

Interférométrie non-linéaire dans les condensats de Bose-Einstein: effet des interactions entre atomes

Nous avons dans la leçon précédente analysé des expériences d'interférence entre ondes de matière cohérentes à l'approximation du gaz de bosons parfait, en négligeant les interactions entre atomes. Nous nous proposons aujourd'hui d'en tenir compte. Nous allons commencer par rappeler brièvement comment on peut, dans le formalisme de la seconde quantification décrire les collisions élastiques entre atomes dans le condensat et nous montrerons que ces collisions ont pour effet d'introduire dans le hamiltonien du système un terme analogue à celui d'un effet Kerr en optique.

Nous analyserons ensuite l'effet des interactions sur un état de phase d'un double condensat et montrerons qu'elles produisent une diffusion de sa phase, avec des résurgences périodiques de la cohérence traduisant le caractère granulaire du champ bosonique. Nous montrerons également que la non-linéarité liée aux interactions entre atomes conduit à l'apparition spontanée et transitoire d'états type chats de Schrödinger des ondes de matière dans le condensat. Nous verrons également que ces états, comme leurs analogues optiques, sont très fragiles et qu'en pratique, leur observation devient impossible pour des nombres d'atomes élevés.

Nous généraliserons enfin notre analyse en passant à la description de condensats multiples obtenus en piégeant un gaz de bosons dans un réseau optique cubique contenant un très grand nombre de puits. Cette situation correspond à une expérience récente. Nous verrons que la diffusion et la résurgence de la phase s'observent directement de façon spectaculaire sur les images obtenues en libérant finalement les atomes de leur piège. Ce système de condensat piégé dans un réseau tridimensionnel constitue un modèle idéal pour simuler des processus de la physique de la matière condensée. La transition de Mott entre une phase superfluide et une phase isolante du condensat y a été observée. Des applications sont possibles pour le traitement quantique de l'information (réalisation de réseaux de portes logiques - voir séminaire de W.Phillips du 5/11/02).

Interactions entre atomes dans les condensats: non-linéarité intrinsèque des ondes de matière

Nous allons maintenant tenir compte des interactions entre les atomes dans les condensats (collisions élastiques) et voir dans quelle mesure elles modifient les résultats établis précédemment sur la cohérence des ondes de matière et leurs interférences. De façon générale, deux atomes situés aux points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 interagissent suivant un potentiel $W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ que nous supposons de portée très faible devant l'extension spatiale a_{oh} de l'onde de matière (a_{oh} est de l'ordre de la dimension de l'état fondamental du puits harmonique dans lequel le condensat est confiné, typiquement de l'ordre de quelques μm , alors que la portée de W est de l'ordre de $1\text{\AA} = 10^{-4} \mu\text{m}$). D'autre part, à la limite des très faibles énergies, la diffusion est à symétrie sphérique même si le potentiel ne l'est pas («diffusion dans l'onde s»). On peut donc, avec une bonne approximation, décrire le potentiel par un terme de contact isotrope mis sous la forme simple:

$$W(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \approx \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (7-1)$$

Nous avons introduit dans la constante de proportionnalité du terme de contact une quantité a , homogène à une longueur, que l'on appelle la longueur de diffusion de la collision. M est la masse des atomes. La quantité $\hbar^2 a/M$ est homogène à une énergie multipliée par un volume, et W a la dimension requise.

Typiquement, pour les collisions entre atomes alcalins, a est de l'ordre de 1 à 10 nm et son signe peut être soit positif (les atomes se repoussent) soit négatif (ils s'attirent).

Nous nous limiterons au cas d'interactions répulsives et retiendrons que a/a_{oh} est typiquement de l'ordre de 10^{-3} .

La valeur moyenne de l'énergie d'interaction répulsive pour un condensat simple de N atomes tous dans l'état $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ est:

$$\langle W \rangle = N(N-1) \frac{2\pi\hbar^2 a}{M} \int d^3\vec{r} |\varphi_\alpha(\vec{r})|^4 \quad (7-2)$$

Cette énergie dépend du nombre d'atomes et de l'extension spatiale du condensat (problème « self-consistent »-voir page suivante)

Interactions entre atomes dans les condensats (suite)

En présence d'interactions entre atomes, l'énergie du condensat change, ainsi que la forme et la dimension de la fonction d'onde atomique $\varphi_\alpha(r)$. Pour déterminer l'état du système, on fait généralement une approximation de *champ moyen* revenant à considérer que tous les atomes sont dans le même état quantique, résultant de l'équilibre entre l'effet attractif du piège et l'effet répulsif des interactions. On cherche la fonction d'onde commune à une particule qui minimise la valeur moyenne de l'énergie totale (méthode de Hartree-Fock). Ce problème variationnel conduit à une équation de Schrödinger non-linéaire pour φ_α (équation de Gross-Pitaevskii) que nous n'explicitons pas. Nous nous contentons d'une analyse qualitative à *la Thomas-Fermi* montrant que la fonction d'onde du condensat n'est pas appréciablement modifiée tant que N reste inférieur à quelques centaines d'atomes.

Considérons un piège sphérique de dimension linéaire R. L'énergie cinétique de confinement des atomes dans ce piège est

$$E_C \approx N\hbar^2 / 2MR^2 \quad (7-3)$$

et l'énergie potentielle moyenne dans le piège:

$$E_P = Nm\omega^2 R^2 / 2 \quad (7-4)$$

où ω est la fréquence d'oscillation des atomes. Enfin, la valeur moyenne de l'interaction est:

$$\langle W \rangle = 3N^2\hbar^2 a / 2MR^3 \quad (7-5)$$

Si on néglige W, la taille du piège s'obtient en minimisant $E_C + E_P$ par rapport à R. On trouve alors sans surprise: $R = (\hbar/M\omega)^{1/2} = a_{oh}$.

En présence des interactions, la taille d'équilibre du condensat (et donc la « largeur » de φ_α) s'obtient de même en minimisant $E_C + E_P + \langle W \rangle$. Le résultat ne sera pas notablement différent de a_{oh} si $\langle W \rangle \ll E_C$ pour $R \sim a_{oh}$, ce qui donne:

$$N \leq \frac{a_{oh}}{a} \quad (7-6)$$

Soit en pratique $N < 10^3$. Nous supposons cette condition remplie dans la suite et négligerons donc la variation de la taille du condensat due aux interactions. Nous retrouverons plus loin cette condition avec une signification différente.

