

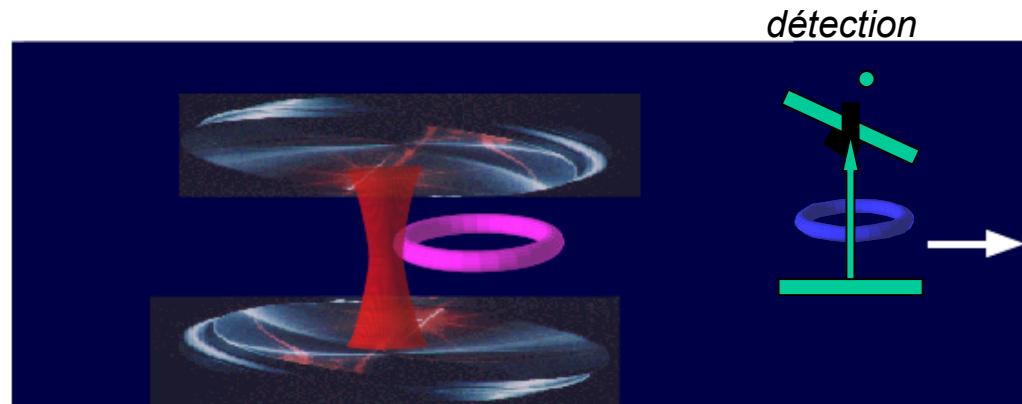
«Chats de Schrödinger» en électrodynamique quantique en cavité: interaction résonnante atome-champ.

Nous revenons dans les deux dernières leçons à la description de chats de Schrödinger du champ électromagnétique. Il s'agit de SME réalisées dans des expériences d'électrodynamique en cavité (CQED) impliquant des atomes de Rydberg dans des cavités micro-onde supraconductrices. Nous présentons la théorie de ces expériences en montrant comment on génère ces états en faisant interagir avec un atome à deux niveaux un champ cohérent pouvant contenir un grand nombre de photons. Nous montrons aussi comment on peut les détecter et observer leur décohérence. Nous décrivons enfin une expérience réalisée en 1996 à l'ENS dans laquelle ces idées théoriques ont été mises en pratique et des chats de Schrödinger constitués de quelques photons ont été étudiés.

Ces expériences sont plus proches de la métaphore originale de Schrödinger que les SME décrites jusqu'à présent dans ce cours. Rappelons que Schrödinger a imaginé une situation où un objet macroscopique (un chat) est couplé avec un atome radioactif. Il a montré que les lois quantiques entraînent que cet objet s'intrigue avec l'atome, conduisant à la situation paradoxale du chat à la fois vivant et mort. Dans les expériences décrites ici, le chat est remplacé par un champ formé de photons et les états vivant et mort sont des états d'amplitude ou de phase différentes de ce champ. Comme dans la métaphore de Schrödinger, la séparation des deux états est créée par le couplage avec un atome. Allant plus loin que la fable de Schrödinger, nous analysons comment la cohérence entre les états vivant et mort peut être testée, en utilisant un 2ème atome («souris quantique»).

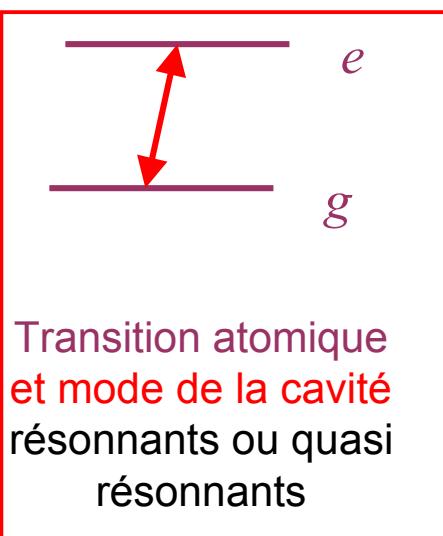
Nous consacrons la leçon 8 au couplage résonnant atome-champ, en étudiant l'oscillation de Rabi de l'atome dans un champ cohérent ainsi que l'effet d'effondrement et de résurgence de cette oscillation et nous montrons comment ces effets sont liés à l'apparition de chats de Schrödinger du champ. L'étude présentée ici est basée sur l'approche de Gea-Banacloche (Phys.Rev.A. 44, 5913 (1991); d'autres références seront données à la fin de la leçon 9). Dans la leçon 9 nous aborderons le cas du couplage non-résonnant atome-champ (situation des expériences réalisées à l'ENS).

