

# Interférences d'ondes de matière dans les condensats de Bose Einstein

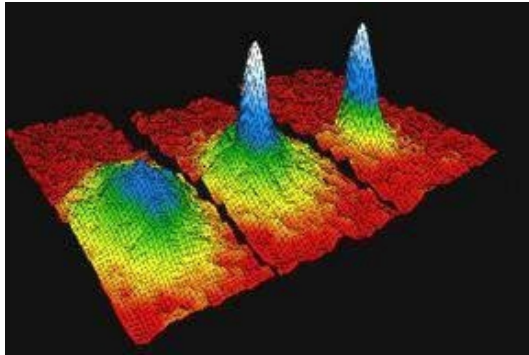
Nous assistons depuis 1995 au développement spectaculaire de la physique des ondes de matière dans les condensats de Bose Einstein. On sait maintenant générer dans ces systèmes des ondes cohérentes de matière aux propriétés similaires à celles d'ondes lumineuses. On peut en manipulant ces ondes effectuer des expériences d'interférométrie analogues à celles que l'on fait avec de la lumière laser. Ces expériences auront sans doute des applications.

La question des superpositions macroscopiques d'états (SME) que nous avons abordée sur des champs optiques peut également être envisagée dans le contexte des condensats. Si la plupart des expériences d'interférences d'ondes de matière faites à ce jour sont « mono-atomiques » (dans le sens où les interférences optiques usuelles sont « mono-photoniques »), on peut envisager des expériences sur les condensats faisant intervenir des chemins qui « aiguillent » simultanément plusieurs atomes dans une voie ou dans une autre. L'exploration de ces SME matérielles est un domaine très intéressant de la physique à la frontière classique-quantique.

Nous avons vu - et nous verrons encore plus loin - que des mécanismes non-linéaires sont nécessaires pour préparer des SME optiques. Ces mécanismes font intervenir des milieux optiques particuliers (milieu à effet Kerr, atome ou ion unique) couplés au champ que l'on étudie. Dans les condensats, la non-linéarité est interne, pour ainsi dire offerte automatiquement car il existe toujours des interactions non-linéaires entre ondes de matière, dues aux collisions entre atomes. Les condensats sont donc une source naturelle intéressante de SME..

Les leçons 6 et 7 sont consacrées à l'étude de l'interférométrie des condensats, avec comme but essentiel, la discussion de la possibilité de générer des SME.. Plusieurs cours sur les condensats ont été donnés par C.Cohen-Tannoudji au Collège de France dans les années passées, qui constituent une référence générale pour ces leçons. D'autres références sont données plus loin.

# Les condensats de Bose Einstein : un ensemble d'atomes ultrafroids, indiscernables, dans le même état quantique...

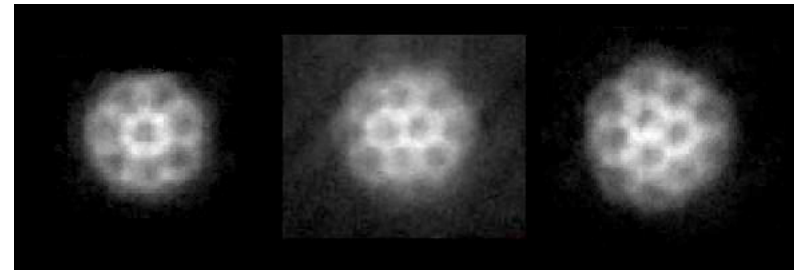


...qui manifeste de la superfluidité, de la cohérence quantique et d'autres propriétés très inhabituelles.

*Le premier condensat (Cornell, Weiman et al, 1995)*

**Atomes ralentis et piégés par laser, puis refroidis par « évaporation » dans un piège magnétique (dimension de l'ordre de quelques  $\mu\text{m}$ ), au-dessous de la température de transition  $T_{\text{BEC}}$  ( $\sim 100\text{nK}$ ). La longueur d'onde de de Broglie est alors de l'ordre de la distance entre atomes.**

**L'observation du condensat se fait en supprimant le piège, laissant le nuage atomique s'étendre, puis en allumant un laser sonde qui en fait l'image en absorption ou en dispersion (signal observé proportionnel à la densité des atomes)**



*Réseau de vortex obtenu en faisant tourner le condensat (Dalibard et al, ENS, 2000)*

*Leçon 6 : interférences d'ondes de matière sans interactions entre atomes*

*Leçon 7: interférences en présence d'interactions et génération de SME atomiques*

## Les bosons en quelques formules: modèle de gaz parfait sans interactions

On considère un système quantique de  $N$  bosons (pour l'instant sans structure interne) dans une boîte. On appelle  $|\varphi_\mu\rangle$  (énergie  $\varepsilon_\mu$ ) la base des états propres de l'opérateur énergie à une particule (qui dépend du potentiel de la boîte). Il est commode pour décrire ce système en tenant automatiquement compte du postulat de symétrisation d'utiliser le formalisme de la seconde quantification. On appelle  $a_\mu, a_\mu^+$  les opérateurs d'annihilation et de création d'un boson dans l'état  $|\varphi_\mu\rangle$ . Ils satisfont les relations de commutation des opérateurs canoniques d'oscillateurs harmoniques indépendants. On appelle d'autre part  $|0\rangle$  le « vide de particules ». L'état du système contenant  $n_1$  particules dans  $|\varphi_1\rangle, \dots, n_\mu$  particules dans  $|\varphi_\mu\rangle, \dots$  est noté:

$$|n_1:\varphi_1; n_2:\varphi_2; \dots; n_\mu:\varphi_\mu; \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_\mu! \dots}} (a_1^{+n_1} a_2^{+n_2} \dots a_\mu^{+n_\mu} \dots) |0\rangle \quad (6-1)$$

On définit de même l'opérateur énergie du système en seconde quantification comme:

$$H = \sum_{\mu} a_\mu^+ a_\mu \varepsilon_\mu \quad (6-2)$$

L'analogie avec un champ de photons appartenant à un ensemble de modes est évidente.

