant un intervalle de temps τ autour de 0. Ceci revient à considérer que le couplage est de la forme:

$$H = -\hbar g(t)(ab^+ + a^+b) \quad \text{avec} \quad \int dt g(t) = \theta \quad (3-4)$$

où $g(t)$ est une fonction du temps de largeur de l'ordre de τ dont la forme précise n'importe pas.

Pour décrire l'évolution des champs sous l'effet du couplage avec la lame, on peut adopter deux points de vue équivalents: le point de vue de Heisenberg considère que le champ reste dans un état $|\Psi\rangle$ indépendant du temps, alors que les opérateurs champ évoluent, passant de leur état initial à leur état final en un temps τ (transformation donnée par les équations (3-1)). Le point de vue de Schrödinger considère au contraire que les opérateurs sont indépendants du temps et que c'est l'état du système qui évolue sous l'effet de l'opérateur U . Nous adopterons, suivant les situations que nous traiterons, l'un ou l'autre de ces points de vue, évidemment identiques quant aux prévisions physiques.

Point de vue de Schrödinger: effet de la lame séparatrice sur quelques états du champ (voir aussi Leçon 3 du cours 2001-2002).

Commençons par considérer que seul le mode (a) est initialement excité, le mode (b) étant vide.

(i) état initial à un photon dans (a):

$$\begin{aligned} |1_a, 0_b\rangle \rightarrow |\Psi\rangle &= U(\theta)|1_a, 0_b\rangle = U(\theta)a^+|0,0\rangle = U(\theta)a^+U^+(\theta)|0,0\rangle = \\ &(\cos\theta a^+ + i\sin\theta b^+)|0,0\rangle = \cos\theta|1,0\rangle + i\sin\theta|0,1\rangle \quad (3-5) \end{aligned}$$

La lame met le photon dans une superposition d'états: il est «suspendu» de façon cohérente entre les deux modes a et b.

(ii) état initial de Fock: n photons dans (a):

$$\begin{aligned} |n_a, 0_b\rangle \rightarrow |\Psi\rangle &= U(\theta)|n_a, 0_b\rangle = U(\theta)\frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0,0\rangle = \\ &\frac{1}{\sqrt{n!}}U(\theta)(a^+)^nU^+(\theta)|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\cos\theta a^+ + i\sin\theta b^+)^n|0,0\rangle \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^{1/2} (\cos\theta)^{n-p} (i\sin\theta)^p |n-p, p\rangle \quad (3-6) \end{aligned}$$

Répartition binomiale des photons dans les deux modes. Si $\theta=\pi/4$ (lame semi-réfléchissante), en moyenne $n/2$ photons dans chaque mode, avec une fluctuation en \sqrt{n} .

Effet de la lame séparatrice sur quelques états du champ (suite)

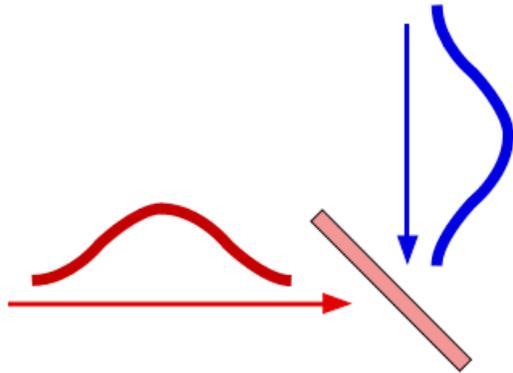
(iii) état cohérent dans le mode (a):

$$\begin{aligned} |\alpha_a, 0_b\rangle \rightarrow |\Psi\rangle &= U(\theta) |\alpha_a, 0_b\rangle = U(\theta) e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} U^\dagger(\theta) |0, 0\rangle = \\ &= \exp(\alpha [\cos\theta a^\dagger + i \sin\theta b^\dagger] - \alpha^* [\cos\theta a - i \sin\theta b]) |0, 0\rangle \\ &= |\alpha \cos\theta\rangle_a |i \alpha \sin\theta\rangle_b \quad (3-7) \end{aligned}$$

Répartition des amplitudes, sans intrication, des deux modes. Si $\theta = \pi/4$, on a encore en moyenne $n/2$ photons dans chaque mode, avec une fluctuation Poissonnienne en \sqrt{n} .