Principe des expériences d 'électrodynamique quantique en cavité (atomes de Rydberg -photons micro-onde)



Cavité micro-onde supraconductrice de grand facteur de qualité ($T_{cav} = 1\text{ms}$) (mode de fréquence $\omega \approx 2\pi \times 50\text{GHz}$)

Atome de Rydberg circulaire de grande durée de vie ($T_{atome} = 30\text{ ms}$). Système à deux niveaux quasi idéal: e et g sont deux niveaux de Rydberg voisins (nombre quantique principal ≈ 50).



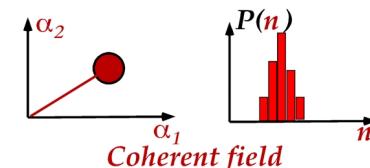
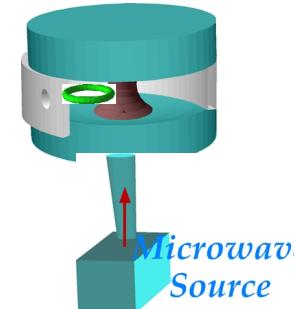
Pour plus de détails, voir leçons 9 et 10 du cours 2001-2002 et séminaire de Michel Brune

Fort couplage atome champ:

Fréquence de Rabi $\Omega = 2\pi \times 50\text{KHz} \gg 1/T_{atom}, 1/T_{cav}$

Ionisation de l'atome par champ électrique et détection sélective des deux niveaux e et g.

Préparation d'un état cohérent par couplage de la cavité avec une source classique (voir leçon 2)



Diagonalisation exacte du hamiltonien de Jaynes-Cummings

Le hamiltonien d 'un atome à deux niveaux couplé à un mode d 'une cavité s 'écrit (voir Leçon 2):

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + \frac{\hbar\omega_0}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \frac{\hbar\Omega}{2}(a^\dagger |g\rangle\langle e| + a|e\rangle\langle g|) \quad (8-1)$$

où a et a^\dagger sont les opérateurs de création et d 'annihilation d 'un photon du mode, $|e\rangle$ et $|g\rangle$ les deux niveaux de la transition atomique, ω , ω_0 et Ω respectivement la fréquence du champ, celle de la transition atomique et la fréquence de Rabi mesurant le couplage atome-champ. Le hamiltonien est écrit à l 'approximation du champ tournant (RWA-voir Leçon 2). Les trois termes représentent respectivement le hamiltonien du champ (H_{champ}), celui de l 'atome (H_{at}) et leur interaction H_{int} . Le Hamiltonien (8-1) est dit de « Jaynes-Cummings» . Il joue un rôle important dans toutes les théories des lasers et masers et en Eléctrodynamique Quantique en Cavité (CQED).

Les états propres de l 'hamiltonien non couplé $H_{champ}+H_{at}$ sont les produits tensoriels $|e, n\rangle, |g, n\rangle$ décrivant l'atome dans e ou g en présence d 'un nombre défini n de photons. L 'interaction H_{int} couple ces états 2 par 2, en séparant les sous-espaces à deux niveaux $S_n \{ |e, n\rangle, |g, n+1\rangle \}$.

La restriction de H à S_n (projecteur P_n) s 'écrit, en introduisant les matrices de Pauli σ_z et σ_x :

$$\frac{1}{\hbar} P_n H P_n = (n+1)\omega + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \Omega\sqrt{n+1} \\ \Omega\sqrt{n+1} & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} = (n+1)\omega + \frac{1}{2} [(\omega_0 - \omega)\sigma_z + \Omega\sqrt{n+1}\sigma_x] \quad (8-2)$$

Il est commode d 'introduire l 'angle de couplage: $\theta_n = \text{Arc tan}(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{\omega_0 - \omega}) \quad (0 \leq \theta_n < \pi) \quad (8-3)$

D 'où les états propres de $P_n H P_n$:

$$|+,n\rangle = \cos\frac{\theta_n}{2}|e,n\rangle + \sin\frac{\theta_n}{2}|g,n+1\rangle$$

$$|-,n\rangle = \sin\frac{\theta_n}{2}|e,n\rangle - \cos\frac{\theta_n}{2}|g,n+1\rangle \quad (8-4)$$

et les énergies propres associées:

$$\frac{1}{\hbar} E_{\pm n} = (n+1)\omega \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \Omega^2(n+1)} \quad (8-5)$$

Oscillation de Rabi dans champ résonnant: première approche

A résonance exacte ($\omega = \omega_0, \theta_n = \pi/2$), (8-4) et (8-5) deviennent:

$$|+,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e,n\rangle + |g,n+1\rangle)$$

$$|-,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e,n\rangle - |g,n+1\rangle) \quad (8-6)$$

$$\frac{1}{\hbar} E_{\pm n} = (n+1)\omega \pm \frac{1}{2}\Omega\sqrt{(n+1)} \quad (8-7)$$