De façon plus générale, à tout opérateur à une particule  $\mathcal{V} = \sum_{\mu, \nu} \mathcal{V}_{\mu\nu} |\varphi_\mu\rangle \langle \varphi_\nu|$ , on associe l'opérateur en seconde quantification:

$$\mathcal{V} = \sum_{\mu, \nu} a_\mu^+ \mathcal{V}_{\mu\nu} a_\nu; \quad (\mathcal{V}_{\mu\nu} = \langle \varphi_\mu | \mathcal{V} | \varphi_\nu \rangle) \quad (6-3)$$

$\mathcal{V}$  est, en seconde quantification, l'observable  $\sum_{i=1, N} \mathcal{V}(i)$ , somme des opérateurs à une particule  $\mathcal{V}$ .

## Bosons parfaits sans interactions-suite

$N$  particules dans l'état  $|\Psi_{\alpha\beta}\rangle = \lambda_\alpha |\varphi_\alpha\rangle + \lambda_\beta |\varphi_\beta\rangle$  sont, en seconde quantification, décrites par:

$$|N: \lambda_\alpha \varphi_\alpha + \lambda_\beta \varphi_\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\lambda_\alpha a_\alpha^+ + \lambda_\beta a_\beta^+)^N |0\rangle \quad (6-4)$$

Noter encore l'analogie avec la description de  $N$  photons dans un état superposition de 2 modes. Un cas de superposition intéressant est celui d'une particule localisée en un point. Elle est, dans le formalisme ordinaire, décrite par  $|r\rangle = \sum_\mu |\varphi_\mu\rangle \langle \varphi_\mu | r \rangle = \sum_\mu \varphi_\mu^*(r) |\varphi_\mu\rangle$ . En seconde quantification, cet état devient:

$$|1: \vec{r}\rangle = \sum_\mu \varphi_\mu^*(\vec{r}) a_\mu^+ |0\rangle \quad (6-5)$$

ce qui introduit naturellement l'opérateur champ  $\Psi^+(r)$  créant une particule au point  $r$ :

$$\Psi^+(\vec{r}) = \sum_\mu \varphi_\mu^*(\vec{r}) a_\mu^+ \quad (6-6)$$

et l'opérateur champ d'annihilation adjoint:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_\mu \varphi_\mu(\vec{r}) a_\mu \quad (6-7)$$

Ces opérateurs satisfont la relation de commutation des champs de boson:

$$[\Psi(\vec{r}_1), \Psi^+(\vec{r}_2)] = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (6-8)$$

et permettent de définir l'opérateur densité:

$$n_D(\vec{r}) = \Psi^+(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \quad (6-9)$$

qui correspond, en seconde quantification, au projecteur à une particule  $|r\rangle \langle r|$ .

Noter l'analogie des opérateurs champ d'annihilation et de création d'une particule en un point avec les parties de fréquence positive et négative du champ électrique. La densité de particules au point  $r$ , égale à la valeur moyenne dans l'état du système de l'opérateur  $\Psi^+(r)\Psi(r)$  est formellement analogue au taux de comptage de photons, proportionnel à la valeur moyenne du produit des parties de fréquence négative et positive du champ. On associe ainsi la détection en un point à un processus de destruction (action de l'opérateur  $\Psi(r)$  sur le ket situé à droite dans  $\langle \Psi^+(r)\Psi(r) \rangle$ ).

# Condensat simple ou double sans interactions

Un ensemble de  $N$  Bosons confinés dans un piège harmonique se condensent dans l'état fondamental d'énergie lorsque la température  $T$  devient telle que la longueur d'onde de de Broglie des particules est de l'ordre de leur distance moyenne mutuelle. La fraction condensée augmente lorsque  $T$  décroît sous cette valeur critique, le nombre d'atomes non condensés s'annulant à  $T=0K$ . On écrira l'état du condensat en seconde quantification sous la forme:

$$|N:\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} a_0^{+N} |0\rangle \quad (6-10)$$

Toutes les particules sont alors dans l'état fondamental  $|\varphi_0\rangle$ . On peut manipuler le système en modifiant adiabatiquement le piège (l'état  $|\varphi_0\rangle$  restant continûment l'état fondamental) ou en libérant les particules ( $|\varphi_0\rangle$  subit alors une expansion libre et le condensat se dilate).

Le modèle idéal de bosons parfaits doit être corrigé pour tenir compte des interactions entre les atomes (collisions élastiques). Nous envisagerons ces corrections dans la prochaine leçon et décrivons tout d'abord divers effets d'interférence dans le modèle du condensat idéal sans interactions à  $T=0K$ .

Pour observer des interférences, il faut disposer d'au moins deux modes de condensat. Différentes situations sont possibles:

(i) cas de deux condensats préparés de façon indépendante: état de Fock à deux composantes:

L'état du système est un simple produit tensoriel:

$$|N_\alpha:\varphi_\alpha; N_\beta:\varphi_\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_\alpha! N_\beta!}} a_\alpha^{+N_\alpha} a_\beta^{+N_\beta} |0\rangle \quad (6-11)$$

Les états  $|\varphi_\alpha\rangle$  et  $|\varphi_\beta\rangle$  diffèrent soit en position (états de deux puits de potentiel disjoints) soit par un paramètre interne atomique (gaz à deux composantes préparées dans le même piège, correspondant par exemple à deux niveaux hyperfins atomiques).

(ii) cas de deux condensats préparés à partir d'un seul: état de phase à deux composantes.

