

Génération de superpositions macroscopiques d'états du champ par processus non-linéaires

Nous décrivons dans cette leçon quelques expériences de pensée simples de préparation de SME et de chats de Schrödinger du champ. Nous avons vu à la leçon précédente que les lames séparatrices linéaires de l'optique quantique ne permettent pas de réaliser des états de ce type, car elles orientent essentiellement les photons indépendamment les uns des autres dans les deux modes qu'elles mélangent.

Nous montrons à présent qu'une version non-linéaire de lame séparatrice, transformant de façon réversible un photon dans un mode en n photons dans l'autre, permet en principe de réaliser une SME à n photons et que la combinaison de deux lames de ce type conduit à un interféromètre Mach Zehnder non-linéaire permettant de mettre en évidence, par un signal d'interférence, le caractère cohérent de cette SME. Ce signal présente une sensibilité beaucoup plus grande aux variations de phase que le Mach-Zehnder habituel à un photon. Il a également une sensibilité beaucoup plus grande à la décohérence. Bien qu'une expérience réelle avec des photons semble difficile, une expérience avec un ion piégé simulant ce dispositif a été réalisée (groupe de D. Wineland). Les photons sont remplacés par les phonons associés à la vibration de l'ion et des superpositions d'états différents de trois phonons ont été récemment préparées et testées. Cette expérience sera brièvement décrite.

Finalement, nous montrerons qu'une lame non linéaire transparente de type Kerr, utilisée en transmission simple, permet en principe de préparer un chat de Schrödinger à partir d'un état cohérent.

Modèle de lame non-linéaire (convertisseur de fréquence)

Généralisation non-linéaire de la lame semi-réfléchissante décrite à la leçon 3: couplage entre deux modes (a) et (b) décrit par un hamiltonien H_n :

$$H_n = -\hbar g \left[a(b^+)^n + a^+(b)^n \right] \quad (4-1)$$

Conversion réversible de 1 photon (a) en n photons (b)

$$\left[a(b^+)^n + a^+(b)^n \right] |1_a, 0_b\rangle = \sqrt{n!} |0_a, n_b\rangle; \quad \left[a(b^+)^n + a^+(b)^n \right] |0_a, n_b\rangle = \sqrt{n!} |1_a, 0_b\rangle \quad (4-2)$$

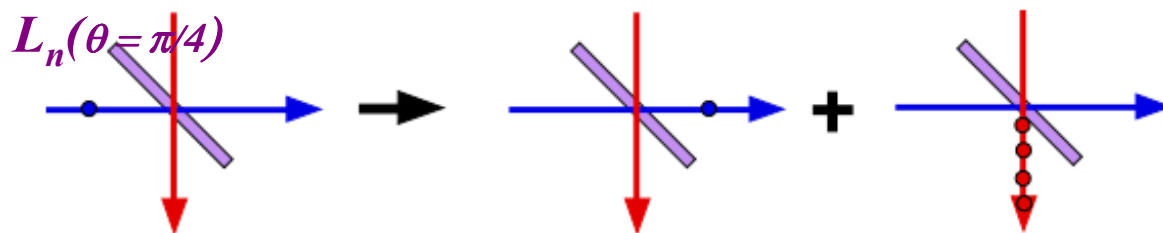
$$\exp[igt (a(b^+)^n + a^+(b)^n)] |1,0\rangle = \cos\theta |1,0\rangle + i \sin\theta |0,n\rangle$$

$$\exp[igt (a(b^+)^n + a^+(b)^n)] |0,n\rangle = i \sin\theta |1,0\rangle + \cos\theta |0,n\rangle \quad (4-3)$$