L'évolution d'un atome, dans e à $t=0$, couplé soudainement au champ contenant n photons, s'écrit:

$$|\Psi(0)\rangle = |e,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,n\rangle + |-,n\rangle) \rightarrow |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(n+1)\omega t}(e^{-i\Omega\sqrt{n+1}t/2}|+,n\rangle + e^{i\Omega\sqrt{n+1}t/2}|-,n\rangle) \quad (8-8)$$

et la probabilité de trouver l'atome à t dans e est:

$$P_e(t) = \langle e,n | \Psi(t) \rangle^2 = \cos^2 \frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2} t \quad (8-9)$$

C'est l'oscillation de Rabi. Si le champ est initialement dans un état cohérent, on pondère les différentes oscillations, dont la fréquence dépend de n , par la probabilité d'avoir n photons dans le champ cohérent (loi de Poisson). On trouve:

$$P_e(t) = \sum_n |C_n|^2 \langle e,n | \Psi(t) \rangle^2 = e^{-\bar{n}} \sum_n \frac{\bar{n}^n}{n!} \frac{1 + \cos(\Omega\sqrt{n+1} t)}{2} \quad (8-10)$$

La situation « classique » correspond à $\bar{n} \rightarrow \infty$ et $\Omega \rightarrow 0$ avec $\Omega\sqrt{\bar{n}} = \Omega_{cl}$ fini. On obtient alors une oscillation de Rabi infinie dans le temps. Dès que le nombre de photon est fini cependant la

distribution de valeurs de n dans le champ cohérent conduit à un étalement des fréquences et à un effondrement de l'oscillation. On évalue le temps d'étalement en écrivant que la variation de la phase de l'oscillation sur la largeur $\sqrt{\bar{n}}$ de la Loi de Poisson est de l'ordre de π :

$$\Omega \left. \frac{d(\sqrt{n+1})}{dn} \right|_{n=\bar{n}} \times \sqrt{\bar{n}} T_{étalement} = \pi \rightarrow T_{étalement} = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (8-11)$$

Ainsi l'oscillation de Rabi dans un champ cohérent contenant un grand nombre (fini) de photons s'effondre au bout d'un temps $T_{étalement}$ dont l'ordre de grandeur est la période de Rabi quantique dans le champ du vide. Cette période est typiquement de 20 μs dans les expériences de l'ENS (voir leçon 9 du cours 2001-2002).

Différence entre étalement de l'oscillation de Rabi et étalement de phase de type Kerr.

Malgré l'analogie de vocabulaire, l'effet décrit ici est différent de l'étalement de la phase d'un champ cohérent en présence d'effet Kerr (leçons 4 et 7). Notons d'abord que ce n'est pas la phase du champ qui s'effondre ici, mais celle de l'oscillation de Rabi observée sur un signal atomique. Notons encore que le temps d'étalement est ici indépendant du nombre de photons, alors qu'il est inversement proportionnel à la racine de ce nombre dans le cas de l'effet Kerr.

Le calcul simple que nous venons de faire ne dit d'ailleurs rien sur l'état du champ et sur ce qui arrive à sa phase au temps $T_{\text{étalement}}$ et plus tard. Pour le comprendre, nous allons maintenant calculer l'évolution globale du système atome-champ sur un intervalle de temps très étendu, de l'ordre de $T_{\text{étalement}} \sqrt{n}$. (voir Gea-Banacloche). Nous ferons l'approximation que n est grand mais fini et développerons les termes en $\sqrt{n+1}$ autour de $n = \bar{n}$. Nous allons voir que le champ se sépare en deux composantes de phases disjointes qui s'intriquent à deux états atomiques différents. Nous verrons aussi que cette intrication dépend du temps. Cette analyse nous montrera comment apparaissent des états chat de Schrödinger du champ sous l'effet du couplage résonnant avec un atome. Elle nous montrera également que la phase de l'oscillation de Rabi «renaît» au bout d'un temps fini, et nous verrons les analogies et différences avec la résurgence de phase de type Kerr.

Supposant que l'atome est à $t=0$ dans l'état e en présence d'un champ cohérent α (de phase réelle), on obtient l'état exact du système à l'instant t en utilisant l'équ.(8-8):

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= |e, \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n C_n (|+,n\rangle + |-,n\rangle) \rightarrow |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n C_n e^{-i(n+1)\omega t} (e^{-i\Omega\sqrt{n+1}t/2} |+,n\rangle + e^{i\Omega\sqrt{n+1}t/2} |-,n\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n C_n e^{-i(n+1)\omega t} \left\{ e^{-i\Omega\sqrt{n+1}t/2} (|e,n\rangle + |g,n+1\rangle) + e^{i\Omega\sqrt{n+1}t/2} (|e,n\rangle - |g,n+1\rangle) \right\} \quad (8-13) \end{aligned}$$