Les exemples précédents montrent que la lame répartit les photons dans les deux modes avec les probabilités $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$. La lame linéaire semi-réfléchissante ne réalise pas une séparation de type « chat de Schrödinger » pour laquelle il faudrait que la distribution de photon finale soit bi-modale, avec tous les photons dans un mode ou dans l'autre. Pour réaliser une séparation de type « chat » ou SME, il faut envisager un autre type de lame (séparatrice non-linéaire; voir leçon 4)

Lame séparatrice avec arrivée du champ sur les deux voies d'entrée



Envisageons le cas simple où chacun des modes (a) et (b) contient un photon:

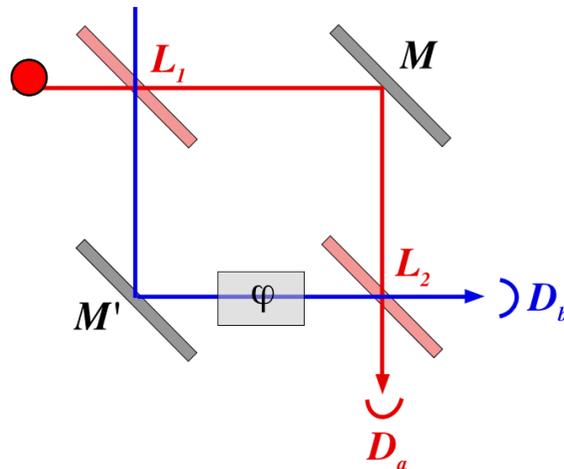
$$\begin{aligned}
 |1_a, 1_b\rangle &\rightarrow |\Psi\rangle = U(\theta)|1_a, 1_b\rangle = U(\theta)a^+b^+U^\dagger(\theta)|0,0\rangle \\
 &= (\cos\theta a^+ + i\sin\theta b^+)(i\sin\theta a^+ + \cos\theta b^+)|0,0\rangle \\
 &= \frac{i\sin 2\theta}{\sqrt{2}}(|2,0\rangle + |0,2\rangle) + \cos 2\theta|1,1\rangle \quad (3-8)
 \end{aligned}$$

Cas où la lame séparatrice est semi réfléchissante ($\theta=\pi/4$):

$$|1,1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,0\rangle + |0,2\rangle) \quad (3-9)$$

Préparation d'une « mini » SME impliquant une superposition de deux photons dans une voie *et* dans l'autre. La probabilité de répartir un photon dans chaque voie est nulle dans ce cas. Nous montrons plus loin comment tester un tel état par une interférence à deux photons.

Combinaison de deux lames semi-réfléchissantes: interféromètre de Mach-Zehnder à un seul photon.



Dispositif avec deux lames séparatrices et deux miroirs pour séparer le faisceau (a) en deux parties (a) et (b) et les recombiner ensuite. Une lame retardatrice déphase la voie (b) d'un angle φ variable. On peut détecter le champ dans les deux voies finales avec deux détecteurs compteurs de photons.

Expérience avec un seul photon (Grangier, Roger et Aspect, *Euro.Phys.Lett.* 1, 173 (1986)):

$$\begin{aligned}
 |1,0\rangle &\xrightarrow{L_1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + i|0,1\rangle) \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle + ie^{i\varphi}|0,1\rangle) && \textit{Point de vue de Schrödinger} \\
 &\xrightarrow{L_2} \frac{1}{2} (|1,0\rangle + i|0,1\rangle) + ie^{i\varphi} \frac{1}{2} (i|1,0\rangle + |0,1\rangle) = \frac{1}{2} (1 - e^{i\varphi})|1,0\rangle + \frac{1}{2} (1 + e^{i\varphi})|0,1\rangle && (3-10)
 \end{aligned}$$