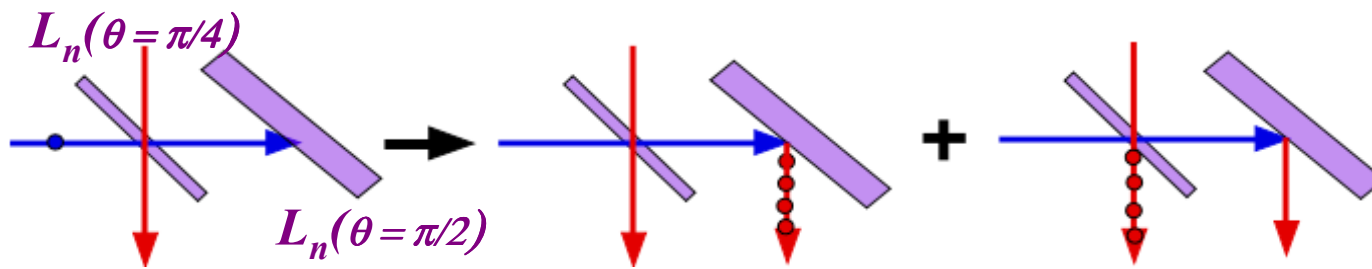
$$(\theta = gt\sqrt{n!})$$

Lame $L_n (\theta=\pi/4)$: $|1,0\rangle \rightarrow (1/\sqrt{2}) (|1,0\rangle + i |0,n\rangle)$; Lame $L_n (\theta=\pi/2)$: $|1,0\rangle \rightarrow i |0,n\rangle$

Préparation de SME à l'aide d'une ou deux lames non-linéaires:



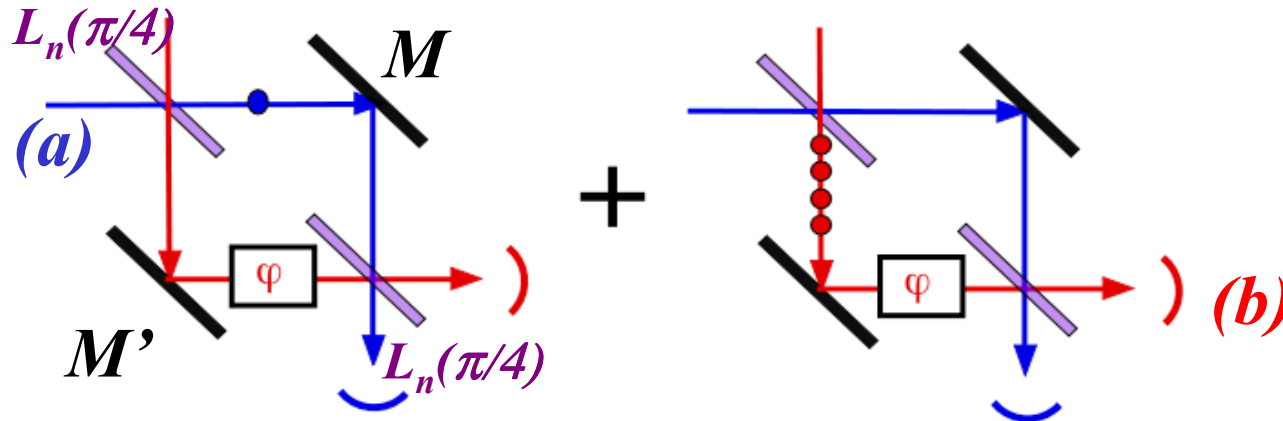
Préparation de l'état $(1/\sqrt{2}) (|1,0\rangle + i |0,n\rangle)$