Oscillation de Rabi dans champ cohérent: calcul approché

Remanions l'expression exacte (8-13) en remplaçant dans la sommation les états $|g,n+1\rangle$ par $|g,n\rangle$ et en faisant l'approximation:

$$\sqrt{n+1} \approx \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \approx \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (8-14)$$

On peut négliger la différence entre les coefficients réels C_{n+1} et C_n , mais pas celle entre $e^{-i\Omega\sqrt{n}t/2}$ et $e^{-i\Omega\sqrt{n+1}t/2}$ dont on évalue la différence à l'aide de (8-14). On trouve alors:

$$|\Psi(t)\rangle \approx \frac{1}{2} \sum_n C_n e^{-i(n+1)\omega t} e^{-i\Omega\sqrt{n}t/2} |n\rangle (e^{-i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle + e^{i\omega t} |g\rangle) + \frac{1}{2} \sum_n C_n e^{-i(n+1)\omega t} e^{i\Omega\sqrt{n}t/2} |n\rangle (e^{i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle - e^{i\omega t} |g\rangle) \quad (8-15)$$

Nous remplaçons ensuite les facteurs de phase en $\Omega\sqrt{n}t/2$ en développant \sqrt{n} autour de $n = \bar{n}$:

$$\sqrt{n} \approx \sqrt{\bar{n}} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{n}}} (n - \bar{n}) - \frac{1}{8\bar{n}^{3/2}} (n - \bar{n})^2 \dots = \frac{\sqrt{\bar{n}}}{2} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1}{8\bar{n}^{3/2}} (n - \bar{n})^2 \dots \quad (8-16)$$

On obtient alors:

$$|\Psi(t)\rangle \approx \frac{1}{2} e^{-i\Omega\sqrt{\bar{n}}t/4} \sum_n C_n e^{-i(n+1)\omega t} e^{-i\frac{\Omega nt}{4\sqrt{n}}} e^{i\frac{\Omega(n-\bar{n})^2 t}{16\bar{n}^{3/2}}} |n\rangle (e^{-i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle + e^{i\omega t} |g\rangle) \\ + \frac{1}{2} e^{i\Omega\sqrt{\bar{n}}t/4} \sum_n C_n e^{-i(n+1)\omega t} e^{i\frac{\Omega nt}{4\sqrt{n}}} e^{-i\frac{\Omega(n-\bar{n})^2 t}{16\bar{n}^{3/2}}} |n\rangle (e^{i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle - e^{i\omega t} |g\rangle) \quad (8-17)$$

On reconnaît l'expression de deux états cohérents déphasés (termes de phase en $\Omega n t$) et « étalés » par un effet de type Kerr (termes de phase en $\Omega n^2 t$ encerclés). L'étalement de la phase se produit en un temps T tel

que $\frac{\Omega T}{16\bar{n}^{3/2}} \sqrt{\bar{n}} \approx 2\pi \rightarrow \Omega T \approx 32\pi \bar{n}$ (voir leçon 7). Pour $t \ll T$, on peut pour une discussion qualitative

négliger ce terme de diffusion de phase. En effectuant alors les sommes sur C_n , on obtient:

$$|\Psi(t)\rangle \approx \frac{1}{2} e^{-i\Omega\frac{\sqrt{\bar{n}}}{4}t} e^{-i\omega t/2} \left| \alpha e^{-i(\omega + \frac{\Omega}{4\sqrt{n}})t} \right\rangle (e^{-i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} e^{-i\omega t/2} |e\rangle + e^{i\omega t/2} |g\rangle) + \frac{1}{2} e^{i\Omega\frac{\sqrt{\bar{n}}}{4}t} e^{-i\omega t/2} \left| \alpha e^{-i(\omega - \frac{\Omega}{4\sqrt{n}})t} \right\rangle (e^{i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} e^{-i\omega t/2} |e\rangle - e^{i\omega t/2} |g\rangle) \quad (8-18)$$

Oscillation de Rabi : calcul approché (suite)

D'où, en passant en représentation d'interaction (élimination de l'évolution libre de l'atome et du champ):

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle \approx \frac{1}{2} e^{-i\Omega\frac{\sqrt{n}}{4}t} \left| \alpha e^{-i\frac{\Omega}{4\sqrt{n}}t} \right\rangle (e^{-i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle + |g\rangle) + \frac{1}{2} e^{i\Omega\frac{\sqrt{n}}{4}t} \left| \alpha e^{i\frac{\Omega}{4\sqrt{n}}t} \right\rangle (e^{i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle - |g\rangle) \quad (8-19)$$