On part d'un condensat simple ( $N$  atomes dans  $|\varphi_\alpha\rangle$ ) et on «mélange» les atomes entre les états  $|\varphi_\alpha\rangle$  et  $|\varphi_\beta\rangle$ . On peut alors (voir page suivante) préparer un état de la forme (6-4), que nous appelons « **état de phase** »

# Comment préparer un condensat à deux composantes dans un état de phase

## (i) évolution adiabatique du puits de potentiel:

On passe lentement d'un puits initial unique à un double puits final symétrique correspondant à des états fondamentaux à une particule pratiquement orthogonaux  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$ . Le système suit adiabatiquement, aboutissant à l'état de phase symétrique:

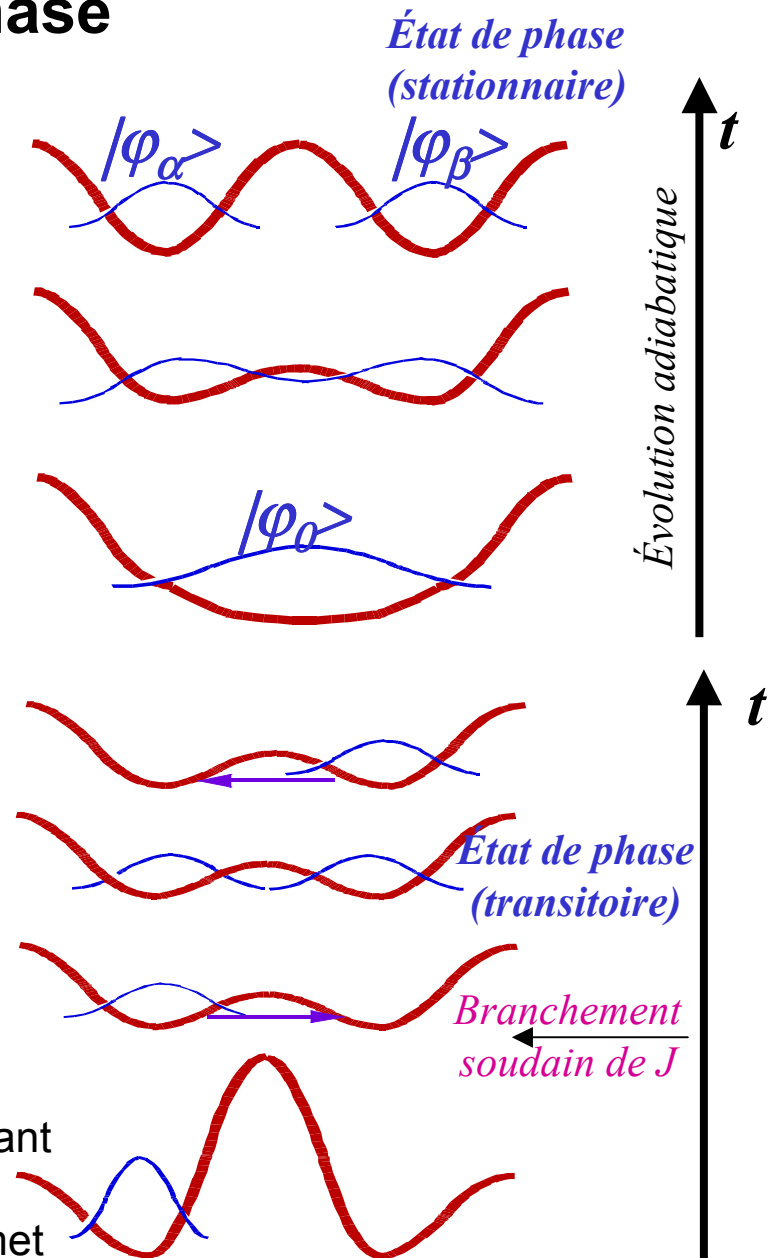
$$|N:\varphi_\alpha + \varphi_\beta\rangle = \frac{1}{2^{N/2} \sqrt{N!}} (a_\alpha^+ + a_\beta^+)^N |0\rangle \quad (6-12)$$

## (ii) Oscillation cohérente entre deux puits par effet tunnel (effet Josephson):

On part d'un condensat localisé d'un côté dans un double puits et on abaisse soudainement la barrière à une valeur correspondant à l'existence d'un effet tunnel appréciable. Le hamiltonien d'échange devient alors:

$$H_J = -\hbar J (a_\alpha^+ a_\beta + a_\alpha a_\beta^+) \quad (6-13)$$

où  $J$  est une constante homogène à une fréquence mesurant le taux de l'effet tunnel (nous supposons ici l'élément de matrice à 1 particule du couplage réel). Le condensat se met à osciller entre les deux puits, son état à l'instant  $t$  étant:



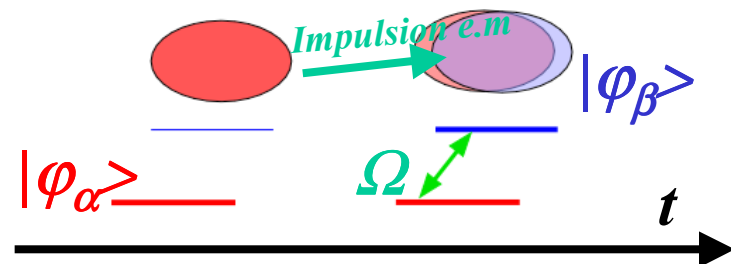
# Préparation d' un condensat à deux composantes dans un état de phase: oscillation Josephson et oscillation de Rabi

$$\left| N: \cos Jt \varphi_\alpha + i \sin Jt \varphi_\beta \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\cos Jt a_\alpha^+ + i \sin Jt a_\beta^+)^N |0\rangle \quad (6-14)$$

La situation est analogue à celle de la lame séparatrice linéaire en optique quantique. Le cas  $Jt = \pi/4$  correspond à une lame symétrique. On obtient à cet instant un état semblable à (6-12) au déphasage en  $i$  près. La phase de (6-12) correspond à celle de l'état stationnaire du hamiltonien (6-13), alors que le terme en  $i$  fait que l'état du système décrit par (6-14) représente  $N$  particules, chacune étant dans la superposition de l'état d'énergie fondamentale symétrique et de l'état d'énergie excité antisymétrique du double puits. Cette superposition n'est pas stationnaire, d'où l'oscillation dans le temps de type « effet Josephson ».

