Mesurer la fonction de Wigner de champs non-classiques en électrodynamique en cavité

Michel BRUNE

Laboratoire Kastler Brossel, ENS

Thésitifs: P. Maioli
A. Auffeves
T. Meunier
S. Gleyze
P. Hyafil
J. Mozeley

Anciens: S. Osnaghi
P. Bertet (Post-doc, Delft)

Permanents: S. Haroche
J.-M. Raimond
G. Nogues

Visiteurs, Post-Doc:
P. Milman
L. Davidovich (Rio de Janeiro)

La fonction de Wigner

JUNE 1, 1932 PHYSICAL REVIEW VOLUME 40

On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium

By E. WIGNER
Department of Physics, Princeton University
(Received March 14, 1932)

The probability of a configuration is given in classical theory by the Boltzmann formula exp $[-V/hT]$ where V is the potential energy of this configuration. For high temperatures this of course also holds in quantum theory. For lower temperatures, however, a correction term has to be introduced, which can be developed into a power series of h. The formula is developed for this correction by means of a probability function and the result discussed.

- Une quasi distribution de probabilité:
  - Équivalente à la matrice densité: caractérise complètement un état quantique
  - Négative pour un état non-classique.
  - Bien adaptée à la description d'une particule ou
    d'un mode du champ électromagnétique
- Les atomes en cavité: des outils efficaces pour préparer des états non-classiques du champ.

⇒Préparation et mesure de la fonction de Wigner de l'état nombre à un photon

Avec des atomes de Rydberg circulaires et une cavité supraconductrice.

Quelque propriétés de la fonction de Wigner

- Cas d'une particule massive à une dimension, q et p: position et impulsion.

$$\boxed{W(q,p) = \frac{1}{\hbar}\int \langle q+q' | \rho | q-q' \rangle e^{2ipq'/\hbar} dq'}$$

- Cas d'un champ électromagnétique monomode, $\tilde{q}$ et $\tilde{p}$: quadratures

$$\boxed{W(q,p) = W(\tilde{q}+i\tilde{p}) = W(\alpha)}$$

α est l'amplitude complexe

- Normalisation choisie: $\boxed{\int W(\alpha) d\alpha = \pi, \quad -2 \leq W(\alpha) \leq 2}$

- $W(\alpha)$ ressemble à une distribution de probabilité:

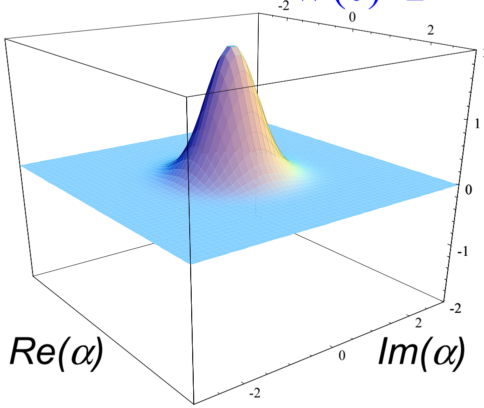
$$\boxed{\langle A \rangle = Tr(\rho A) = \int d^2\alpha\, W(\alpha) A_s(\alpha, \alpha^*)}$$

MAIS $W(\alpha)$ peut être négative $\Rightarrow$ distribution de "quasi-probabilité"