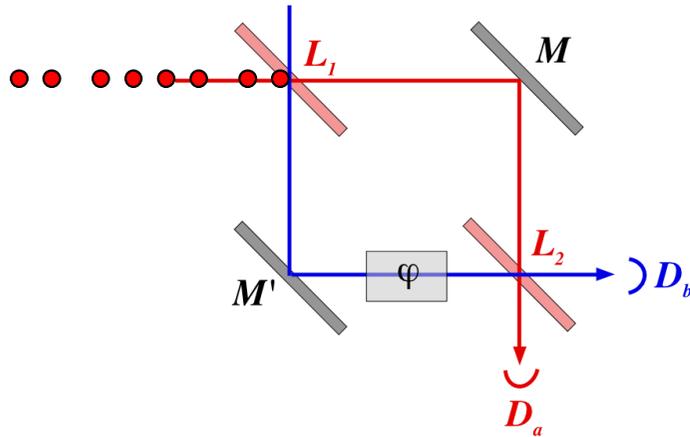
Comptage dans les voies (a) et (b):

$$S_a \propto \langle \Psi | a^+ a | \Psi \rangle = \langle \Psi | a^+ | 0,0 \rangle \langle 0,0 | a | \Psi \rangle = |\langle 00 | a | \Psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi); S_b \propto \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \quad (3-11)$$

Taux de comptage indépendant du temps pour ce problème stationnaire. Le photon est détecté dans la voie (a) avec la probabilité $(1/2)(1 - \cos \varphi)$ et il peut arriver n'importe quand. En fait dans l'intervalle τ correspondant à la largeur de son paquet d'onde.

Le photon « interfère avec lui-même » (Dirac) (en fait les deux chemins qu'il suit ont des amplitudes de probabilité qui interfèrent)

Interféromètre Mach Zehnder avec n photons



Si l'état initial est un état de Fock à n photons, un calcul très semblable donne pour l'état final du champ:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\frac{1}{2} (1 - e^{i\varphi}) a^+ + \frac{1}{2} (1 + e^{i\varphi}) b^+ \right]^n |0,0\rangle \quad (3-12)$$

Revient à « faire n fois » l'expérience avec un photon (les photons interfèrent avec eux mêmes, toujours selon Dirac!)

L'interféromètre distribue les photons dans les deux voies suivant une loi binomiale avec la probabilité $p = (1/2)(1 - \cos\varphi)$ dans (a) et $q = 1-p$ dans (b). Le signal détecté par comptage est proportionnel au nombre moyen de photons, soit $(n/2)(1 - \cos\varphi)$ dans (a) et $(n/2)(1 + \cos\varphi)$ dans (b). Le signal a la même forme que pour 1 seul photon.

La fluctuation de S_a est donnée par $\Delta n_a = [\langle \Psi | (a^+ a)^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | (a^+ a) | \Psi \rangle^2]^{1/2}$. Elle est immédiate à évaluer par la loi binomiale:

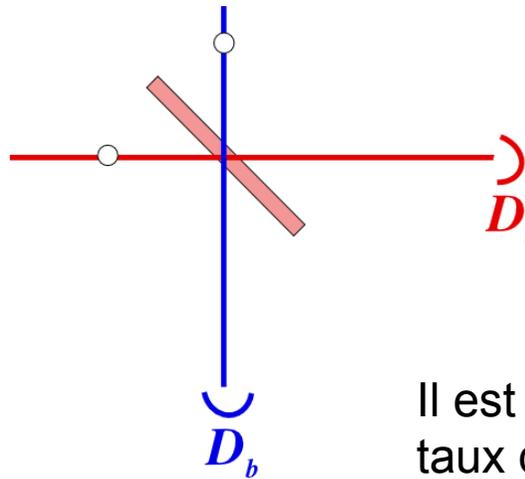
$$\Delta n_a = \sqrt{npq} = \sqrt{n(1 - \cos^2\varphi) / 2} = \sqrt{n} \frac{\sin\varphi}{2} \quad (3-13)$$