Interactions entre atomes dans un état de phase d'un double condensat

Considérons un double condensat préparé dans un état de phase symétrique, soit par établissement adiabatique de deux puits séparés à partir d'un piège unique, soit par application d'une impulsion de type Josephson ou Rabi mélangeant deux états à une particule (voir leçon 6). Quel est l'effet des interactions entre atomes sur cet état? Nous avons jusqu'à présent considéré des interactions à l'intérieur d'un condensat unique. Dans le cas d'un condensat double, il faut décrire les interactions entre atomes dans chaque partie ainsi que celles entre les atomes appartenant à deux parties différentes. Nous supposons pour simplifier que les interactions sont les mêmes dans chaque sous-système (même longueur de diffusion et même extension des deux fonctions φ_α et φ_β) et nulles ou négligeables entre sous-systèmes (c'est le cas pour deux puits spatialement séparés). Le terme d'énergie d'interaction dans le double condensat s'écrit alors:

$$W = W_\alpha + W_\beta = \frac{1}{2}g\hat{N}_\alpha(\hat{N}_\alpha - 1) + \frac{1}{2}g\hat{N}_\beta(\hat{N}_\beta - 1); \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \int d^3r |\varphi_\alpha(\vec{r})|^4; \quad \hat{N}_\alpha + \hat{N}_\beta = \hat{N} \quad (7-7)$$

Les états de Fock sont états propres de W . Les nombres d'atomes N_α et N_β fluctuent symétriquement autour de $N/2$ avec un écart de l'ordre de \sqrt{N} . Il est donc commode de poser $N_\alpha = N/2 + \delta N$ et $N_\beta = N/2 - \delta N$. On met alors l'énergie d'interaction dans l'état $|N_\alpha N_\beta\rangle$ sous la forme:

$$\langle W \rangle = g \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) + g \delta N^2 \quad (7-8)$$

L'énergie d'interaction varie de façon quadratique avec la différence du nombre de particules dans les deux condensats. L'état d'énergie d'interaction minimum est celui où les particules sont équ réparties au mieux ($\delta N = 0$ si N est pair, $\delta N = 1/2$ si N est impair).

Diffusion de phase liée aux interactions entre atomes

Reprenons l'expression de l'état de phase symétrique préparé à l'instant $t=0$, en changeant les notations de l'équation (6-18):

$$|\psi(0)\rangle = |N; \theta = \pi/4, \phi\rangle = \sum_{N_\alpha=0}^N \frac{e^{iN\phi/2}}{2^{N/2}} \sqrt{\frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!}} e^{-i(N_\alpha - N_\beta)\phi/2} |N_\alpha, N_\beta\rangle \quad (7-9)$$

et remanions (7-9) en introduisant l'écart δN et en remplaçant les factorielles par leur approximation par la formule de Stirling. On trouve à un facteur de phase global près:

$$|\psi(0)\rangle \approx \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/4} \sum_{\delta N} e^{-\delta N^2/N} e^{-i\delta N\phi} \left| \frac{N}{2} + \delta N, \frac{N}{2} - \delta N \right\rangle \quad (7-10)$$

La somme, en principe sur δN entre $-N/2$ et $+N/2$, est en pratique restreinte à $-\sqrt{N} < \delta N < \sqrt{N}$ (largeur du facteur exponentiel Gaussien). L'état à l'instant t s'obtient en affectant chacun des états de la superposition du facteur de phase évoluant à la fréquence de Bohr correspondante. D'où, à un facteur global de phase près:

$$|\psi(t)\rangle \approx \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/4} \sum_{\delta N} e^{-\delta N^2/N} e^{-i\delta N[\phi + (\omega_\alpha - \omega_\beta)t]} e^{-ig\delta N^2 t/\hbar} \left| \frac{N}{2} + \delta N, \frac{N}{2} - \delta N \right\rangle \quad (7-11)$$

↑ *Différence des énergies par particule dans les deux condensats (si potentiels chimiques différents)*
↙ *Effet des interactions entre atomes*

Le terme linéaire en $\delta N (\omega_\alpha - \omega_\beta) t$ translate simplement la phase de l'état dans le temps. Le terme de phase quadratique dû aux interactions décrit un étalement de la phase et donc un processus de diffusion qui fait disparaître les interférences de phase bien définie entre les deux condensats.

Comme nous le montrons page suivante, cet étalement de la phase est similaire à celui observé en optique quantique pour un état cohérent évoluant sous l'effet d'un hamiltonien de type Kerr.

Diffusion de phase due aux interactions entre atomes: analogie avec un effet Kerr en optique quantique

La situation est analogue à celle d'un champ cohérent d'amplitude $\alpha = \sqrt{\bar{n}} e^{-i\varphi}$ contenant en moyenne un grand nombre \bar{n} de photon (que nous prendrons entier pour simplifier) et soumis à un hamiltonien de type Kerr $H_{kerr} = \gamma(a^\dagger a)(a^\dagger a - 1)$ (voir leçon 4). La distribution des photons obéit alors à une loi de Poisson, approchable par une loi Gaussienne de largeur $\sqrt{\bar{n}}$ centrée en $n = \bar{n}$. En écrivant $n = \bar{n} + \delta n$, cet état devient à l'instant t:

$$|\alpha(t)\rangle \approx \left(\frac{2}{\pi \bar{n}}\right)^{1/4} \sum_{\delta n} e^{-\delta n^2 / \bar{n}} e^{-i(\bar{n} + \delta n)(\varphi + \alpha)} e^{-i\gamma[(\bar{n} + \delta n)^2 - (\bar{n} + \delta n)]t/\hbar} |\bar{n} + \delta n\rangle \quad (7-12)$$

On peut sortir de la sommation les termes de phase indépendants de δn (phase globale non écrite) et séparer dans la sommation ceux qui dépendent de puissances différentes de δn :

$$|\alpha(t)\rangle \propto \left(\frac{2}{\pi \bar{n}}\right)^{1/4} \sum_{\delta n} e^{-\delta n^2 / \bar{n}} e^{-i\delta n(\varphi + \omega t + 2\gamma \bar{n} t - \gamma)/\hbar} e^{-i\gamma(\delta n^2)t/\hbar} |\bar{n} + \delta n\rangle \quad (7-13)$$

une expression très semblable à (7-11).

La diffusion de phase peut aussi être rapprochée de l'étalement d'un paquet d'onde Gaussien d'une particule libre de masse m dans un mouvement à une dimension. L'état du paquet à l'instant t s'écrit en effet sous une forme analogue à (7-11) et (7-13):

$$|\Psi(t)\rangle = \int dk e^{-k^2 / \Delta^2 k} e^{ikx} e^{-i\hbar k^2 t / 2m} |k\rangle \quad (7-14)$$

(La position x joue le rôle de la phase et l'impulsion k celle du nombre de bosons ou de photons)

Temps d'étalement et de résurgence de la phase

Pour quantifier l'étalement de phase dans le double condensat, calculons la valeur moyenne du terme d'interférence $\langle a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha} \rangle$ (cohérence entre états différant d'une particule):

$$\langle a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha} \rangle \approx \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \sum_{\delta N} e^{-2\delta N^2/N} e^{-i[\varphi + (\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})t]} e^{-ig(2\delta N + 1)t/\hbar} \quad (7-15)$$

L'étalement de phase est effectif quand t est assez grand pour que la phase de l'exponentielle complexe $e^{-ig(2\delta N + 1)t/\hbar}$, considérée comme fonction de δN , augmente de 2π lorsque δN varie sur la largeur \sqrt{N} du « paquet » gaussien. Cette condition s'écrit donc $t > T_{\text{étalement}}$ avec:

$$T_{\text{étalement}} \approx \frac{\pi\hbar}{g\sqrt{N}} \quad (7-16)$$

Au bout de ce temps, les termes d'interférence de la forme $\langle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} \rangle$ se sont effacés sous l'effet des collisions entre atomes. De la même façon, un champ optique cohérent soumis à une dispersion de type Kerr verra sa phase disparaître au bout d'un temps de l'ordre de $\pi\hbar/\gamma\sqrt{\tilde{n}}$, avec annulation de la valeur moyenne des quadratures du champ.