## (iii) Superposition de deux condensats associés à deux composantes hyperfines:

Le condensat est préparé dans un état hyperfin  $\varphi_\alpha$  et on applique une **impulsion électromagnétique** portant les atomes de façon cohérente de ce niveau à un autre état hyperfin  $\varphi_\beta$ . Le hamiltonien d'interaction avec le champ optique est, à résonance et en représentation d'interaction, de la forme (6-13). La constante  $J$  est maintenant la demi-fréquence de Rabi électromagnétique  $\Omega/2$ , proportionnelle à l'amplitude de l'impulsion. On a encore une évolution donnée par une équation de type (6-14). Noter que  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  diffèrent maintenant par leur état interne. Oscillation Josephson et oscillation de Rabi apparaissent ainsi comme deux phénomènes étroitement liés.



## Condensat à deux composantes dans un état de phase (suite)

Nous avons considéré par simplicité un couplage de phase donnée, correspondant au hamiltonien (6-14). On peut aussi bien ajuster la phase de l'impulsion pour que le hamiltonien d'interaction prenne en représentation d'interaction la forme plus générale:

$$H_{Rabi} = -\frac{\hbar\Omega}{2} (e^{-i\psi} a_{\alpha}^{+} a_{\beta} + e^{i\psi} a_{\alpha} a_{\beta}^{+}) \quad (6-15)$$

Le hamiltonien d'évolution en représentation d'interaction  $\exp(-iH_{Rabi} t/\hbar)$  transforme alors l'état  $(1/\sqrt{N!}) (a_{\alpha}^{+})^N |0\rangle$  en:

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} (\cos\theta(t) a_{\alpha}^{+} + e^{i(\psi+\pi/2)} \sin\theta(t) a_{\beta}^{+})^N |0\rangle \quad (\text{avec } \theta(t) = \Omega t / 2) \quad (6-16)$$

Cette expression, qui généralise le second membre de (6-14), se démontre à l'aide de la formule de Baker-Hausdorff (3-3) appliquée à l'opérateur  $a_{\alpha}^{+}$  en posant  $G = e^{-i\psi} a_{\alpha}^{+} a_{\beta} + e^{i\psi} a_{\alpha} a_{\beta}^{+}$

En choisissant la phase de l'impulsion et le temps d'interaction  $t$ , on peut générer en principe n'importe quel état de phase. En fixant  $\Omega t = \pi/2$ , on peut en particulier préparer un état de phase symétrique à nombre moyen de particules égal dans les deux composantes:

$$|N: \varphi_{\alpha} + e^{i\phi} \varphi_{\beta}\rangle = \frac{1}{2^{N/2} \sqrt{N!}} (a_{\alpha}^{+} + e^{i\phi} a_{\beta}^{+})^N |0\rangle \quad (6-17)$$



# Relation de conjugaison entre «définition» de la phase et «étendue» de la non-diagonalité de l'opérateur densité entre nombre différents de particules

L'état de phase général à deux composantes s'écrit:

$$|N; \theta, \phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\cos \theta a_{\alpha}^+ + \sin \theta e^{i\phi} a_{\beta}^+)^N |0\rangle$$

$$= \sum_p \binom{N}{p}^{1/2} \cos^{N-p} \theta \sin^p \theta e^{ip\phi} |N-p\rangle_{\alpha} |p\rangle_{\beta} \quad (6-18)$$

Il y a une distribution binômiale des nombres de particules dans les deux composantes. Les nombres moyens de particules et la variance de la différence du nombre de particules sont donnés par:

$$N_{\alpha} = N \cos^2 \theta; N_{\beta} = N \sin^2 \theta$$

$$\Delta(N_{\alpha} - N_{\beta}) = \sqrt{N} \sin 2\theta \quad (6-19)$$

La fluctuation  $\Delta(N_{\alpha} - N_{\beta})$  est maximale, égale à  $\sqrt{N}$ , pour un double condensat symétrique ( $\theta = \pi/4$ ) et nulle pour un mono-condensat ( $\theta = 0, \pi/2$ ).

Considérons à présent les états symétriques. La cohérence entre états de Fock de nombres de particules différents dans l'un des deux condensats s'écrit:

$$\langle N - p_1; p_1 | N; \pi/4, \phi \rangle \langle N; \pi/4, \phi | N - p_2; p_2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2^N} \binom{N}{p_1}^{1/2} \binom{N}{p_2}^{1/2} e^{i(p_1 - p_2)\phi} \quad (6-20)$$

Si la phase n'est pas bien définie et n'est connue que par sa loi de probabilité  $P(\phi)$ , on décrit le double condensat par l'opérateur densité:

$$\rho = \int_0^{2\pi} d\phi |N; \pi/4, \phi\rangle P(\phi) \langle N; \pi/4, \phi| \quad (6-21)$$

et la cohérence entre états à nombre différent de particules  $p_1$  et  $p_2$  dans  $\rho$  devient:

$$\langle N - p_1; p_1 | \rho | N - p_2; p_2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2^N} \binom{N}{p_1}^{1/2} \binom{N}{p_2}^{1/2} \int_0^{2\pi} d\phi P(\phi) e^{i(p_1 - p_2)\phi} \quad (6-22)$$