La sensibilité η de l'interféromètre est définie comme l'inverse du plus petit déphasage $(\delta\varphi)_{\min}$ détectable. Elle dépend de la « pente » des franges $\delta S_a / \delta\varphi$ ainsi que de la variation minimale de signal observable $(\delta S_a)_{\min} = \Delta n_a$:

$$\delta S_a / \delta\varphi = \frac{n}{2} \sin\varphi; \quad \eta = (\delta\varphi)_{\min}^{-1} = \frac{\delta S_a / \delta\varphi}{(\delta S_a)_{\min}} = \frac{\delta S_a / \delta\varphi}{\Delta n_a} = \sqrt{n} \quad (3-14)$$

Sensibilité η égale à la racine du nbre de photons traversant l'appareil pendant le temps de mesure. Essentiellement, même résultat pour un champ cohérent. L'interféromètre se comporte de la même façon avec un état de Fock (pas de phase) ou avec un champ cohérent (de phase définie).

Interférences à deux photons: coïncidences négatives entre détecteurs



Un photon dans chaque mode et une lame semi-transparente équilibrée. On détecte en coïncidence à l'aide des deux détecteurs D_a et D_b . L'analyse dans le point de vue de Schrödinger nous a montré que le taux de détection double est nul, puisque le système évolue vers l'état $|\Psi\rangle = (1/\sqrt{2})(|2,0\rangle + |0,2\rangle)$ (pas de composante $|1,1\rangle$).

Il est instructif de reprendre la question dans le point de vue de Heisenberg. Le taux de détection double s'écrit alors, en appelant $a_{\text{après}}$ et $b_{\text{après}}$ les expressions finales des opérateurs a et b qui dépendent, dans ce point de vue, du temps:

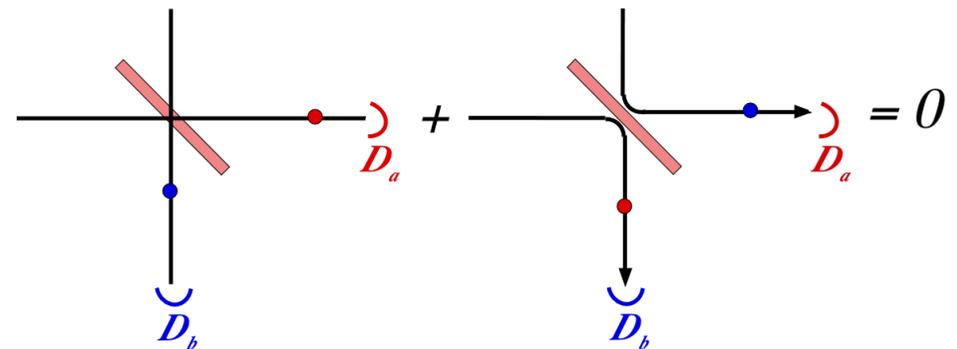
$$w_{ab} \propto \langle 1_a, 1_b | a_{\text{après}}^+ b_{\text{après}}^+ b_{\text{après}} a_{\text{après}} | 1_a, 1_b \rangle = \left| \langle 0_a, 0_b | b_{\text{après}} a_{\text{après}} | 1_a, 1_b \rangle \right|^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right) \left| \langle 0_a, 0_b | \underbrace{(ia + b)}_{\text{annihile un photon dans } D_b} \underbrace{(a + ib)}_{\text{annihile un photon dans } D_a} | 1_a, 1_b \rangle \right|^2$$

(Passage de l'expression à 4 opérateurs à celle à 2 en introduisant une relation de fermeture entre $b_{\text{après}}^+$ et $b_{\text{après}}$)