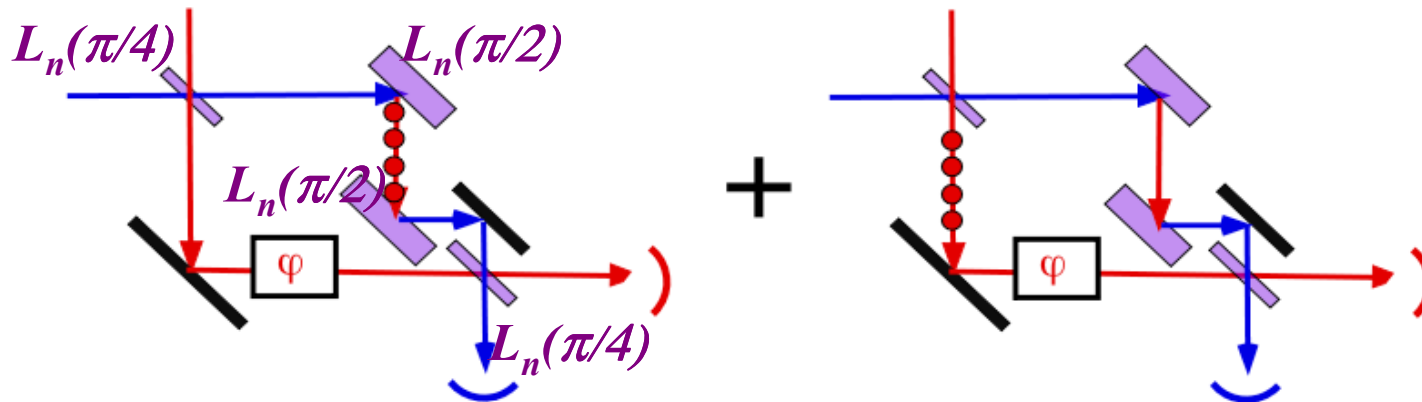
Préparation de l'état $(i/\sqrt{2}) (|0,n\rangle + |n,0\rangle)$

Deux modèles de Mach-Zehnder non-linéaires équivalents

Séparation et recombinaison des chemins par deux lames $L_n(\pi/4)$. Arrivée d'un photon sur la voie d'entrée (a) et détection de n photons dans la voie de sortie (b) ou de un photon dans la voie de sortie (a)



(i) Interférence d'un chemin à 1 photon avec un chemin à n photons



(ii) Transformation réversible du chemin à 1 photon en chemin à n photons grâce à deux lames $L_n(\pi/2)$: Interférence de deux chemins à n photons

$$|\Psi_f\rangle = \pm \frac{1}{2} (1 \mp e^{in\varphi}) |1,0\rangle \pm \frac{i}{2} (1 \pm e^{in\varphi}) |0,n\rangle \quad (4-4)$$

Signe de l'interférence dépend du dispositif ((i) ou (ii))

Nombre moyen de photons détectés en (a) et (b): $S_a = \frac{1 \mp \cos n\varphi}{2}; S_b = n \frac{1 \pm \cos n\varphi}{2} \quad (4-5,6)$

La sensibilité de l'interféromètre à n photons est \sqrt{n} fois plus grande que celle de l'appareil ordinaire à 1 photon

Les franges d'interférences sont n fois plus fines que celles d'un interféromètre ordinaire produisant le même déphasage par photon. La fluctuation du signal est \sqrt{n} fois plus grande que celle de l'interféromètre ordinaire, à nombre de photon détecté égal. Il en résulte que la sensibilité η (inverse de la plus petite variation de phase détectable) est \sqrt{n} fois celle d'un interféromètre à un photon.

Fluctuation du signal (point de vue de Schrödinger):

$$\begin{aligned}\Delta S_b &= \left(\langle \Psi_f | (b^\dagger b)^2 | \Psi_f \rangle - \langle \Psi_f | b^\dagger b | \Psi_f \rangle^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{n^2}{2} (1 + \cos n\varphi) - \frac{n^2}{4} (1 + \cos n\varphi)^2 \right)^{1/2} = \frac{n}{2} \sin n\varphi \quad (4-7)\end{aligned}$$

Pour $n\varphi = \pi/2$ (pente des franges maximum), on a une variance en n du signal: une mesure du nombre de photons dans la voie (b) donne 0 ou n avec des probabilités égales.

D'où la sensibilité η (voir calcul analogue pour un interféromètre ordinaire à la leçon 3):