L'équ.(6-22) montre une relation de conjugaison de Fourier entre la phase et la différence du nombre de particules de deux états de Fock reliés entre eux par un élément de matrice non nul de  $\rho$ . Lorsque  $P(\phi)$  est une fonction  $\delta$ ,  $\rho$  possède des éléments non-diagonaux sur une largeur  $p_1 - p_2$  de l'ordre de  $\sqrt{N}$ . Plus  $P(\phi)$  est large, plus la distribution non-diagonale de  $\rho$  est étroite en  $p_1 - p_2$ . A la limite où  $P(\phi) = 1/2\pi$  (phase indéterminée),  $\rho$  est diagonal en  $p_1 - p_2$ . Il est alors décrit de façon équivalente comme une somme incohérente d'opérateurs diagonaux  $|N - p, p\rangle \langle N - p, p|$  représentant chacun un projecteur associé à deux condensats indépendants sans relation de phase.

# Interférence de deux modes de condensat: analogue du Mach-Zehnder optique (D.S.Hall et al, Phys.Rev.Lett. 81, 1543 (1998)).

1. Une première impulsion optique transforme un condensat (correspondant à un état à une particule  $\varphi_\alpha$ ) en une superposition à phase définie de deux modes de condensat ( $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ ):

$$|N: \varphi_\alpha + i \varphi_\beta\rangle = \frac{1}{2^{N/2} \sqrt{N!}} (a_\alpha^+ + i a_\beta^+)^N |0\rangle \quad (6-23)$$

Les fonctions  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  diffèrent par l'état électronique interne des atomes (états hyperfins différents). On peut écrire de façon plus précise (en notant respectivement par les indices  $e$  et  $CM$  les variables électroniques et du centre de masse):

$$|\varphi_\alpha\rangle = |\psi_1^e\rangle \otimes |\psi_1^{CM}\rangle; |\varphi_\beta\rangle = |\psi_2^e\rangle \otimes |\psi_2^{CM}\rangle \quad (6-24)$$

Les états électroniques et du centre de masse sont en toute rigueur corrélés (le centre du piège dépend de l'état hyperfin par son moment magnétique, différent dans  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$ ). Les deux composantes sont ainsi légèrement décalées dans l'espace et ne se recouvrent que partiellement.

2. Les deux modes accumulent une différence de phase due à la différence des énergies par atome dans chaque condensat ( $E_\beta - E_\alpha = \hbar\omega_{\beta\alpha}$ ):

$$|N: \varphi_\alpha + i \varphi_\beta\rangle \rightarrow \frac{1}{2^{N/2} \sqrt{N!}} (a_\alpha^+ + i e^{-i\omega_{\beta\alpha}T} a_\beta^+)^N |0\rangle \quad (6-25)$$

3. On applique une seconde impulsion à l'instant  $T$  qui re-mélange les condensats:

$$\rightarrow \frac{1}{2^N \sqrt{N!}} [a_\alpha^+ (1 - e^{-i\omega_{\beta\alpha}T}) + i a_\beta^+ (1 + e^{-i\omega_{\beta\alpha}T})]^N |0\rangle \quad (6-26)$$

On détecte les atomes par absorption d'un laser, sélective à partir des états  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$ . En fait, on supprime soudainement le piège, laisse le condensat s'étendre et on observe l'image d'absorption lorsque le nuage atomique est étendu. L'interférence ne s'observe que dans le recouvrement des deux condensats légèrement décalés (voir remarque ci-contre). On observe que la densité des atomes associée aux états  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  oscille en fonction de  $T$ . Noter l'analogie avec le Mach-Zehnder optique.

**Remarque importante:** Cette analyse néglige les interactions entre atomes. Nous n'avons rendu compte que des grandes lignes du phénomène (voir l'article de Hall et al pour plus de détails ou A.Sinatra et Y.Castin, Euro.Phys.Journal D 8, 319 (2000)).