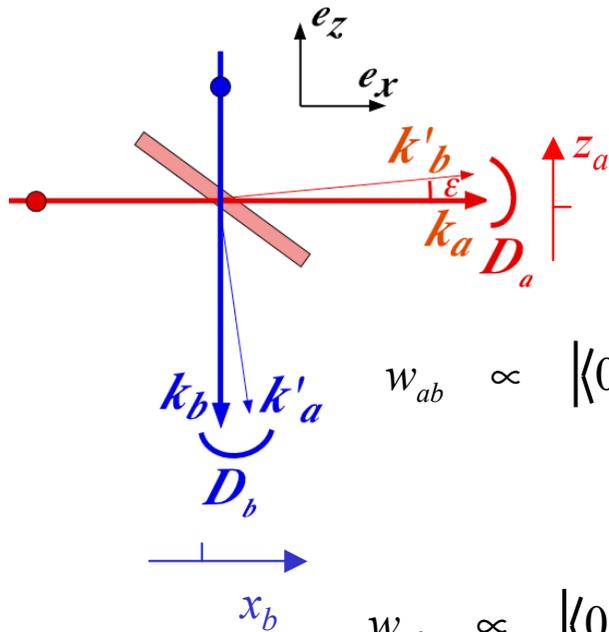
$$w_{ab} \propto \left| \langle 0_a, 0_b | (ia)(ib) + ba | 1_a, 1_b \rangle \right|^2 = 0$$

↙ photon provient de a
↓ photon provient de b
↘ photon provient de a



Interférence destructrice de l'amplitude du chemin où le photon de a est détecté dans D_a et le photon de b dans D_b avec le processus croisé. Interférence à deux photons. La « loi » de Dirac est violée!

Franges d'interférences spatiales à deux photons



On suppose la lame tournée d'un angle $\varepsilon/2$ par rapport à la direction de 45° . Le faisceau réfléchi de (b) a un vecteur d'onde $\mathbf{k}'_b = \mathbf{k}_a + \varepsilon k \mathbf{e}_z$ et le faisceau réfléchi de (a) un vecteur d'onde $\mathbf{k}'_a = \mathbf{k}_b + \varepsilon k \mathbf{e}_x$ (voir figure; vecteurs notés en **gras**; k : module du vecteur d'onde):

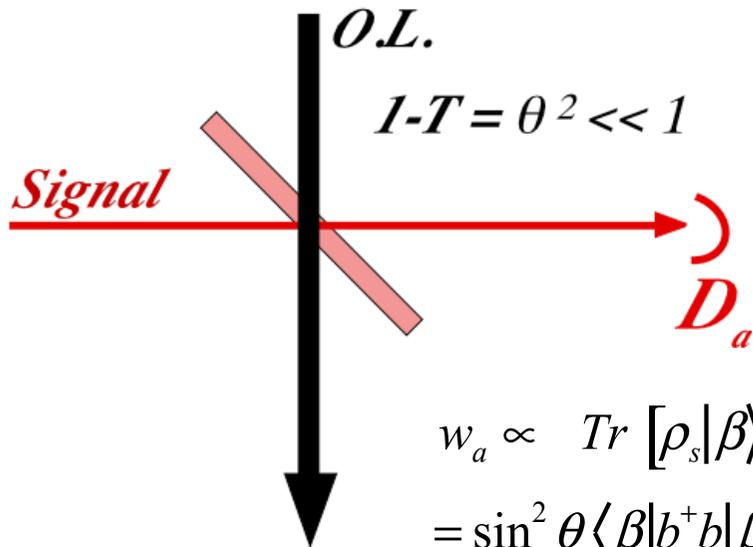
$$w_{ab} \propto \left| \langle 0_a, 0_b \left[\underbrace{ia \exp(i\mathbf{k}'_a \cdot \mathbf{r}_b) + b \exp(i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}_b)}_{\text{annihilation d'un photon dans } D_b} \right] \left[\underbrace{a \exp(i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_a) + ib \exp(i\mathbf{k}'_b \cdot \mathbf{r}_a)}_{\text{annihilation d'un photon dans } D_a} \right] | 1_a, 1_b \rangle \right|^2 \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} w_{ab} &\propto \left| \langle 0_a, 0_b \left[ba \exp i(\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}_b + \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_a) - ab \exp i(\mathbf{k}'_a \cdot \mathbf{r}_b + \mathbf{k}'_b \cdot \mathbf{r}_a) \right] | 1_a, 1_b \rangle \right|^2 \\ &= \left| \exp i(\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}_b + \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}_a) - \exp i(\mathbf{k}'_a \cdot \mathbf{r}_b + \mathbf{k}'_b \cdot \mathbf{r}_a) \right|^2 = \left| 1 - \exp i[(\mathbf{k}'_a - \mathbf{k}_b) \cdot \mathbf{r}_b + (\mathbf{k}'_b - \mathbf{k}_a) \cdot \mathbf{r}_a] \right|^2 \\ &= \frac{1 - \cos[\varepsilon k (z_a + x_b)]}{2} \quad (3-17) \end{aligned}$$