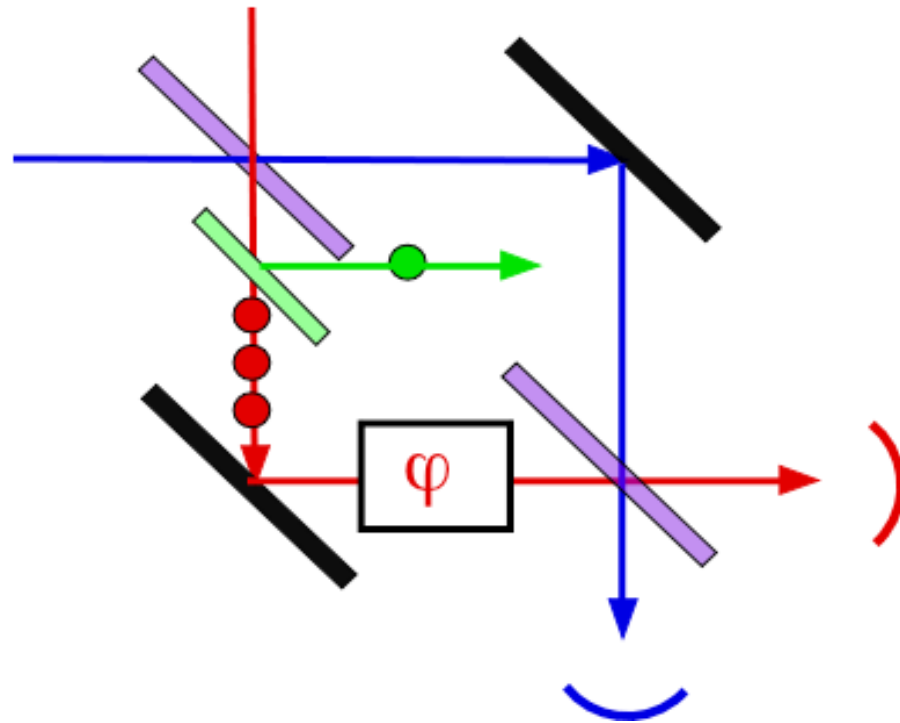
$$\eta = (\delta\varphi_{\min})^{-1} = \frac{(\delta S_b / \delta\varphi)}{\Delta S_b} = \frac{(n^2 / 2) \sin n\varphi}{(n / 2) \sin n\varphi} = n \quad (4-8)$$

$\eta = \sqrt{n}$ pour un interféromètre ordinaire - Eq (3-14)

L'interférométrie multi-particule est potentiellement beaucoup plus sensible que l'interférométrie ordinaire (D.Wineland et al)

L'interféromètre à n photons est aussi beaucoup plus sensible à la décohérence qu'un interféromètre ordinaire

Modèle simple de décohérence: une lame semi-réfléchissante linéaire (angle de mélange $\varepsilon \ll 1$) couple le mode contenant n photons à un environnement (mode C_E). La probabilité de perte d'un des n photons dans cet environnement est $\sim n \varepsilon^2$. Nous allons montrer que dès que cette probabilité devient de l'ordre de l'unité, le contraste de l'interféromètre s'effondre. En d'autres termes, **la cohérence de la SME est perdue dès qu'une particule, susceptible de fournir une information suivie par le système dans l'interféromètre, fuit dans l'environnement**. Nous avons déjà entrevu cette fragilité essentielle des SME, manifestation du principe de complémentarité, à la leçon 3 (effacement des franges dans le signal de quadrature d'un chat de Schrödinger).



Evolution du champ dans l'interféromètre en présence de décohérence du mode (b)

Première séparatrice non-linéaire:

$$|1_a, 0_b; 0_E\rangle \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (|1_a, 0_b; 0_E\rangle + i|0_a, n_b; 0_E\rangle) \quad (4-9)$$

Couplage linéaire à l'environnement du mode b (voir leçon 3):

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (|1_a, 0_b; 0_E\rangle + i \cos^n \varepsilon |0_a, n_b; 0_E\rangle + \sum_{p=1}^n c_p |0_a, (n-p)_b; p_E\rangle) \quad (4-10)$$

Répartition binômiale des photons entre (b) et (c_E).