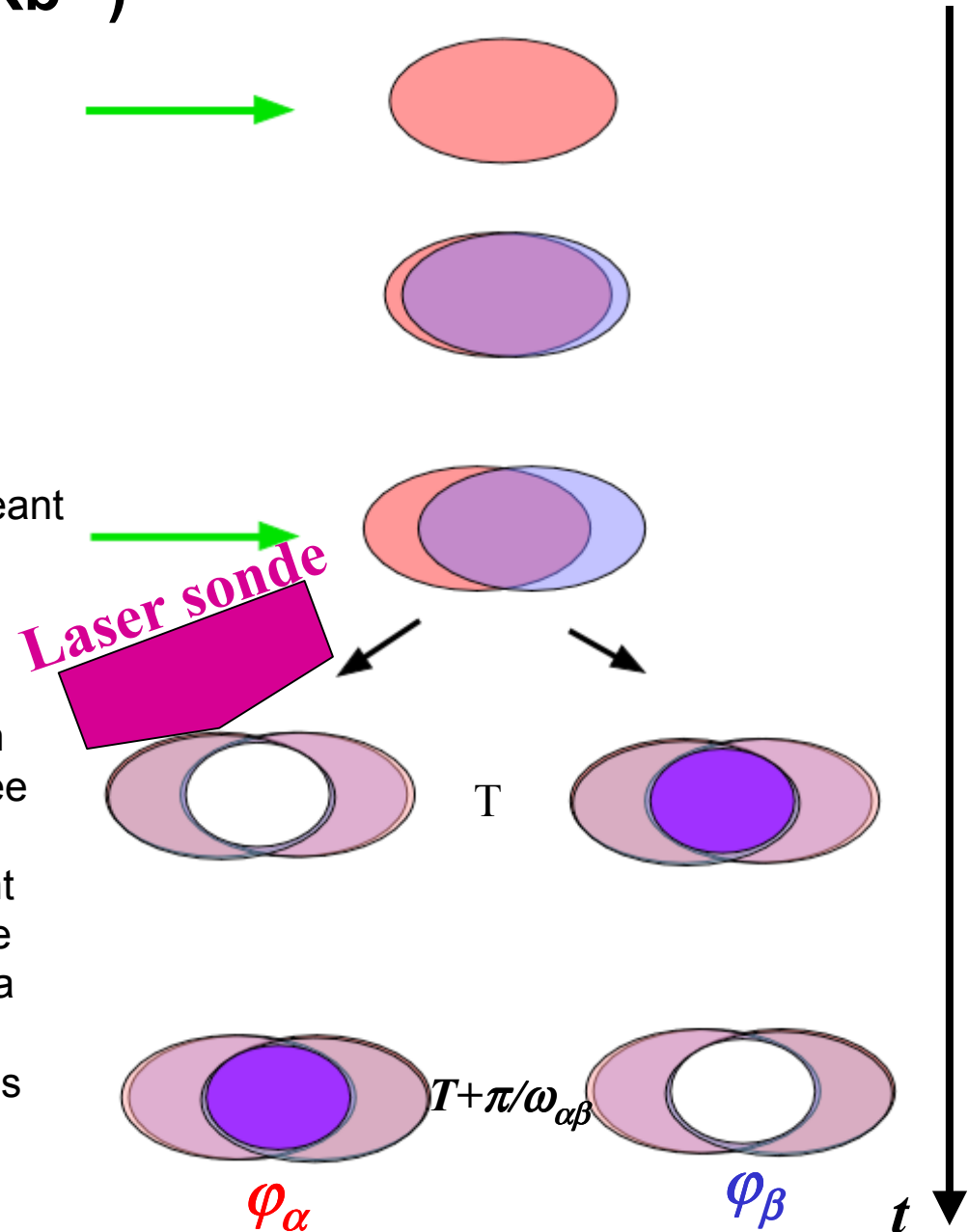
# Interférence de deux modes de condensat (états hyperfins du $\text{Rb}^{87}$ )

Condensat dans  $\varphi_\alpha$ : application d'une première impulsion mélangeant  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$

Les deux composantes se séparent partiellement (interactions non décrites ici)

Application d'une seconde impulsion mélangeant les deux états (délai  $T$  après la première)

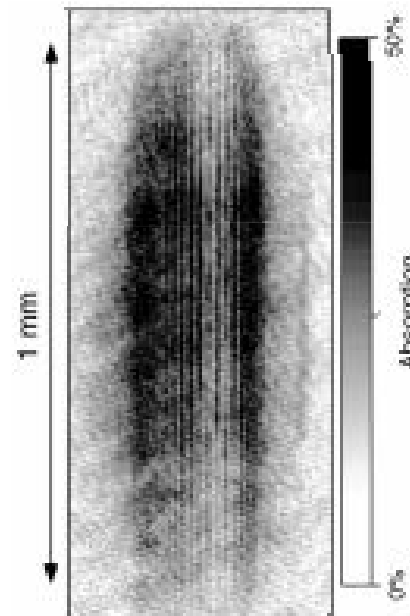
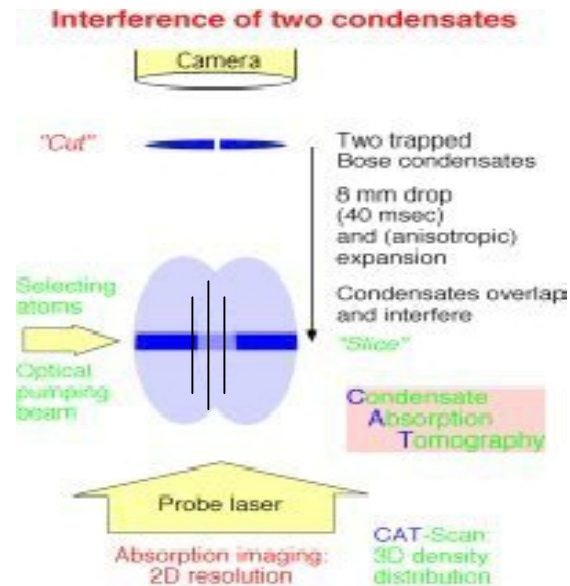
Après une expansion du nuage atomique (non représentée) on image la partie  $\varphi_\alpha$  (représentée à gauche) ou  $\varphi_\beta$  (à droite) à l'aide d'un laser absorbé sélectivement par les atomes. Suivant le délai  $T$ , l'absorption de chaque composante oscille, passant par des minima et des maxima en opposition de phase entre les deux composantes (analogue à la détection dans les deux voies de sortie d'un Mach-Zehnder optique)



# Franges d'interférences entre deux condensats indépendants

(Andrews et al, Science 275, 637 (1997))

Dans l'expérience de Hall et al, la relation de phase entre les deux modes d'ondes de matière est établie par l'impulsion qui les mélange. Décrivons maintenant une autre expérience, très simple effectuée avec deux condensats n'ayant pas initialement de relation de phase définie. Les deux ensembles, formés d'atomes identiques dans le même niveau interne, sont préparés dans deux pièges voisins mais séparés. Il est naturel de les décrire comme deux systèmes indépendants dans un état produit  $|N_\alpha\rangle|N_\beta\rangle$  (ou par un opérateur densité, somme incohérente de projecteurs sur de tels états produits). On supprime soudainement le piège, laissant les deux condensats s'étendre et se recouvrir. On observe alors, en faisant l'image du nuage atomique par absorption d'un faisceau laser, une figure d'interférence formée de franges parallèles, alternativement « sombres » (forte densité atomique) et claires (densité atomique quasi nulle). Comment interpréter ce résultat alors que les deux ondes de matière ne possèdent pas initialement de relation de phase?