On a bien $w_{ab} = 0$ pour $\varepsilon=0$. Les coordonnées x_b et z_a décrivent des translations horizontales et verticales respectivement des détecteurs D_b et D_a (voir figure). On observe dans le courant de photo-détection double des interférences de contraste 100% lorsqu'on déplace D_b (D_a étant fixé) ou D_a (D_b fixé). L'interfrange $\delta = 2\pi/\varepsilon k$ devient infini pour $\varepsilon=0$. Cette interférence implique que si un photon est détecté à la position z_a , alors il existe des positions x_b où l'autre photon ne peut être trouvé. Cette impossibilité résulte de l'interférence destructrice entre deux amplitudes impliquant chacune les deux photons. Il n'y a pas d'interférence dans le courant de photo-détection simple. Le signal est ici indépendant du temps (modes monochromatiques). En fait, les deux photons sont produits par conversion paramétrique dans un cristal non-linéaire (processus pulsé très court). Les photons arrivent alors en coïncidence sur les détecteurs (voir Ou et Mandel, Phys.Rev.Lett. 62, 2941 (1989)).

Détection par battement homodyne des quadratures du champ

Couplage par une lame de grande transmission ($T = \cos^2 \theta \approx 1 - \theta^2$) du champ « signal » à mesurer (décrit par son opérateur densité ρ_s) et d'un champ de référence dans un état cohérent $|\beta\rangle = |\beta_0 e^{i\varphi}\rangle$ (oscillateur local O.L.). Mesure du courant de photo-détection transmis dans le mode du signal.



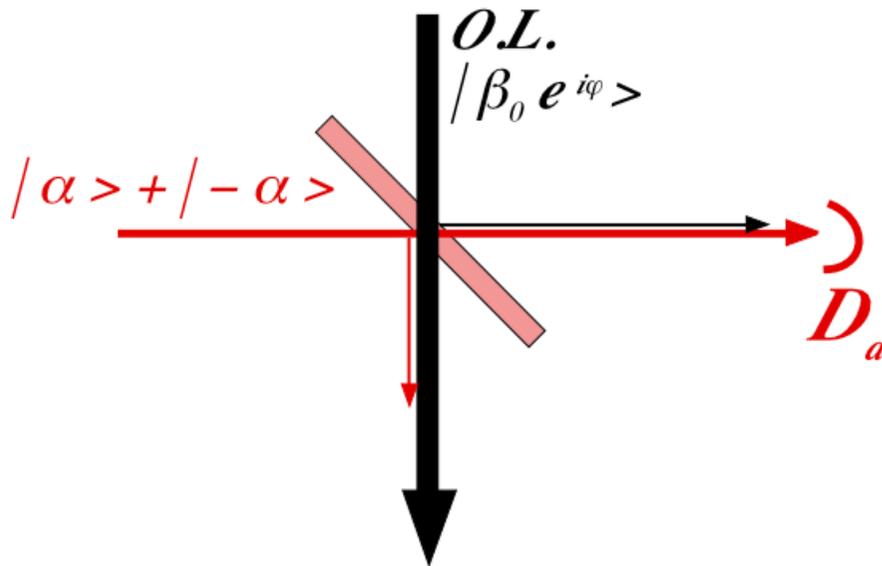
$$\begin{aligned}
 w_a &\propto \text{Tr} [\rho_s |\beta\rangle \langle \beta| (\cos \theta a^+ - i \sin \theta b^+) (\cos \theta a + i \sin \theta b)] \\
 &= \sin^2 \theta \langle \beta | b^+ b | \beta \rangle + \cos^2 \theta \text{Tr} (\rho_s a^+ a) + i \sin \theta \cos \theta \text{Tr} [\rho_s |\beta\rangle \langle \beta| (a^+ b - a b^+)] \\
 &= \underbrace{(1-T)\beta_0^2}_{\text{Intensité réfléchiée de O.L. (fond fixe)}} + \underbrace{T \langle a^+ a \rangle_s}_{\text{Intensité transmise du signal}} + \underbrace{i \sqrt{T(1-T)} \beta_0 \left[\langle a^+ \rangle_s e^{i\varphi} - \langle a \rangle_s e^{-i\varphi} \right]}_{\text{Battement entre O.L. et S (} w_{bat} \text{)}} \quad (3-18)
 \end{aligned}$$