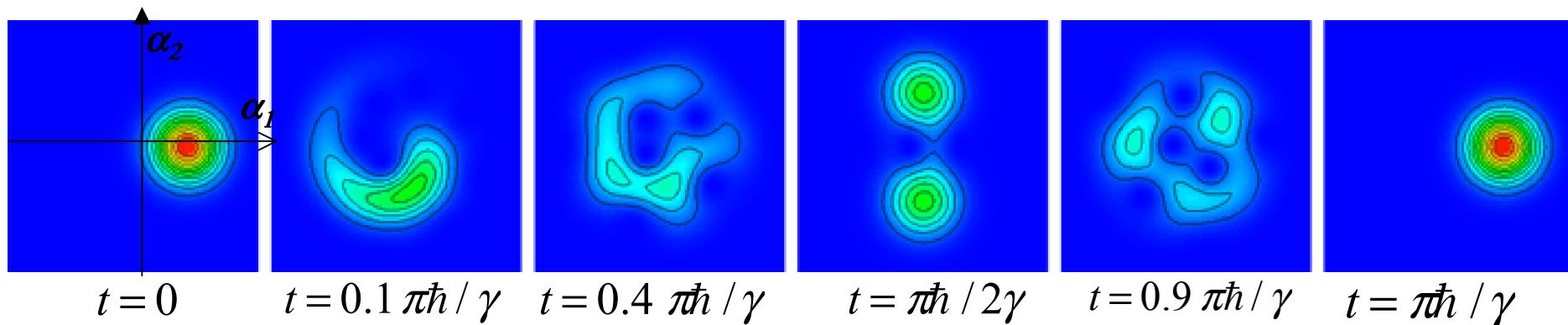
Cet effet est analogue à l'étalement du paquet d'onde Gaussien d'une particule libre, **avec une différence essentielle**: alors que l'intégrale (7-14) est continue, les sommations dans les équations (7-12) et (7-13) sont discrètes (**granularité du champ de bosons**). Ainsi au bout du temps:

$$T_{\text{résurgence}} = \frac{\pi\hbar}{g} \quad (7-17)$$

et de ses multiples, les différents termes de la somme se retrouvent en phase, avec résurgence de l'état initial et du terme d'interférence. Pour un état cohérent en optique, le même effet se produit au temps $\pi\hbar/\gamma$ l'état $|\alpha\rangle$ se reformant, avec retour de moyennes de quadratures non-nulles.

Evolution de la fonction Q d'un état cohérent en présence d'effet Kerr

La fonction $Q(\alpha)$ d'un champ initialement dans un état cohérent et contenant en moyenne trois photons est représentée à différents instants. Le champ évolue sous l'effet d'un hamiltonien de type Kerr $\gamma [(a^\dagger a)^2 - a^\dagger a]$. On rappelle que $Q(\alpha) = (1/\pi) |\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2$ (voir leçon 5). La figure représente le plan de phase rapporté aux parties réelle et imaginaire de α . La valeur de Q est représentée par un code de couleur (du rouge au bleu par valeurs décroissantes).



Les effets d'étalement et de résurgence de la phase, ainsi que l'apparition d'un chat de Schrödinger au temps de demi-résurgence (voir leçon 4), que nous avons calculés à la limite asymptotique où n est très grand, sont déjà bien apparents malgré le petit nombre de particules. Noter également l'apparition transitoire de « chats » à trois composantes (voir film).

QuickTime™ et un décompresseur
sont requis pour visualiser
cette image.

Figure et film pris sur le serveur du Groupe de T.Hansch (Munich)

Chat de Schrödinger d'un double condensat

L'analyse de l'effet Kerr sur un état cohérent nous a montré qu'au bout du temps $t = \pi\hbar/2g$, égal au demi-temps de résurgence, on avait une remise en phase des états de Fock avec apparition transitoire d'un chat de Schrödinger, superposition de deux états cohérents de phases opposées. Un effet analogue se produit dans le double condensat au temps $T_{résurgence}/2$. On a en effet:

$$g(\delta N)^2 T_{résurgence} / 2\hbar = \frac{\pi}{2} (\delta N)^2 = \begin{cases} 0 & \text{pour } \delta N \text{ pair} \\ \pi/2 & \text{pour } \delta N \text{ impair} \end{cases} \pmod{2\pi} \quad (7-18)$$

on obtient alors en séparant les contributions paires et impaires de δN :

$$\begin{aligned} |\psi(t = \pi\hbar/2g)\rangle \approx & \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{1/4} \left[\sum_{\delta N=2q} e^{-\delta N_{pair}^2/N} e^{-i\delta N_{pair}[\phi+(\omega_\alpha-\omega_\beta)\pi\hbar/2g]} \left| \frac{N}{2} + \delta N_{pair}, \frac{N}{2} - \delta N_{pair} \right\rangle \right. \\ & \left. + e^{-i\pi/2} \sum_{\delta N=2q+1} e^{-\delta N_{impair}^2/N} e^{-i\delta N_{impair}[\phi+(\omega_\alpha-\omega_\beta)\pi\hbar/2g]} \left| \frac{N}{2} + \delta N_{impair}, \frac{N}{2} - \delta N_{impair} \right\rangle \right] \quad (7-19) \end{aligned}$$

Supposons que $N/2$ est entier et pair. Alors, on constate immédiatement que les parties «paires» et «impaires» de la somme (7-19) correspondent respectivement au développement de:

$$\begin{aligned} |\psi^{pair}\rangle &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{N/2}} \left[(a_\alpha^+ + e^{-i\bar{\phi}} a_\beta^+)^N |0\rangle + (a_\alpha^+ - e^{-i\bar{\phi}} a_\beta^+)^N |0\rangle \right] \\ & \text{avec } \bar{\phi} = \phi + (\omega_\alpha - \omega_\beta)\pi\hbar/2g \\ |\psi^{impair}\rangle &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{N/2}} \left[(a_\alpha^+ + e^{-i\bar{\phi}} a_\beta^+)^N |0\rangle - (a_\alpha^+ - e^{-i\bar{\phi}} a_\beta^+)^N |0\rangle \right] \quad (7-20) \end{aligned}$$

Regroupant les termes de façon analogue à l'équation (4-29), on obtient finalement:

$$|\psi(t = \pi\hbar/2g)\rangle = \frac{1}{2^{N/2}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} (a_\alpha^+ + e^{-i\bar{\phi}} a_\beta^+)^N |0\rangle + \frac{1}{2^{N/2}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} (a_\alpha^+ - e^{-i\bar{\phi}} a_\beta^+)^N |0\rangle \quad (7-21)$$

(Les cas $N/2$ impair ou demi entier se traitent de même, avec des états chats d'expression similaire).