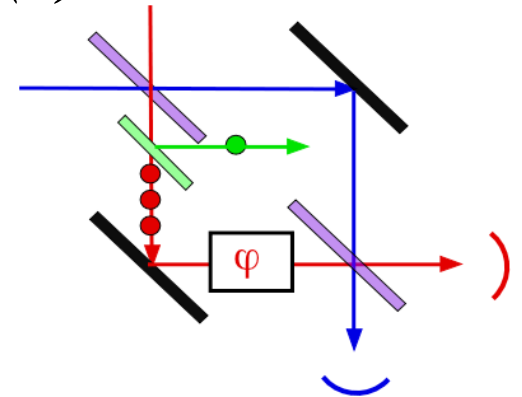
Déphasage de la voie b:

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (|1_a, 0_b; 0_E\rangle + i \cos^n \varepsilon e^{in\varphi} |0_a, n_b; 0_E\rangle + \sum_{p=1}^n c_p e^{i(n-p)\varphi} |0_a, (n-p)_b; p_E\rangle) \quad (4-12)$$

Deuxième séparatrice non-linéaire:

$$\rightarrow |\Psi^{(S+E)}\rangle_f = \left(\frac{1}{2}\right) [(|1_a, 0_b; 0_E\rangle + i|0_a, n_b; 0_E\rangle) + i \cos^n \varepsilon e^{in\varphi} (i|1_a, 0_b; 0_E\rangle + |0_a, n_b; 0_E\rangle)] \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sum_{p=1}^n c_p e^{i(n-p)\varphi} |0_a, (n-p)_b; p_E\rangle \quad (4-13)$$

$L_n(\pi/4)$ ne change pas les états à nombre de photon $< n$ dans (b)

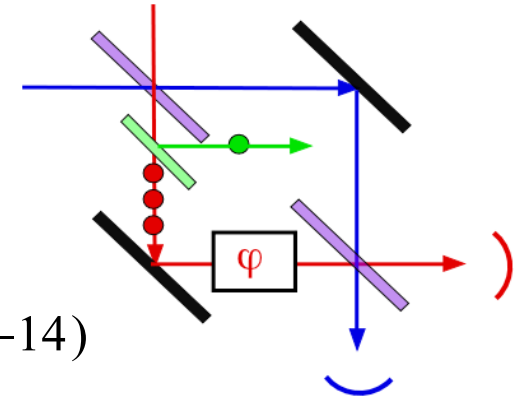


Signal d 'interférence multi-photon en présence de décohérence dans le mode (b)

$$S_b = \int_f \langle \Psi^{(S+E)} | b^\dagger b | \Psi^{(S+E)} \rangle_f = \frac{n}{4} |1 + \cos^n \varepsilon e^{in\varphi}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n |c_p|^2 (n-p)$$

$$= \frac{n}{4} [1 + \cos^{2n} \varepsilon + 2 \cos^n \varepsilon \cos(n\varphi)] + \frac{n}{2} (\cos^2 \varepsilon - \cos^{2n} \varepsilon) \quad (4-14)$$

$\sim \exp(-n\varepsilon^2/2)$ Atténuation des franges exponentielle en n



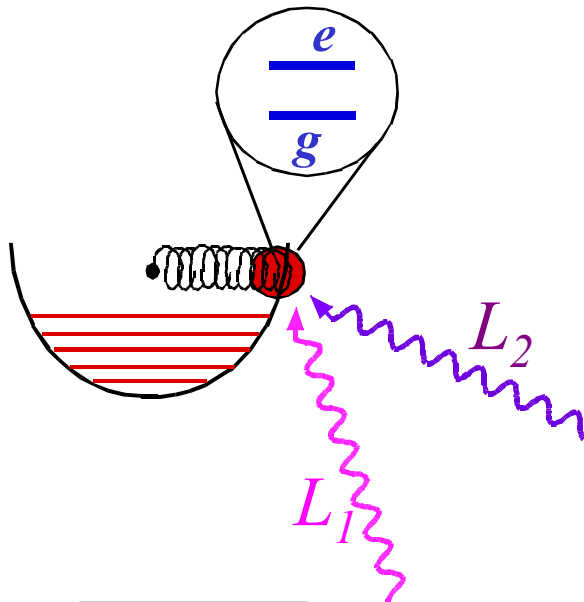
Approximation $\varepsilon \ll 1$: si le coefficient de réflexion d 'un photon vers l 'environnement est $\sim \varepsilon^2$, la probabilité $p(1 \text{ ph. dans } E)$ pour qu 'un photon parmi n se retrouve dans (c_E) est $\sim n \varepsilon^2$. Si cette quantité est petite, un développement limité donne:

$$S_b \approx \frac{n}{2} \left(1 - \frac{n\varepsilon^2}{2}\right) (1 + \cos n\varphi) + \frac{n(n-1)\varepsilon^2}{2} \quad (4-15)$$