Images du serveur du groupe Ketterle de MIT

# Interférence entre deux condensats indépendants: d'où vient la phase?

Dans une première approche, calculons la densité du double condensat en appelant  $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$  et  $\varphi_\beta(\mathbf{r})$  les fonctions d'onde à une particule des deux parties après leur expansion spatiale. Ces deux fonctions sont orthogonales puisqu'elles résultent de l'évolution libre (unitaire) de deux états initialement orthogonaux. Les opérateurs champ donnés par (6-6) et (6-7) se développent sur ces deux états et sur d'autres états orthogonaux qui complètent une base à une particule, et l'opérateur densité s'écrit:

$$\Psi^\dagger(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = \left| \varphi_\alpha(\vec{r}) \right|^2 a_\alpha^\dagger a_\alpha + \left| \varphi_\beta(\vec{r}) \right|^2 a_\beta^\dagger a_\beta + \varphi_\alpha^*(\vec{r})\varphi_\beta(\vec{r}) a_\alpha^\dagger a_\beta + \varphi_\beta^*(\vec{r})\varphi_\alpha(\vec{r}) a_\beta^\dagger a_\alpha + \dots (6-27)$$

(Les termes non écrits font intervenir d'autres modes non peuplés d'opérateurs  $a_\mu, a_\mu^\dagger$ ). Il est clair que la valeur moyenne des termes d'interférence de l'opérateur densité décrit par (6-27) est nulle dans l'état  $|N_\alpha\rangle|N_\beta\rangle$ , car cet état, n'a ni phase définie, ni élément de matrice entre états de Fock différents. La densité moyenne à une particule ne contient donc pas de terme d'interférence spatiale. Comment alors expliquer le signal expérimental?

L'opérateur densité moyen à une particule décrit le résultat d '**un ensemble statistique de mesures** effectuées sur des systèmes identiques, tous préparés dans le même état initial. La nullité des interférences observées sur cette quantité exprime simplement le fait que d'une réalisation à l'autre, les franges d'interférence, si elles existent sur chaque réalisation, doivent avoir des phases aléatoires. L'approche basée sur l'opérateur densité moyen n'est donc pas contradictoire avec l'existence des franges observées **sur une seule réalisation** du condensat, clairement démontrée par l'expérience. Pour comprendre d'où vient la phase des franges sur une seule réalisation, il nous faut cependant faire une analyse plus subtile et chercher à voir comment se bâtit au cours du temps le signal d'interférence.

## Interférence entre condensats: d'où vient la phase? (suite)

La phase du double condensat se construit en fait au fur et à mesure que les atomes sont détectés (pour une discussion plus détaillée de cet effet, voir Y.Castain et J.Dalibard, Phys.Rev.A, 55,4330 (1997) et Y.Castin, Cours des Houches, 1999). Commençons par décrire l'effet sur le système de la détection du premier atome au point  $r_1$ . Par analogie avec l'optique quantique, il est naturel de considérer que cette détection (observée par la diffusion de photons du laser de détection excitant l'atome et l'éjectant du condensat) est un processus destructeur d'un atome en  $r_1$ , décrit par l'opérateur champ  $\Psi(r_1)$ . Après cette détection, le système est «projeté» dans l'état:

$$\left| \phi(N_\alpha; N_\beta) / r_1 \right\rangle = \frac{1}{\langle N_\alpha; N_\beta | \Psi^\dagger(\vec{r}_1) \Psi(\vec{r}_1) | N_\alpha; N_\beta \rangle^{1/2}} \Psi(\vec{r}_1) | N_\alpha; N_\beta \rangle =$$

$$\frac{1}{\langle n_D(\vec{r}_1) \rangle^{1/2}} \left[ \sqrt{N_\alpha} \varphi_\alpha(\vec{r}_1) | N_\alpha - 1; N_\beta \rangle + \sqrt{N_\beta} \varphi_\beta(\vec{r}_1) | N_\alpha; N_\beta - 1 \rangle \right] \quad (6-28)$$

Ainsi le processus de détection du premier atome crée une superposition d'états de Fock différents, avec des amplitudes dépendant de la phase des fonctions d'onde  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  au point  $r_1$  de détection (aléatoire d'une réalisation à l'autre de l'expérience). Le nombre de particules dans chacun des deux condensats n'est alors plus exactement défini et, conformément à l'analyse faite plus haut, il apparaît entre eux une phase relative. Il est intéressant de remarquer que cette phase provient d'un processus d'interférence quantique. Lorsque l'on détecte le premier atome, rien ne permet de dire s'il provient d'un condensat ou de l'autre, d'où ambiguïté quantique et apparition d'une superposition. La probabilité de détecter le second atome (et les suivants) est alors déterminée par la phase qui commence à se bâtir et qui se précise au fur et à mesure que le nombre d'atomes détectés augmente. Comme la suite de valeurs  $r_1, r_2, r_3, \dots$  mesurées change aléatoirement d'une réalisation à l'autre, la phase des franges n'est pas la même pour chaque préparation du système. Nous verrons plus loin d'autres exemples de «mesure quantique continue» du même type.