Chat de Schrödinger d'un double condensat (suite)

L'équation (7-21) montre que, comme dans le modèle de Yurke-Stoler en optique quantique, la non-linéarité de type Kerr prépare le double condensat, à un instant bien précis correspondant au temps de demi-résurgence de la phase, dans une superposition macroscopique de deux états différents. Les N bosons sont tous dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_a\rangle + e^{-i\varphi}|\varphi_b\rangle)$ *et à la fois* tous dans l'état orthogonal $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_a\rangle - e^{-i\varphi}|\varphi_b\rangle)$. Cet état est transitoire. Si on attend un temps double par exemple, on retrouvera le système dans un état de phase ordinaire où les N atomes sont à nouveau tous dans le même état quantique.

Pour préparer ce « chat », il faudrait imaginer un processus qui permette de « débrancher » les interactions associées aux collisions. On peut faire varier la longueur de diffusion a , et donc g , en appliquant un champ magnétique aux atomes (« résonances Feschbach »). On peut également envisager de couper le piège et laisser la fonction d'onde à une particule s'étendre, ce qui a pour effet de diminuer très rapidement g . On pourrait ajuster le temps de demi-résurgence pour aboutir à l'état « chat » voulu au moment où les interactions sont devenues pratiquement nulles.

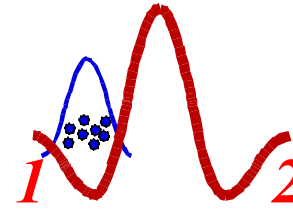
L'ordre de grandeur du temps de préparation du chat dépend de g . On a typiquement:

$$g / \hbar \approx \frac{4\pi\hbar a}{M} \frac{1}{a_{oh}^3} \approx 1 - 10^2 s^{-1} \quad (7-22)$$

et le temps réaliste de préparation $\pi\hbar/2g$ est de l'ordre de 10^{-2} s à 1s. Ce temps est à comparer à la durée de vie du condensat T_{cond} , de quelques secondes à quelques dizaines de secondes. Comme pour les chats optiques, la perte d'un seul atome (due à des collisions à trois corps, ou à des collisions sur des atomes non condensés) détruit la cohérence, en laissant fuir dans l'environnement une information sur l'état du système. Le temps de décohérence est donc de l'ordre de T_{cond}/N . On doit avoir $T_{cond}/N > \pi\hbar/2g$ soit $N < 2gT_{cond}/\pi\hbar \sim 10 - 10^3$. Cet ordre de grandeur, déduit ici de considérations empiriques sur les performances actuelles des expériences de condensats, sera retrouvé plus loin de façon plus fondamentale.

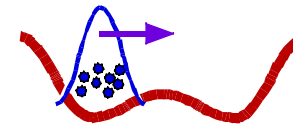
Principe de préparation d'un chat de deux condensats

(a) condensat de N bosons préparé dans un puits 1, séparé d'un puits 2 par une grande barrière

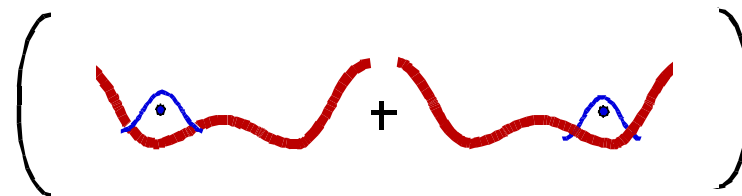


(a)

(b et c) on abaisse soudainement la barrière à un niveau tel que $\hbar J \gg g$ et on attend un temps tel que $Jt = \pi/4$: l'effet tunnel crée un état de phase: N bosons dans un état superposition.

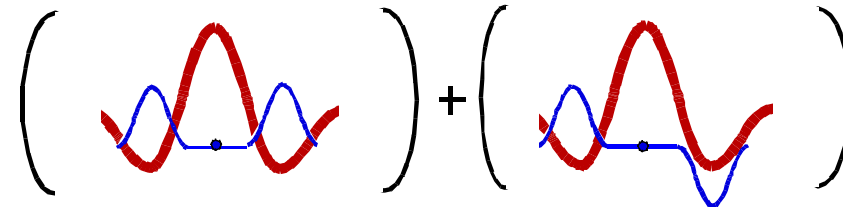


(b)



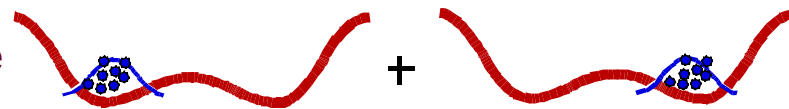
(c)

(d) séparation soudaine des deux puits par élévation de la barrière. Effet des interactions dans chaque puits. Au bout du temps $T_{\text{résurgence}}/2$, un chat est préparé: N atomes dans état symétrique superposé à N atomes dans état antisymétrique



(d)

(e) pour séparer spatialement le chat: rétablir l'effet tunnel par abaissement soudain de la barrière et laisser évoluer pendant un quart de période: Les N atomes se localisent tous à droite et à gauche!