Pour $p(1 \text{ ph. dans } E)$ de l 'ordre de 1, le contraste de l 'interférence est divisé par un facteur de l 'ordre de 2. La probabilité de perte ε^2 compatible avec l 'observation de la cohérence décroît en $1/n$ avec la « taille » de la SME. L 'observation de la cohérence de la SME, qui exige que l 'on ne perde, en moyenne, que moins d 'un photon dans l 'environnement, requiert que l 'efficacité de la détection soit d 'autant plus voisine de 100% que n est plus grand. Condition impossible à satisfaire en pratique pour n macroscopique....

Simulation de l'interféromètre Mach-Zehnder non-linéaire par un ion piégé: les photons sont remplacés par des phonons

(*Voir aussi séminaire de D. Wineland*)

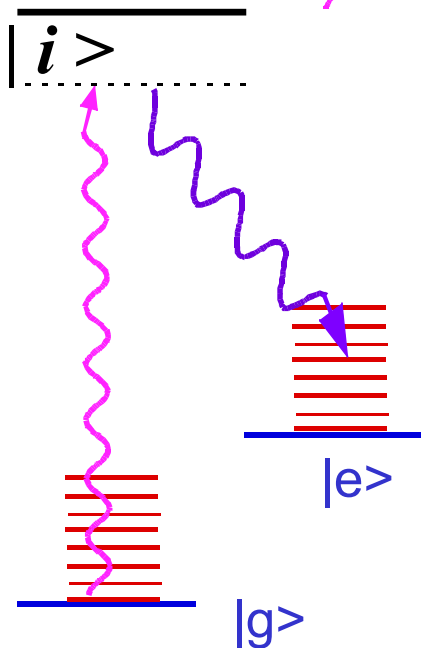


Ion dans un piège soumis à un potentiel harmonique. L'ion possède deux niveaux d'énergie électroniques internes $|e\rangle$ et $|g\rangle$ et des niveaux d'énergie de vibration externes $|n\rangle$ (*phonons*). (fréquence ω_p).

Par excitation optique laser, on peut induire des transitions « mixtes » $|g\rangle |n\rangle \rightarrow |e\rangle |n'\rangle$ correspondant à une transition électronique de l'ion, accompagnée de l'absorption ou de l'émission de $n - n'$ phonons. Lorsque e et g sont deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'ion, il s'agit de transition Raman impliquant deux faisceaux laser dont la différence de fréquence $\omega_1 - \omega_2$ satisfait la condition de résonance:

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_{eg} + (n' - n)\omega_p \quad (4-16)$$

La transition Raman implique virtuellement un niveau excité $|i\rangle$ de l'ion.



Hamiltonien effectif d'interaction entre l'ion et les deux champs laser (d'amplitudes classiques α_1 et α_2):

$$H_{Raman}(t) = -\frac{q^2}{m^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \alpha_1 \alpha_2^* \left[\frac{\langle e | (\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_2^*) | i \rangle \langle i | (\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}_1) | g \rangle}{\hbar(\omega_{ig} - \omega_1)} \right] |e\rangle \langle g| e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(k_1 - k_2)x} + h.c. \quad (4-17)$$

Ω_R : fréquence de Rabi du processus Raman $\rightarrow \frac{\hbar \Omega_R}{2}$

k_1, k_2 : projections des vecteurs d'onde des lasers sur la direction d'oscillation Ox de l'ion.