Soit encore:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\Psi_{at}^+(t)\rangle \otimes |\Psi_{champ}^+(t)\rangle + |\Psi_{at}^-(t)\rangle \otimes |\Psi_{champ}^-(t)\rangle \right] \quad (8-20)$$

en définissant symétriquement quatre états normés et dépendant du temps de l'atome et du champ par les relations:

$$|\Psi_{at}^+(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega\sqrt{n}t}{2}} \left[(e^{-i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle + |g\rangle) \right] ; \quad |\Psi_{at}^-(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega\sqrt{n}t}{2}} \left[(e^{i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} |e\rangle - |g\rangle) \right] \quad (8-21a)$$

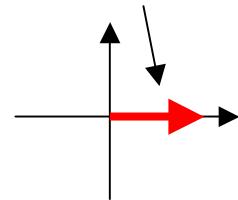
$$|\Psi_{champ}^+(t)\rangle = e^{i\frac{\Omega\sqrt{n}t}{4}} \left| \alpha e^{-i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} \right\rangle ; \quad |\Psi_{champ}^-(t)\rangle = e^{-i\frac{\Omega\sqrt{n}t}{4}} \left| \alpha e^{i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} \right\rangle \quad (8-21b)$$

On reconnaît dans (8-20) l'expression générale de l'état d'un système bipartite dont l'intrication dépend du caractère indépendant ou non des états associés à chaque partie (voir analyse de la décomposition de Schmidt dans le cours 2001-2002). Rappelons que cette expression est approchée et ne peut-être utilisée que pour $t < < 32\pi\bar{n}/\Omega$. Des expressions plus exactes, mais moins faciles à interpréter, de l'état intriqué atome-champ sont données par les équations (8-15) et (8-17).

Evolutions corrélées des phases de l 'atome et du champ et intrication atome-champ

Etat initial du champ:

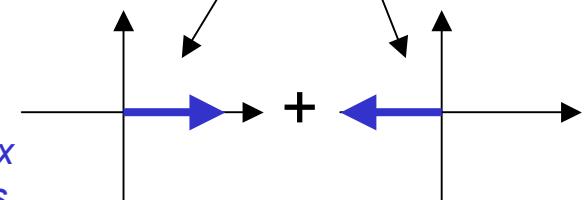
$$|\Psi_{champ}(t=0)\rangle = |\alpha\rangle = |\Psi_{champ}^+(0)\rangle = |\Psi_{champ}^-(0)\rangle$$



La phase initiale du champ est définie de façon unique

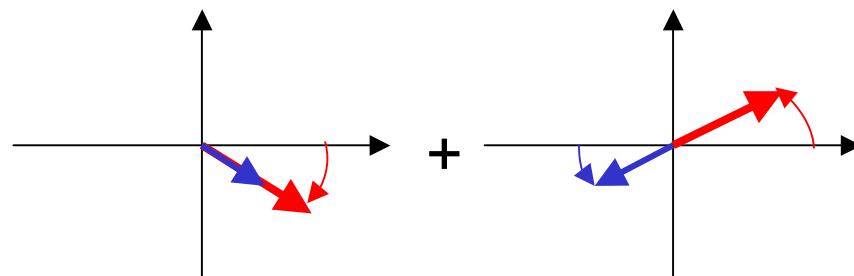
Etat initial de l 'atome:

$$|\Psi_{at}(t=0)\rangle = |e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\Psi_{at}^+(0)\rangle + |\Psi_{at}^-(0)\rangle]$$



L 'atome dans $|e\rangle$ est dans une superposition de deux états correspondant à des dipôles de phases opposées (correspondant aux deux états $|\Psi_{at}^{\pm}(0)\rangle$)

Sous l 'effet du couplage, les phases de $|\Psi_{at}^+\rangle$ et $|\Psi_{champ}^+\rangle$ tournent ensemble de $-\Omega t / 4\sqrt{n}$ alors que celles de $|\Psi_{at}^-\rangle$ et $|\Psi_{champ}^-\rangle$ tournent ensemble de $+\Omega t / 4\sqrt{n}$: le champ acquiert deux composantes de phases séparées, corrélées aux deux composantes de l 'état atomique. Les phases de l 'atome et du champ restent parallèles dans la première composante, antiparallèles dans la seconde: le système atome champ s 'intrigue.



Préparation de chats de Schrödinger et intrication atome-champ!