(e)

t

Comment observer cette SME? Méthode indirecte: laisser évoluer dans la configuration de puits séparés (d) pendant un temps supplémentaire $T_{\text{résurgence}}/2$ et observer le retour de l'état de phase (c), preuve de la nature cohérente du chat intermédiaire (voir plus loin expérience réelle effectuée sur un système à puits multiples)

Décohérence des chats de condensats atomiques

Tout processus de collision expulsant des atomes du système va détruire la cohérence de la SME car la mesure du produit de la collision peut en principe permettre de déterminer la composante du chat à partir de laquelle elle a eu lieu, levant ainsi l'ambiguïté quantique. Une première cause de collisions est due au gaz résiduel d'atomes non condensés et d'atomes d'autres espèces toujours présent dans l'appareil (aucun vide n'est parfait). Il s'agit là cependant de problèmes que l'on peut considérer comme « techniques ». Supposons donc qu'il n'y a pas d'autres atomes et que T est assez proche de 0K pour pouvoir négliger la fraction d'atomes non condensés. Il reste alors un processus important, celui des collisions à trois corps dans le condensat: la collision de trois atomes alcalins peut conduire à la formation d'une molécule diatomique et à l'éjection d'un atome, supprimant la cohérence. Ce processus ne peut être totalement supprimé car son taux n'est pas indépendant du taux des collisions élastiques dont le rôle est essentiel pour la préparation de la SME. On peut montrer (Fedichev et al, Phys.Rev.Lett. 77, 2921 (1996)) que le nombre par seconde de tels processus est de l'ordre de:

$$\kappa_{3\text{corps}} \approx \frac{\hbar a^4 N^3}{M} \int d^3 r |\varphi(\vec{r})|^6 \approx \frac{\hbar a^4 N^3}{M a_{oh}^6} \quad (7-23)$$

où $\varphi(r)$ est la fonction d'onde du condensat, dont l'amplitude au centre du puits est de l'ordre de $1/a_{oh}^{3/2}$. Une condition nécessaire de non-décohérence est qu'aucun processus à trois corps ne se produise pendant le temps $T_{\text{résurgence}}/2$, soit:

$$\frac{\kappa_{3\text{corps}} T_{\text{résurgence}}}{2} < 1 \rightarrow \left(\frac{aN}{a_{oh}} \right)^3 < 1 \rightarrow N \leq \frac{a_{oh}}{a} \quad (7-24)$$

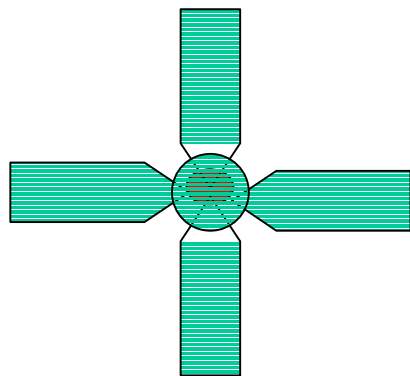
On retrouve la condition (7-6) qui exprime que le condensat est assez petit pour que sa taille soit insensible au nombre d'atomes. Cette condition apparaît maintenant comme constituant une limite à la taille des SME réalisables. Avec les dimensions habituelles de condensat, on trouve $N < 10^2 - 10^3$. On peut essayer d'augmenter N avec des condensats moins confinés (a_{oh} plus grand). C'est difficile en pratique car le taux de collisions élastiques diminue très vite, rendant très lent le processus de préparation du chat ($T_{\text{résurgence}}$ varie en N^3).

Condensat dans un potentiel périodique à trois dimensions: des états de phase aux états de Fock

Nous avons considéré jusqu'ici des doubles condensats. Depuis quelques mois, des expériences sont faites sur des condensats multiples, obtenus en piégeant les atomes dans un potentiel périodique cubique à M sites, constitué par 3 ondes stationnaires laser se recouvrant sur le volume de l'échantillon atomique et exerçant sur les atomes une force dipolaire. Chaque puits contient en moyenne $N/M = 2$ à 3 atomes. Suivant la valeur relative du couplage J entre puits voisins et de l'interaction g entre atomes dans un puits, on observe des comportements très différents. Lorsque $\hbar J \gg g$, le condensat a une fonction d'onde délocalisée, avec une relation de phase définie entre les composantes associées aux différents puits (état « superfluide »). Au contraire, si $g \gg \hbar J$, le nombre de particules dans chaque puits ne fluctue pas et il n'y a plus de relation de phase entre les puits (particules localisées, correspondant à un état « isolant »). Il y a une transition de phase (dite de Mott) entre ces deux situations pour une valeur précise du rapport $g/\hbar J$. Voir le séminaire de W. Phillips pour une autre discussion de ce problème.

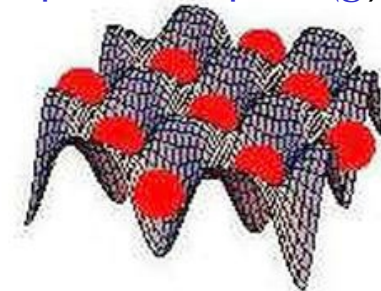
L'évolution du système est régie par le **hamiltonien de Bose-Hubbard**:

$$H = \sum_{i=1}^M \hbar\omega a_i^+ a_i - \hbar J \sum_{(i,j \text{ voisins})} a_i^+ a_j + \frac{1}{2} g \sum_i a_i^+ a_i (a_i^+ a_i - 1) \quad (7-25)$$



Un ensemble de trois ondes stationnaires dans les 3 directions de l'espace se recouvre sur un condensat initialement piégé dans un potentiel magnétique

Le potentiel optique périodique (réseau cubique) piège les atomes. Effet tunnel inter-puits voisins (J) et interactions atomiques intra-puits (g).



L'état superfluide: cohérence maximale entre les sites

Commençons par le cas $\hbar J \gg g$. Soit $\varphi_i(\mathbf{r})$ la fonction d'onde à une particule dans le puits i et a_i^+ l'opérateur de création d'un boson dans ce puits. L'état fondamental des N bosons s'écrit:

$$|N; \sum \varphi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (A_{SF}^+)^N |0\rangle; \quad A_{SF}^+ = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M a_i^+ \quad (7-26)$$

où A_{SF}^+ est l'opérateur de création d'un boson dans l'état de Bloch superposition symétrique de tous les états associés aux puits individuels. On peut également en isolant un puits écrire:

$$A_{SF}^+ = \frac{1}{\sqrt{M}} a_1^+ + \sqrt{1 - \frac{1}{M}} b_1^+; \quad b_1^+ = \frac{1}{\sqrt{M-1}} \sum_{j=2}^M a_j^+ \quad (7-27)$$

La décomposition (7-27) permet d'appliquer les résultats de la loi binômiale. On obtient très simplement les valeurs moyennes des nombres de particules:

$$\langle A_{SF}^+ A_{SF} \rangle = N; \quad \langle a_1^+ a_1 \rangle = \frac{N}{M}; \quad \langle b_1^+ b_1 \rangle = N(1 - \frac{1}{M}) \quad (7-28)$$

et la variance du nombre de bosons par puits:

$$\sqrt{\langle \delta n_1^2 \rangle} = \sqrt{\frac{N}{M} (1 - \frac{1}{M})} \approx \sqrt{\frac{N}{M}} = \sqrt{\langle n_1 \rangle} \quad (7-29)$$

Calculons à l'aide de (7-27) la corrélation entre le nombre de bosons dans le puits 1 et les autres:

$$\langle A_{SF}^+ A_{SF} \rangle = \frac{1}{M} \langle a_1^+ a_1 \rangle + (1 - \frac{1}{M}) \langle b_1^+ b_1 \rangle + \frac{\sqrt{M-1}}{M} \langle a_1^+ b_1 + a_1 b_1^+ \rangle \quad (7-30)$$

soit compte tenu de (7-28):

$$\langle a_1^+ b_1 + a_1 b_1^+ \rangle = N \frac{M}{\sqrt{M-1}} \left[(1 - \frac{1}{M^2}) - (1 - \frac{1}{M})^2 \right] = \frac{2N(\sqrt{M-1})}{M} \quad (7-31)$$

On remarque enfin que par raison de symétrie:

$$\langle a_1^+ b_1 + a_1 b_1^+ \rangle = 2\sqrt{M-1} \langle a_1^+ a_i \rangle \quad (i \neq 1) \quad (7-32)$$

D'où finalement, compte tenu de (7-31) et (7-28):

$$\langle a_1^+ a_i \rangle = \frac{N}{M} = \langle a_1^+ a_1 \rangle \quad (7-33)$$

Ainsi dans l'état superfluide, les corrélations entre deux puits quelconques sont égales au nombre moyen de particules par puits. Il y a une relation de phase bien définie entre deux puits quelconques et cohérence de tout le réseau.