## Corrélation entre les deux premiers atomes détectés

La phase apparaît dès la détection du deuxième atome. La position du premier est aléatoire, mais celle du deuxième est corrélée à celle du premier: certaines positions (distantes d'une demi-frange) sont moins probables que d'autres (distantes d'une frange). Vérifions le par le calcul de la **densité en  $r_2$  conditionnée à la détection d'un premier atome en  $r_1$** . L'expression obtenue à partir de (6-28):

$$\left\langle n_D(\vec{r}_2 / \vec{r}_1) \right\rangle = \left\langle \phi(N_\alpha; N_\beta) / \vec{r}_1 \left| \Psi^+(\vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_2) \right| \phi(N_\alpha; N_\beta) / \vec{r}_1 \right\rangle = \frac{1}{\left\langle n_D(\vec{r}_1) \right\rangle} \left\langle N_\alpha; N_\beta \left| \Psi^+(\vec{r}_1) \Psi^+(\vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_1) \right| N_\alpha; N_\beta \right\rangle \quad (6-29)$$

est tout à fait analogue au **taux de comptage double de photon** en optique quantique (équ.2-84). Pour calculer cette densité conditionnelle, on fait agir l'opérateur champ  $\Psi(r_2)$  sur l'état obtenu en faisant agir  $\Psi(r_1)$  sur l'état initial  $|N_\alpha, N_\beta\rangle$ . Après un calcul effectué pour simplifier dans le cas  $N_\alpha = N_\beta = N/2$  ( $N$  pair  $\gg 1$ ), on trouve:

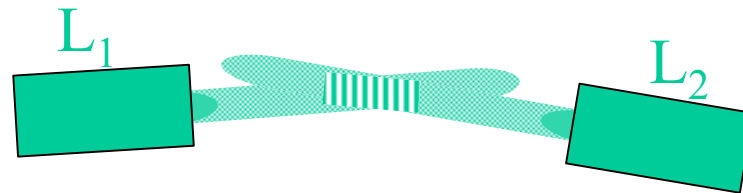
$$\left\langle n_D(\vec{r}_2 / \vec{r}_1) \right\rangle = \frac{N/2}{\left| \varphi_\alpha(\vec{r}_1) \right|^2 + \left| \varphi_\beta(\vec{r}_1) \right|^2} \left[ \left( \left| \varphi_\alpha(\vec{r}_1) \right|^2 + \left| \varphi_\beta(\vec{r}_1) \right|^2 \right) \left( \left| \varphi_\alpha(\vec{r}_2) \right|^2 + \left| \varphi_\beta(\vec{r}_2) \right|^2 \right) + 2 \operatorname{Re} \left( \varphi_\beta^*(\vec{r}_1) \varphi_\alpha^*(\vec{r}_2) \varphi_\beta(\vec{r}_2) \varphi_\alpha(\vec{r}_1) \right) \right] \\ = \left\langle n_D(\vec{r}_2) \right\rangle + N \frac{\operatorname{Re} \left( \varphi_\beta^*(\vec{r}_1) \varphi_\alpha^*(\vec{r}_2) \varphi_\beta(\vec{r}_2) \varphi_\alpha(\vec{r}_1) \right)}{\left| \varphi_\alpha(\vec{r}_1) \right|^2 + \left| \varphi_\beta(\vec{r}_1) \right|^2} \quad (6-30)$$

Assimilons les fonctions à une particule à deux ondes planes de vecteurs d'onde opposés, normées dans le volume  $V$  de chaque condensat:  $\varphi_\alpha(r) = (1/\sqrt{V}) \exp(+ikr)$ ;  $\varphi_\beta(r) = (1/\sqrt{V}) \exp(-ikr)$ . On obtient:

$$\left\langle n_D(\vec{r}_2 / \vec{r}_1) \right\rangle \approx \frac{N}{V} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos 2\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \quad (6-31) \quad \text{(Dès le second atome, on obtient un contraste de 50\%)}$$

# Conclusion: analogie entre optique quantique et physique des ondes de matière

L'analyse développée ici montre l'analogie profonde entre les interférences de photons en optique quantique et celles réalisées avec des ondes de matière dans des condensats de Bose Einstein. Les interférences entre deux condensats ayant une relation de phase définie sont de type Mach-Zehnder dans lesquelles un mécanisme d'oscillation de type Josephson ou Rabi joue le rôle des lames linéaires séparatrices de l'optique quantique. Les interférences entre condensats indépendants rappellent plutôt celles que l'on observe en optique entre les faisceaux de deux lasers. Là aussi, on observe des interférences, même si les deux sources n'ont a priori aucune relation de phase définie. L'interprétation des interférences est la même que celle que nous venons de donner pour les condensats: le premier photon détecté corrèle le champ des deux sources, car on n'a aucun moyen de savoir s'il provient d'un laser ou de l'autre. La phase se bâtit au fur et à mesure de la détection des photons.



Les expériences d'interférence de condensats à la Mach-Zehnder correspondent à un **comptage simple d'atomes**, analogue au comptage simple de photons de l'interférométrie ordinaire. Les expériences de franges spatiales, quant à elles, sont sensibles aux corrélations d'ordre plus élevé du champ bosonique et rappellent par certains aspects l'interférence à 2 photons de Ou et Mandel décrite à la leçon 3.

Nous avons jusqu'à présent négligé les interactions entre les atomes. Ceci ne peut être qu'une approximation assez grossière. Ces interactions jouent en effet un rôle essentiel dans la physique des condensats. Pendant l'étape de préparation du système, ce sont les collisions entre atomes qui assurent la thermalisation du gaz ultra-froid dans le processus de refroidissement évaporatif. Une fois le condensat préparé, l'effet des collisions est d'introduire dans chaque onde de matière une perturbation de type « effet Kerr » et de coupler entre elles les différentes ondes. Ces effets, analogues à des processus bien connus d'optique non-linéaire, se produisent spontanément dans les condensats et sont très utiles pour la préparation de SME d'ondes de matière. Nous les étudierons dans la prochaine leçon.