Le facteur de phase, dépendant de la position x de l'ion, est une fonction des opérateurs de création et d'annihilation de phonons (similaire à l'effet Mössbauer):

$$e^{i(k_1 - k_2)x} = \exp i \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_p}} \Delta k (b + b^+) = \exp[i\eta_L (b + b^+)] \quad (4-18) \quad (\Delta k = k_1 - k_2)$$

On introduit le facteur sans dimension η_L (paramètre de Lamb-Dicke) défini par:

$$\eta_L = \left(\frac{\hbar \Delta k^2}{2M\omega_p} \right)^{1/2} = \left(\frac{E_{recul}}{\hbar\omega_p} \right)^{1/2} \quad (4-19)$$

(La quantité $E_{recul} = \frac{\hbar^2 \Delta k^2}{2M}$ est l'énergie de recul de l'ion de masse M lorsqu'il encaisse au cours du processus Raman la différence des impulsions des photons des deux lasers)

Le facteur η_L est en général $\ll 1$, ce qui permet de développer l'expression (4-18).

Développement de l'Hamiltonien effectif Raman:

$$H_{Raman}(t) = \frac{\hbar\Omega_R}{2} e^{-\eta_L^2/2} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} |e\rangle\langle g| \sum_{p,q} \frac{(i\eta_L)^{p+q} (b^+)^p b^q}{p!q!} + h.c. \quad (4-20)$$

Lorsque la condition de résonance (4-16) est satisfaite pour une valeur entière $\Delta n = n' - n$, les termes dominants de H_{Raman} sont tels que $p - q = \Delta n$. On peut donc avoir $p = \Delta n, q = 0$ ou $p = \Delta n + 1, q = 1$ etc... Le premier terme est dominant (d'ordre le plus bas en η_L). On obtient donc finalement, pour cette résonance, le hamiltonien de couplage Raman en représentation d'interaction:

$$\tilde{H}_{Raman} \approx \frac{\hbar\Omega_R}{2} (i\eta_L)^{\Delta n} |e\rangle\langle g| (b^+)^{\Delta n} + h.c. \quad (4-21)$$

Ce hamiltonien est similaire à (4-1) dans lequel on remplace l'opérateur qui annihile un photon dans le mode (a) par celui qui fait passer l'atome de $|g\rangle$ à $|e\rangle$. Ainsi $|g\rangle$ et $|e\rangle$ jouent respectivement les rôles des états $|1_a\rangle$ et $|0_a\rangle$ dans la discussion qui précède (l'analogie entre a et a^+ d'une part et les opérateurs atomiques $|e\rangle\langle g|$ et $|g\rangle\langle e|$ d'autre part ne tient que si on ne met pas plus d'un photon dans le mode (a)).

L'ion subissant la transition Raman « simule » l'interféromètre à n photons décrit plus haut. En lui appliquant des impulsions Raman de durée convenable, on réalise un équivalent des lames non-linéaires $L_n(\pi/4)$.

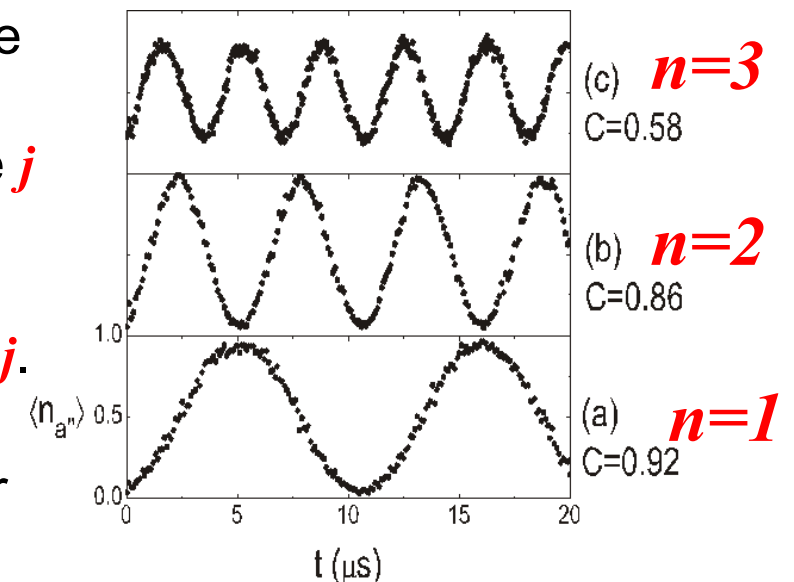
Simulation expérimentale d'un interféromètre Mach-Zehnder à n photons ($n=1,2$ et 3). (*D.Leibfried et al, Quant-Phys-0209028 (2002)*)