Notons enfin que pour le calcul de la variance du nombre de bosons par puits et de la cohérence $\langle a_i^+ a_j \rangle$ entre deux puits, tout se passe comme si chaque puits contenait un état cohérent d'amplitude $\alpha = (N/M)^{1/2}$, tous ces états cohérents ayant la même phase.

L 'état isolant: pas de relation de phase entre les sites

Considérons maintenant le régime opposé ($g \gg \hbar J$). Le Hamiltonien du système est alors dominé par le terme d 'interaction entre atomes dans chaque puits:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} g \sum_i n_i (n_i - 1) \quad ; \quad n_i = a_i^+ a_i \quad (7-34)$$

Cet hamiltonien admet comme état propre les produits tensoriels d 'états de Fock dans les différents puits. Il est commode, comme pour le cas de deux puits, d 'introduire l 'écart à la moyenne δn_i du nombre de bosons par puits:

$$\delta n_i = n_i - \frac{N}{M} \quad ; \quad \sum_i \delta n_i = 0 \quad (7-35)$$

ce qui permet après une manipulation simple de réécrire l 'interaction sous la forme:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} g N \left(\frac{N}{M} - 1 \right) + \frac{1}{2} g \sum_i (\delta n_i)^2 \quad (7-36)$$

qui généralise l 'équ (7-8) correspondant à $M = 2$

L 'équ(7-36) montre que l 'état fondamental du système dans le régime $g \gg \hbar J$ correspond à une équi-répartition aussi exacte que possible des bosons entre les puits. Si N est divisible par M l 'état fondamental du système correspond à $\delta n_i = 0$ pour tout i et l 'état fondamental est:

$$|N:\text{isolant}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{(N/M)!}} \right)^M \prod_{i=1}^M (a_i^+)^{\frac{N}{M}} |0\rangle \quad (7-37)$$

Si N/M est non entier, on écrira $N/M = N_0 + m$ où N_0 est entier et m une fraction comprise entre 0 et 1. L 'état fondamental est obtenu avec N_0 bosons par site, en ajoutant un boson dans une fraction m des sites. Cet état est alors dégénéré.

Partant de l 'état fondamental, on obtient le premier état excité en déplaçant un boson d 'un puits contenant N_0 bosons à un autre. On vérifie alors sans peine que l 'énergie augmente de g . Si on effectue la même opération sur 2 sites au lieu de 1, l 'énergie augmente de $2g$ et ainsi de suite. Les niveaux d 'énergie dans ce régime sont donc équidistants, avec un « gap » g entre le niveau fondamental et le premier état excité. Ce gap a pour conséquence que même si J n 'est pas complètement négligeable, il y a un état fondamental du système isolé en énergie des autres. Les bosons sont gelés dans leurs puits sans fluctuation d 'un puits à l 'autre. Il n 'y a pas de relation de phase cohérente entre les puits et:

$$\langle a_i^+ a_j \rangle_{\text{isolant}} = 0 \quad (i \neq j) \quad (7-38)$$

(comparer avec l 'état superfluide, equ 7-33)

Image cohérente (état superfluide) ou incohérente (état isolant)

Les phases superfluide et isolante donnent des images très différentes après expansion du condensat. Soit $\varphi_i(\vec{r}, t)$ la fonction d'onde mono-atomique associée au site i du réseau, après expansion pendant le temps t . La densité du nuage atomique étendu au point \vec{r} est donnée par:

$$\langle \Psi^+(\vec{r})\Psi(\vec{r}) \rangle = \sum_{i,j} \varphi_i^*(\vec{r}, t)\varphi_j(\vec{r}, t) \langle a_i^+ a_j \rangle \quad (7-39)$$

Dans la phase superfluide, les corrélations $\langle a_i^+ a_j \rangle$ sont toutes égales à N/M . On a donc:

$$\langle \Psi^+(\vec{r})\Psi(\vec{r}) \rangle = \frac{N}{M} \left| \sum_i \varphi_i(\vec{r}, t) \right|^2 \quad (7-40)$$

Appelons alors $\bar{\varphi}_0(\vec{p})$ la T.F de la fonction d'onde $\varphi_0(\vec{r}, 0)$, associée au puits «central», à l'instant $t = 0$ avant expansion. On a à l'instant t :

$$\sum_i \varphi_i(\vec{r}, t) = \sum_i \int d^3 p \bar{\varphi}_0(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i) / \hbar} e^{-ip^2 t / 2M\hbar} \quad (7-41)$$

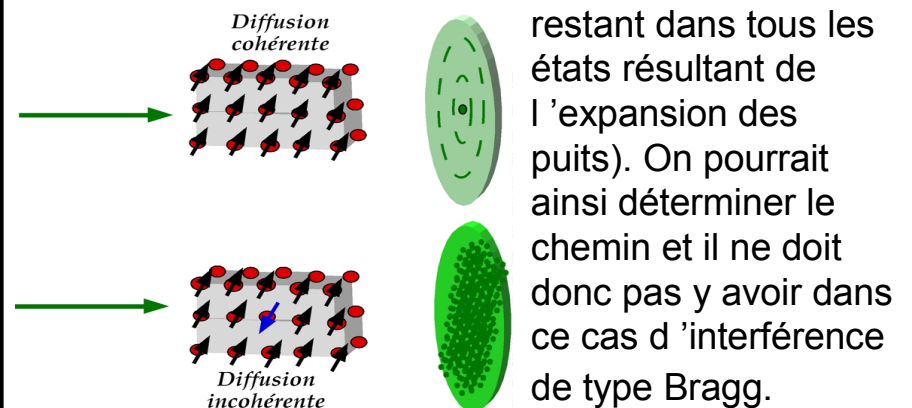
L'équ.(7-41) rappelle l'expression d'une onde de matière (par exemple de neutrons) diffusée par un réseau cristallin. Le vecteur \vec{p} représente le transfert d'impulsion de la diffusion, $\bar{\varphi}_0(\vec{p})$ est le « facteur de forme » décrivant la diffusion élémentaire d'un centre. Ces ondes partielles interfèrent entre elles. L'équ. (7-40) est ainsi analogue à celle de l'intensité diffusée de façon cohérente par le cristal. On s'attend donc à observer dans l'image du condensat un ensemble de pics séparés par des zones obscures dans les directions de « diffusion » nulle (analogue à la diffraction de Bragg).