Analyse de l'évolution du système atome-champ

1. Temps tel que $0 < \Omega t < \text{quelques unités}$: l'oscillation de Rabi et son effondrement.

Calculons le produit des deux états du champ aux temps courts. En utilisant (8-21) et (2-41) on a:

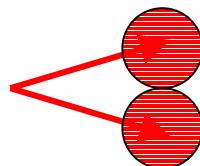
$$\langle \Psi_{\text{champ}}^-(t) | \Psi_{\text{champ}}^+(t) \rangle = e^{\frac{i\Omega\sqrt{n}t}{2}} \left\langle \alpha e^{i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} \middle| \alpha e^{-i\frac{\Omega t}{4\sqrt{n}}} \right\rangle = e^{\frac{i\Omega\sqrt{n}t}{2}} e^{-\bar{n}[1-\exp(-i\Omega t/2\sqrt{n})]} \quad (8-22)$$

et en développant l'argument de la dernière exponentielle dans (8-22):

$$-\bar{n}[1 - \exp(-i\Omega t / 2\sqrt{n})] = -\frac{i\Omega t\sqrt{n}}{2} - \frac{\Omega^2 t^2}{8} + \dots$$

on trouve simplement:

$$\langle \Psi_{\text{champ}}^-(t) | \Psi_{\text{champ}}^+(t) \rangle \approx e^{-\frac{\Omega^2 t^2}{8}} \quad (8-23)$$



Les deux composantes du champ se séparent lorsque $\Omega t \approx 2\sqrt{2}$: elles ont tourné alors d'un angle de l'ordre de $1/\sqrt{n}$

Ce produit scalaire intervient dans l'expression de l'opérateur densité réduit de l'atome:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{at}}(t) &= \text{Tr}_{\text{champ}}(|\tilde{\Psi}(t)\rangle\langle\tilde{\Psi}(t)|) \approx \frac{1}{2} |\Psi_{\text{at}}^+(t)\rangle\langle\Psi_{\text{at}}^+(t)| + \frac{1}{2} |\Psi_{\text{at}}^-(t)\rangle\langle\Psi_{\text{at}}^-(t)| \\ &\quad + \frac{1}{2} (\left| \Psi_{\text{at}}^+(t) \right\rangle \langle \Psi_{\text{at}}^-(t) \left| + \right| \Psi_{\text{at}}^-(t) \right\rangle \langle \Psi_{\text{at}}^+(t) \left| \right\rangle) e^{-\frac{\Omega^2 t^2}{8}} \quad (8-24) \end{aligned}$$

Ainsi la matrice densité atomique dans la base des états de phase atomiques perd ses cohérences lorsque les deux composantes du champ sont séparées. Cette perte de cohérence correspond à l'effondrement de la phase de l'oscillation de Rabi, qui est un effet d'interférence entre les amplitudes de probabilité associées aux états $|\Psi_{\text{at}}^\pm\rangle$. On a:

$$\begin{aligned} P_e(t) &\approx \langle e | \tilde{\rho}_{\text{at}}(t) | e \rangle \approx \frac{1}{2} \left\langle e \left| \Psi_{\text{at}}^+(t) \right\rangle \right|^2 + \frac{1}{2} \left\langle e \left| \Psi_{\text{at}}^-(t) \right\rangle \right|^2 + \\ &\quad \text{Re} \left\langle e \left| \Psi_{\text{at}}^+(t) \right\rangle \left\langle \Psi_{\text{at}}^-(t) \right| e \right\rangle e^{-\frac{\Omega^2 t^2}{8}} \quad (8-25) \end{aligned}$$

soit compte tenu de l'équ. (8-21):

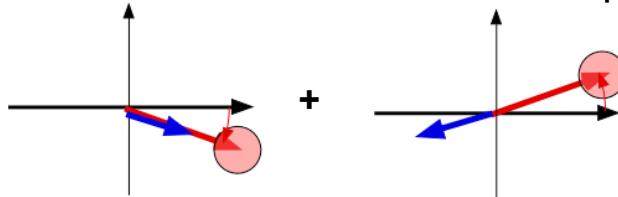
$$P_e(t) \approx \frac{1}{2} [1 + e^{-\frac{\Omega^2 t^2}{8}} \cos(\Omega\sqrt{n}t)] \quad (8-26)$$

On retrouve de façon quantitative le résultat contenu dans (8-11).

Analyse de l'évolution du système atome-champ (suite)

2. Temps $1 < \Omega t < \sqrt{n}$: intrication atome-champ et chats de Schrödinger conditionnels

Quand les oscillations de Rabi se sont effondrées, le système atome-champ présente une intrication maximale. En effet, l'état représenté graphiquement par la superposition ci-contre