(i) On prépare l'ion dans g et dans l'état fondamental de vibration (équivalent à $|1_a, 0_b\rangle$).
(voir séminaire de D.Wineland)

(ii) On applique une impulsion Raman équivalente à $L_n(\pi/4)$ en réglant la condition de résonance des lasers pour réaliser les situations $\Delta n = n = 1, 2$ ou 3 et en adaptant la durée de l'impulsion. On prépare ainsi l'équivalent de $(1/\sqrt{2}) (|1_a, 0_b\rangle + i |0_a, n_b\rangle)$.

(iii) On déphase l'état $|0_a, n_b\rangle$ en modifiant de $\delta\omega_p$ (à l'aide d'un champ électrique appliqué aux électrodes du piège) la fréquence de vibration de l'ion pendant un temps t . On obtient un « déphasage par phonon » $\varphi = \delta\omega_p t$.

(iv) On applique une deuxième impulsion Raman simulante $L_n(\pi/4)$ et on détecte finalement le niveau g de l'ion par sa fluorescence: on allume un laser de détection portant l'ion de ce niveau vers un état excité j qui émet un photon, que l'on détecte, en retombant vers g . On répète un grand nombre de cycles d'excitation-détection sur la transition « fermée » $g \rightarrow j$. Cette détection est sélective (niveau e non vu). Elle équivaut à la détection de la voie (a) du Mach-Zehnder décrit plus haut. On répète en variant φ et on obtient des franges d'interférence (interfrange en $1/n$).



Proposition de préparation de chat de Schrödinger avec une lame non-linéaire à effet Kerr (*Yurke et Stoler, Phys.Rev.Lett. 57, 13, 1986*)

Une lame transparente dont l'indice de réfraction varie linéairement avec l'intensité du rayonnement (effet Kerr) agit sur le champ suivant un Hamiltonien de la forme:

$$H_{Kerr} = -\hbar\gamma(a^\dagger a)^2 \quad (4-22)$$

Pour le montrer, considérons un milieu d'épaisseur L et d'indice:

$$N = 1 + N_0 + N_1 a^\dagger a \quad (4-23)$$

Le vecteur d'onde dans le vide $k_0 = \omega/c$ d'une onde plane de pulsation ω devient dans ce milieu Nk_0 et le déphasage produit sur l'onde est:

$$\varphi = k_0(N-1)L = k_0N_0L + k_0N_1L a^\dagger a \quad (4-24)$$

D'où l'action de la lame sur un état à n photons:

$$|n\rangle \rightarrow \exp i(k_0N_0L n + k_0N_1L n^2) |n\rangle \quad (4-25)$$

Cette action correspond à l'évolution produite en un temps τ par le hamiltonien:

$$H = -\frac{\hbar}{\tau} [k_0N_0L a^\dagger a + k_0N_1L (a^\dagger a)^2] \quad (4-26)$$

Le premier terme de (4-26) décrit un simple déphasage du champ produit par la partie linéaire de l'indice et le second un déphasage non-linéaire de type Kerr qui correspond au hamiltonien (4-22) avec $k_0N_1L / \tau = \gamma$.

L'action pendant un temps $t = \pi/2\gamma$ de la lame Kerr sur un état état $|n\rangle$ produit un déphasage:

$$\begin{aligned} \gamma n^2 t = 2\pi p^2 & \quad \text{pour } n = 2p \\ \gamma n^2 t = 2\pi p^2 + 2\pi p + \pi/2 & \quad \text{pour } n = 2p+1 \end{aligned} \quad (4-27)$$

Considérons un état cohérent $|\alpha\rangle$ dans lequel on sépare formellement les parties à nombre de photons pair et impair:

$$|\alpha\rangle = (1/2)(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) + (1/2)(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (4-28)$$

n pair *n impair*

D'après (4-27), l'action de la lame Kerr donne:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle & \rightarrow (1/2)(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) + (e^{i\pi/2}/2)(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \\ & = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}|-\alpha\rangle \end{aligned} \quad (4-29)$$

Chat de phase, mais difficile à réaliser....