Dans l'état isolant, au contraire, les corrélations $i \neq j$ dans (7-39) sont nulles et l'on a:

$$\langle \Psi^+(\vec{r})\Psi(\vec{r}) \rangle \propto \sum_i |\varphi_i(\vec{r}, t)|^2 \quad (7-42)$$

L'image est incohérente, sans pic discret autre que l'origine (image diffuse). Les images après expansion sont donc très différentes dans les états superfluide et isolant.

Ce résultat illustre une fois de plus la notion de **complémentarité**. Dans le problème de la diffusion, il n'y a cohérence que si rien ne permet de distinguer le chemin suivi par les particules (voir Cours 2001-2002, leçon 3). Par exemple, si la diffusion d'un neutron est inélastique (renversement de spin dans le cristal), elle est incohérente car le spin retourné est un détecteur de chemin. Dans le cas de l'image du condensat dans l'état isolant, rien n'empêche en principe de chercher, après détection du premier atome quel est le puits d'où il est venu (il suffirait de compter exactement le nombre d'atomes



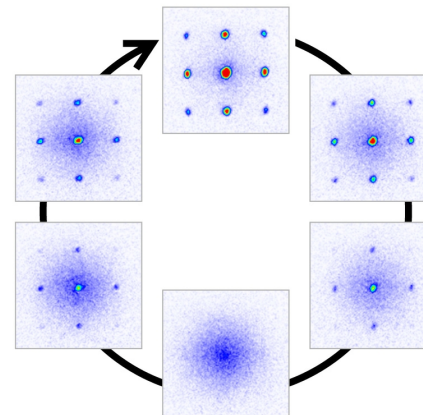
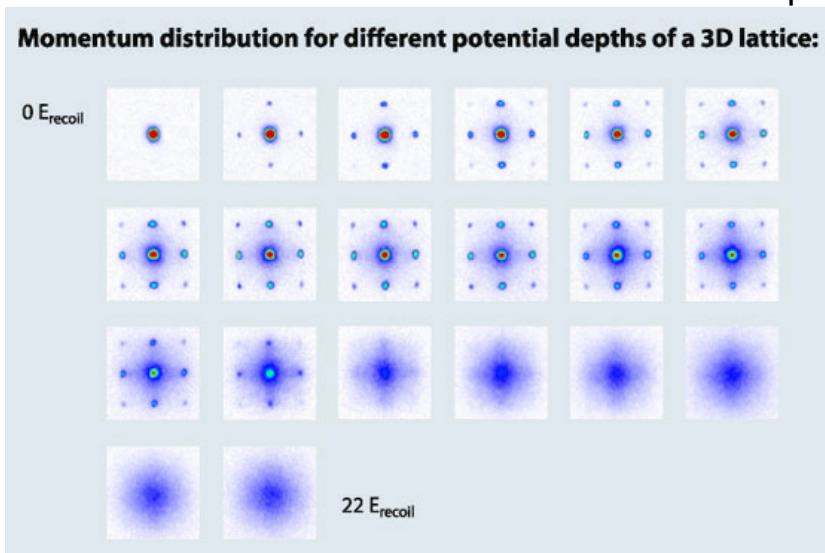
restant dans tous les états résultant de l'expansion des puits). On pourrait ainsi déterminer le chemin et il ne doit donc pas y avoir dans ce cas d'interférence de type Bragg.

Résultats de l'expérience de Munich (Greiner et al)

Dans l'expérience, on établit l'état superfluide en branchant adiabatiquement le réseau optique sur un condensat piégé magnétiquement, en variant progressivement l'amplitude finale du potentiel optique. Le système reste continûment dans l'état fondamental. Pour un potentiel optique très faible, il y a essentiellement une fonction d'onde gaussienne étendue sur l'ensemble du système. Sa TF est une tache autour de $p = 0$ (1ère image de la fig. de gauche). Au fur et à mesure que le le potentiel optique final sépare mieux les sites, on voit apparaître l'image de diffraction avec ses pics discrets (première et deuxième ligne de la fig. de gauche). Cette image est la signature de la phase superfluide. Pour une certaine amplitude du réseau optique, le rapport $g/\hbar J$ dépasse la valeur critique, l'état fondamental du système devient isolant et le réseau de taches devient diffus (transition de Mott - 3ème ligne de la fig. de gauche)). Si on cycle le potentiel, dépassant le point de transition et l'abaissant ensuite on voit réapparaître la phase cohérente (fig. de droite).

Remarque: Le raisonnement de la page précédente s'applique à une moyenne statistique sur un ensemble de réalisations alors que dans l'expérience chaque image correspond à une seule réalisation. On pourrait donc s'attendre à observer, pour l'état isolant une image cohérente d'orientation ou de forme aléatoire, comme dans le cas de l'interférence de 2 condensats indépendants (voir leçon 6). Or ce n'est pas le cas. Les images individuelles de l'état isolant sont diffuses. On peut montrer en fait que la détection en un point du premier atome

crée une corrélation $\langle a_i a_j \rangle$ en $1/M$ entre sites différents. Pour $M \approx 10^5$, cette corrélation est négligeable, alors qu'elle correspond à un contraste de 50% pour $M=2$ (interférence de deux condensats). La phase ne peut se bâtir progressivement au cours de la mesure lorsque $M \gg 1$ et l'image de condensats indépendants sur un grand nombre de sites est incohérente.



Figures du site du groupe de T.Hänsch (Munich)

Effondrement et résurgence de la phase du condensat dans le potentiel optique

Dans une autre expérience le groupe de Munich commence par préparer un condensat dans le régime superfluide ($g/\hbar J \ll 1$), puis augmente **soudainement** le potentiel au dessus de la transition de Mott, en un temps court devant le temps caractéristique d'effet tunnel $1/J$. Le système se trouve ainsi préparé à l'instant $t=0$, sans avoir eu le temps d'évoluer (donc toujours dans l'état superfluide) alors que le Hamiltonien a maintenant des états propres correspondant à l'état isolant. La situation a déjà été traitée plus haut dans le cas de deux puits. Pour étudier l'évolution du système, il faut projeter l'état initial superfluide sur la base des produits tensoriels d'états de Fock dans les puits séparés, états propres d'énergie du système dans le nouveau régime. Chaque composante évolue librement à une fréquence caractéristique multiple de g/\hbar . Le battement de toutes ces composantes conduit à une diffusion de la phase, qui se traduit rapidement par une disparition des cohérences $\langle a_i^+ a_j \rangle$ avec $i \neq j$.