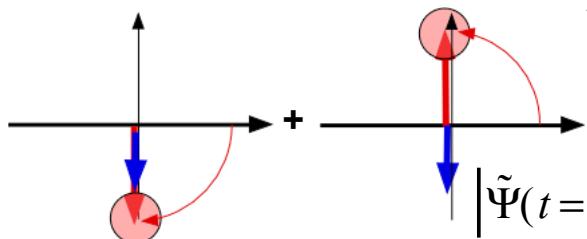
correspond à une décomposition de Schmidt à poids égaux, donc de degré d'intrication maximum (les composantes du champ sont quasi-orthogonales dès que $\Omega t > 1$ et les composantes atomiques sont

encore pratiquement orthogonales car elles partent de directions opposées). On voit apparaître un état de type chat de Schrödinger pour le champ. Une détection de l'atome dans l'état e ou g projette le champ dans l'état superposition des deux composantes. En posant $\varphi = \Omega t / 4\sqrt{n}$ et en utilisant (8-18) on obtient l'expression du champ après détection de l'atome dans e :

$$|\tilde{\Psi}_{\text{champ}}(t)\rangle_{/\text{atome dans } e} = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i(\bar{n}+1)\varphi} |\alpha e^{-i\varphi}\rangle + e^{i(\bar{n}+1)\varphi} |\alpha e^{i\varphi}\rangle] \quad (8-27)$$

L'obtention d'un «chat» est alors conditionnée à la lecture d'une mesure sur l'atome. (on obtient un chat différent si on trouve l'atome dans g). En fait cette mesure n'est pas toujours nécessaire. Nous allons montrer que l'on obtient quand la phase a tourné de $\pi/2$ un chat de Schrödinger correspondant à deux composantes en opposition de phase, «désintriqué» à cet instant de l'atome.

3. Temps $\Omega t = 2\pi\sqrt{n}$: désintrication atome-champ et chat de phase inconditionnel

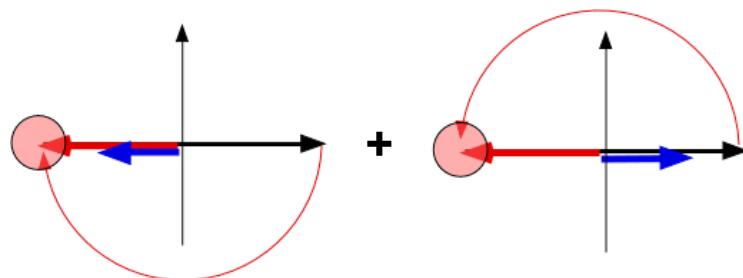


A cet instant, les phases atomiques sont devenus parallèles et les états $|\Psi_{\text{at}}^+(t=2\pi\sqrt{n}/\Omega)\rangle$ et $|\Psi_{\text{at}}^-(t=2\pi\sqrt{n}/\Omega)\rangle$ sont à une phase globale près identiques. On peut factoriser l'état du système et (8-18) donne:

$$|\tilde{\Psi}(t=2\pi\sqrt{n}/\Omega)\rangle \approx \frac{1}{2} [e^{-i\pi\bar{n}/2} |\alpha e^{-i\pi/2}\rangle - e^{i\pi\bar{n}/2} |\alpha e^{+i\pi/2}\rangle] \otimes [e^{-i\pi/2} |e\rangle + |g\rangle] \quad (8-28)$$

Analyse de l'évolution du système atome-champ (fin)

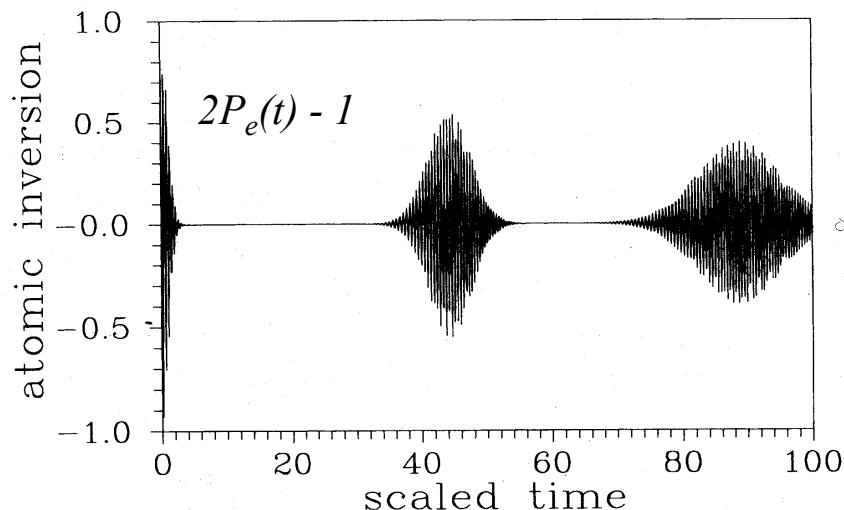
4. Temps $\Omega t = 4\pi \sqrt{n}$: résurgence des oscillations de Rabi



Si on attend un temps double du temps précédent, les deux composantes du champ ont tourné de π et se retrouvent en phase, dans la direction opposée à la direction initiale. La matrice densité atomique présente à nouveau des cohérences entre Ψ_{at}^+ et Ψ_{at}^- : les oscillations de Rabi «renaissent». D'après ce modèle,

elles devraient réapparaître avec un contraste de 100%. Un calcul numérique exact montre que les oscillations renaissent en fait avec un contraste de l'ordre de 50% (voir fig. ci-dessous correspondant à un calcul exact pour $n = 49$). Noter l'existence de plusieurs résurgences quasi-périodiques avec une amplitude décroissante, alors que le modèle approché donne des résurgences régulières.