Le terme de battement domine le terme d'intensité $T \langle a^+ a \rangle_s$ si β_0 est assez grand.

$$w_{bat} = -2 \sqrt{T(1-T)} \beta_0 \frac{\langle a^+ e^{i\varphi} - a e^{-i\varphi} \rangle_s}{2i} = 2 \sqrt{T(1-T)} \beta_0 \langle X_{\varphi + \pi/2} \rangle_s \quad (3-19)$$

On mesure ainsi la quadrature du champ en avance de $\pi/2$ sur la phase du champ cohérent de référence. En variant cette phase, on peut mesurer n'importe quelle quadrature X_φ .

Fluctuations du signal de battement homodyne: distribution de probabilité des quadratures du champ dans un « chat »



Le signal de battement homodyne contient plus d'information que la simple valeur moyenne des quadratures du champ. On peut aussi mesurer les fluctuations du signal de photo-détection et déterminer ainsi la loi de distribution des quadratures du champ. Si cette distribution contient un terme d'interférence (voir leçon 2), la distribution des fluctuations fera apparaître des franges brillantes et sombres.

Nous allons en donner un exemple en décrivant une expérience de battement homodyne sur un état « chat de phase » du champ dans le mode signal (a). Cet état est préparé par une méthode pour l'instant non spécifiée (nous l'étudierons plus loin dans le cours) et il est mélangé sur une lame séparatrice L au champ de référence.

Un point important de cette expérience est qu'une petite partie du signal « fuit » inévitablement vers le mode (b) de l'oscillateur local, ce qui correspond à une perte d'information vers un environnement extérieur. Nous allons voir que ce couplage a pour effet de réduire le contraste des franges observées pour certaines quadratures du champ, qui sont une signature du caractère cohérent de cette superposition. Nous allons ainsi, sur un exemple concret, analyser une manifestation importante du phénomène de décohérence.

Mesure par battement homodyne de la quadrature d'un chat

$$|\Psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)|\beta\rangle \rightarrow |\Psi\rangle_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{|\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta\rangle}_{\text{Composantes détectées}} \underbrace{|i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta\rangle}_{\text{Composantes non détectées (« fuite » dans l'environnement)}} + \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{|-\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta\rangle}_{\text{Composantes détectées}} \underbrace{|-i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta\rangle}_{\text{Composantes non détectées (« fuite » dans l'environnement)}} \right] \right] \quad (3-20)$$