Pour calculer la corrélation $\langle a_1^+ a_2 \rangle$, on commence par évaluer la distribution de probabilité $\Pi(p)$ pour que les deux puits partagent p particules. Celle-ci est donnée à une bonne approximation par une loi de Poisson de valeur moyenne $2N/M$:

$$\Pi(p) = \frac{(2N/M)^p}{p!} e^{-2N/M} \quad (7-43)$$

Lorsque les puits 1 et 2 partagent p particules, la corrélation entre eux est donnée par la formule (7-15) où N est remplacé par p .

A la limite où N/M et p sont grands devant 1, on obtient donc:

$$\langle a_2^+ a_1 \rangle \approx e^{-2N/M} \sum_p \frac{(2N/M)^p}{p!} \left(\frac{p}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (7-44)$$

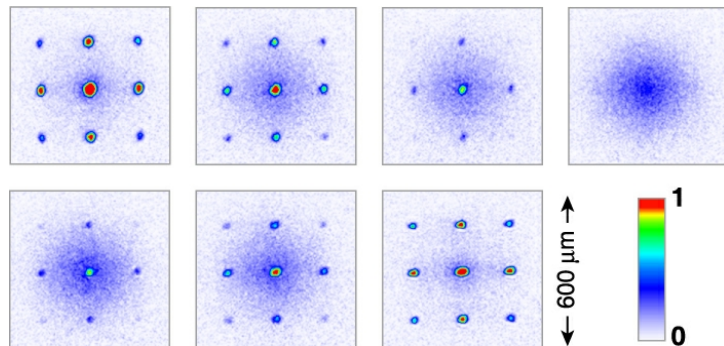
$$\times \sum_{\delta N} e^{-2\delta N^2/p} e^{-ig(2\delta N+1)t/\hbar}$$

Chacune des sommes sur δN dans (7-44) se « brouille » dès que $gt/\hbar > 1/\sqrt{p}$. Comme p est de l'ordre de $2N/M$, on en déduit que le temps de perte de phase est:

$$T_{\text{étalement}} = \pi\hbar / g\sqrt{2N/M} \quad (7-45)$$

Effondrement et résurgence de la phase du condensat (suite)

Comme dans le cas de deux puits, on attend que la cohérence revive au bout du temps de résurgence $\pi\hbar/g$. Les niveaux d'énergie du condensat dans la phase isolante sont en effet discrets, séparés de multiples de g . Après un nombre entier de périodes, la phase superfluide se reforme donc. On observe l'effet en faisant l'image du condensat à des instants croissants après la préparation soudaine du système. La perte de phase se manifeste par la disparition de la figure de diffraction cohérente (4ème figure). Au bout d'un temps double (7ème figure), la cohérence renaît. Plusieurs résurgences successives ont ainsi été observées. On note que l'expérience est faite avec N/M de l'ordre de 2, un régime où la formule asymptotique de la disparition de phase établie page précédente ne s'applique pas. On observe bien pourtant le phénomène, même si les phases d'effondrement et de résurgence ne sont pas vraiment séparées dans le temps. On notera enfin qu'au temps de demi-résurgence, il doit apparaître dans le système des états de type **chat de**



Schrödinger. Nous n'étudierons pas l'intrication complexe entre les puits qui se produit alors. Remarquons que si on se limite à observer deux puits (en traçant sur tous les autres), on obtient pour chacune des valeurs de p possibles un chat à deux composantes du type (7-21). Le système de deux puits quelconques est donc, au temps $T_{\text{résurgence}}/2$ dans une superposition incohérente de « chats » pondérée par la distribution des valeurs de p . L'expression de chacun de ces chats est donnée par une formule analogue à (7-21).

On écrira donc l'opérateur densité du système des deux puits:

$$\rho_{12}(t = \pi\hbar/2g) = \sum_p \Pi(p) |\psi_{\text{chat } p}^{12}(t = \pi\hbar/2g)\rangle \langle \psi_{\text{chat } p}^{12}(t = \pi\hbar/2g)| \quad (7-46)$$

En comptant exactement le nombre d'atomes dans les $M-2$ autres puits, on projetterait l'état des deux puits sur un « chat dans un état pur » de p donné (impossible à faire en pratique!)

Conclusion

Les collisions atomiques élastiques dans les condensats de Bose Einstein permettent une manipulation cohérente des états du système. L'évolution sous l'effet de ces collisions est unitaire et réversible, ce qui n'est pas le cas de collisions atomiques ordinaires dans un gaz classique. Nous avons vu que ces collisions peuvent servir à préparer des SME, limitées en théorie à quelques centaines d'atomes. En pratique, des expériences récentes montrent qu'il est possible de préparer des « mini-SME » de quelques atomes. Augmenter la taille de ces systèmes est un défi très difficile à relever car la perte d'un seul atome du système détruit sa cohérence. La situation est à cet égard tout à fait comparable aux SME photoniques. L'utilisation des condensats à puits multiples pour construire des réseaux de portes logiques utilisant les collisions atomiques comme moyen de couplage réversible entre les qubits est une possibilité explorée activement par plusieurs équipes de recherche dans le monde (voir le séminaire de W.Phillips au Collège de France).

Quelques références

(voir aussi celles données dans le texte de la leçon 6)

Cours du Collège de France de Claude Cohen-Tannoudji sur les condensats de Bose Einstein (Années 1997-1998 à 2001-2002-disponibles sur le serveur du Collège de France et de l'ENS)

Yvan Castin. Cours des Houches « Bose Einstein Condensates in atomic gases » également disponible sur le serveur ENS. Voir aussi A.Sinatra et Y.Castin, Eur.Phys.J.D.4, 247 (1998).

Sur les expériences récentes de Munich: « Quantum Phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of Ultracold atoms, Greiner et al, Nature 415, 39 (2002). « Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate », Greiner et al, Nature, 419, 51 (2002).

Propositions théoriques de chats dans les condensats: « Collapse and revivals of Bose-Einstein condensates formed in small atomic samples », Wright et al, Phys.Rev. Lett. 77, 2158 (1996); « Quantum superpositions states of Bose-Einstein condensates, Cirac et al, Phys.Rev.A. 57, 1208 (1998); « Creating macroscopic quantum superpositions with BEC », Gordon et Savage, Phys.Rev.A. 59, 4623 (1999); « Decoherence in Bose Einstein condensates: towards bigger and better Schrödinger cats », Dalvit et al, Phys.Rev.A, 62, 013607-1 (2000); « Bistability and macroscopic quantum coherence in a Bose Einstein Condensate of Li7 » Montana et Arrecchi, Phys.Rev.A. 66, 013605-1 (2002); Y.Castin et J.Dalibard, communication privée.