En fait nous avons fait une approximation drastique en négligeant le terme du 2ème ordre dans (8-16). Même si la diffusion complète de la phase du champ prend un temps très long en \bar{n}/Ω , on a au bout d'un temps en \sqrt{n}/Ω un étalement de l'ordre de π/\sqrt{n} qui est précisément de l'ordre de



l'indétermination en phase du champ cohérent initial. En d'autres termes, la phase du champ s'est étalée environ d'un facteur 2 entre les instants 0 et $4\pi \sqrt{n}/\Omega$. On comprend ainsi qu'un calcul fait en négligeant cet étalement ne soit que qualitatif, à un facteur 2 près. Un calcul approché incluant la diffusion de phase (basé sur l'équ. (8-15)) donne par contre un résultat indiscernable du calcul numérique exact (Gea-Banacloche).

Conclusion: discussion et interprétation physique

Dégageons en conclusion quelques idées générales concernant l'évolution résonnante d'un atome et d'un champ cohérent. L'équation (8-15) ou sa forme approchée (8-18) décrit la superposition de deux situations correspondant à un état initial où le champ a une phase nulle et l'état atomique est soit $|e\rangle + |g\rangle$ soit $|e\rangle - |g\rangle$. Pour chacun de ces deux états initiaux, on peut montrer que le système atome-champ reste pratiquement un état non intriqué, avec dérive lente et parallèle des phases du champ et de l'atome, à la vitesse angulaire $\pm\Omega/4\sqrt{n}$.. (voir Gea-Banacloche). A la limite classique ($n \rightarrow \infty$), cette dérive est nulle et l'atome et le champ évoluent librement sans interagir. Le dipôle atomique est initialement en phase, ou en opposition de phase, avec le champ, et il ne peut donc classiquement échanger d'énergie avec lui. Le fait que n est fini et que le champ présente une granularité ($n \neq n+1$) et une dispersion d'amplitudes modifie le résultat classique. Pour chacun des deux états initiaux, l'atome et le champ voient leurs phases glisser ensemble, tout en restant pratiquement non-intriqués. En d'autre terme, pour les deux états initiaux considérés, l'atome et le champ ajustent adiabatiquement leurs phases de façon à ne jamais échanger d'énergie.

Lorsque l'état initial est e (ou g), le système est à $t = 0$ dans une superposition des deux situations précédentes, les composantes du champ et du dipôle atomique tournant en sens inverse dans le plan de phase en étant affectées d'amplitudes de fréquences opposées. Le battement entre ces deux amplitudes donne lieu aux oscillations de Rabi qui ne sont observables, au début de l'évolution, que tant que les composantes du champ se recouvrent. Après un quart de tour dans le plan de phase, les deux composantes atomiques se retrouvent dans le même état, $-i|e\rangle + |g\rangle$, et une «désintrication» atome-champ se produit avec apparition d'un chat de phase du champ. Au bout du temps double, les deux composantes du champ se retrouvent en phase et les oscillations de Rabi renaissent. On peut généraliser la discussion à un état initial atomique $\alpha|e\rangle + \beta|g\rangle$ quelconque. Il faut alors le décomposer sur les deux états de phase propre $|e\rangle + |g\rangle$ et $|e\rangle - |g\rangle$ et combiner les solutions, à la manière que nous venons d'indiquer. Il en résulte de façon évidente qu'à l'instant «magique» $t = 2\pi\sqrt{n}/\Omega$, quel que soit l'état initial de l'atome, il se retrouve «attiré» dans l'état $-i|e\rangle + |g\rangle$ et les deux sous-systèmes sont alors désintriqués. L'unitarité de l'évolution est alors assurée par le fait que l'état du champ dépend de l'état initial de l'atome.

Nous traiterons dans la dernière leçon de l'interaction atome-champ non-résonnante et montrerons que des chats de Schrödinger peuvent être aussi créés dans ce cas, qui correspond à la situation dans laquelle nous avons réalisé nos expériences. Nous donnerons une rapide description de ces expériences. Nous envisagerons enfin leur extension possible au cas de deux cavités et à la création de chats de Schrödinger délocalisés.