On dispose d'un ensemble de « chats » identiques et on accumule les résultats de mesure provenant d'un grand nombre de réalisations de la même expérience de comptage. Le champ à mesurer dans la voie (a) a une intensité dont la fluctuation reflète celle de la quadrature du « chat ». Appelons $|n\rangle$ et $|p\rangle$ les états de Fock respectifs du mode (a) détecté et du mode (b) non détecté. La probabilité $P_a(n)$ de compter n photons avec le détecteur D_a supposé parfait est:

$$P_a(n) = \sum_p \left| \langle n, p | \Psi \rangle_f \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_p \left| \langle n | \alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle \langle p | i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \rangle + \langle n | -\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle \langle p | -i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \rangle \right|^2 \quad (3-21)$$

Ou encore:

$$P_a(n) = \frac{1}{2} \left(\left| \langle n | \alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle \right|^2 + \left| \langle n | -\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle \right|^2 \right) + \operatorname{Re} \left(\langle -\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta | n \rangle \langle n | \alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle \langle -i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta | i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \rangle \right) \quad (3-22)$$

Trace sur le champ dans la voie b non détectée: terme proportionnel à $\exp(-2|\alpha|^2 \sin^2 \theta)$, réduit le contraste du terme d'interférence dès que $\theta \approx 1/|\alpha|$.

Mesure de la quadrature d'un chat (suite)

Le terme multipliant le contraste des franges vaut:

$$\langle -i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta | i\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \rangle = \exp(-2\alpha^2 \sin^2 \theta) \exp(2i\alpha\beta \sin \theta \cos \theta) \quad (3-23)$$

Le terme d'interférence de la quadrature est non nul ssi $|\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta| = |-\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta|$, c-à-d si β et α sont en phase: on mesure alors la quadrature déphasée de $\pi/2$ par rapport à α , ce qui est la condition d'observation des interférences trouvée à la leçon 2. On peut alors supposer α et β réels. On suppose également $(\beta \sin \theta / \alpha \cos \theta) \gg 1$, et on fait les approximations correspondantes:

$$\langle n | \alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle^2 = \langle n | -\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle^2 \approx |C_n(\beta \sin \theta)|^2 = e^{-\beta^2 \sin^2 \theta} \frac{(\beta \sin \theta)^{2n}}{n!} \propto \exp\left(-\frac{(n - \beta^2 \sin^2 \theta)^2}{2\beta^2 \sin^2 \theta}\right) \quad (3-24)$$

$$\langle -\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta | n \rangle \langle n | \alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta \rangle \approx |C_n(\beta \sin \theta)|^2 \left(1 - \frac{i\alpha \cos \theta}{\beta \sin \theta}\right)^{2n} \approx |C_n(\beta \sin \theta)|^2 \exp\left(-2in \frac{\alpha \cos \theta}{\beta \sin \theta}\right) \quad (3-25)$$

Et, tenant compte de (3-22) à (3-25):

$$P_a(n) \propto \exp\left(-\frac{(n - \beta^2 \sin^2 \theta)^2}{2\beta^2 \sin^2 \theta}\right) \left[1 + \cos 2\left(n \frac{\alpha \cos \theta}{\beta \sin \theta} - \alpha\beta \sin \theta \cos \theta\right) \exp(-2\alpha^2 \sin^2 \theta) \right] \quad (3-26)$$

On remarque enfin que d'après (3-18) on a:

$$n = \beta^2 \sin^2 \theta + 2\beta \sin \theta \cos \theta x = \beta^2(1 - T) + 2\beta\sqrt{T(1-T)} x \quad (3-27)$$

Et en effectuant la substitution de n par x donnée par (3-27) dans (3-26) on trouve finalement:

$$P(x) \propto e^{-2T x^2} \left[1 + \cos(4\alpha T x) \exp[-2\alpha^2(1-T)] \right] \quad (3-28)$$

Résultat comparable à (2-53), mais avec un contraste de franges s'annulant dès que $\alpha \theta > 1$ (perte d'un photon en moyenne dans la voie (b)). Démontre la « fragilité » de la cohérence de la SME..