Exemples de fonctions de Wigner

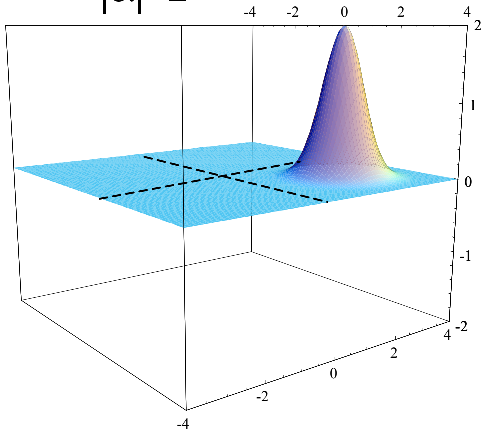
- Etats classiques

vide |0>

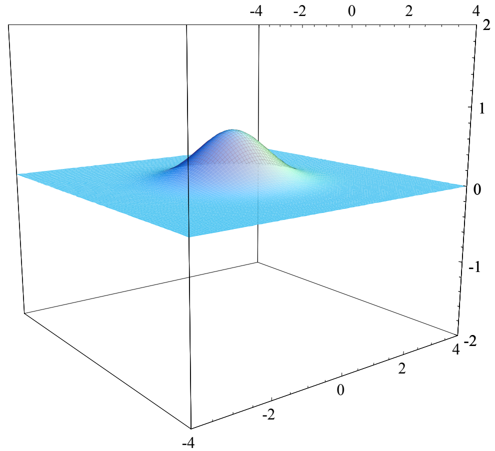


Etat cohérent |α>

$|\alpha|=2$



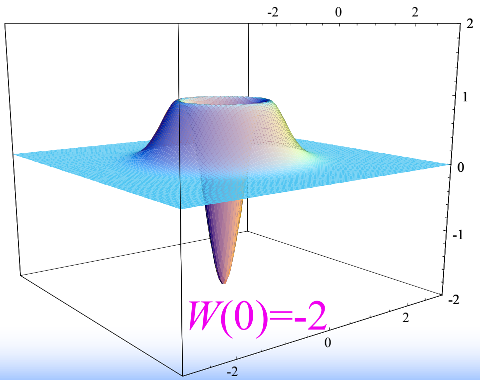
Etat thermique $n_{th}=1$

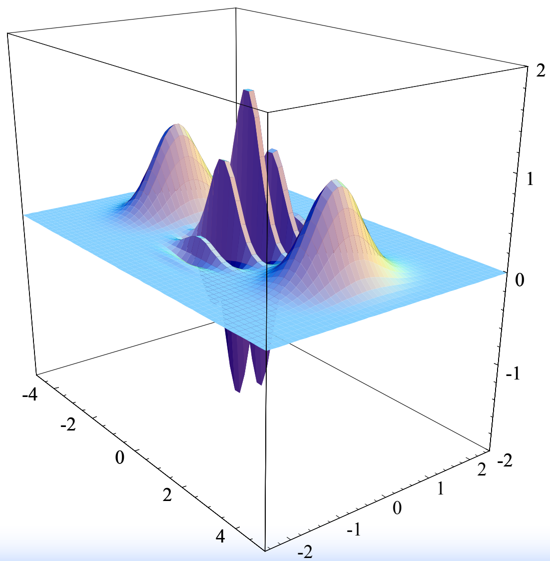


- Etats quantiques

État nombre

$n=1$





Chat de Schrödinger:

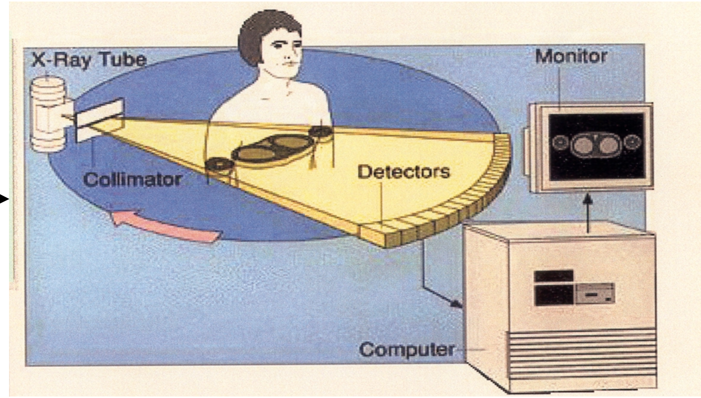
$$\left|\psi_{\text{chat}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\alpha\right\rangle + \left|-\alpha\right\rangle\right)$$

$$\alpha = 3$$

Mesurer $W(\alpha)$?

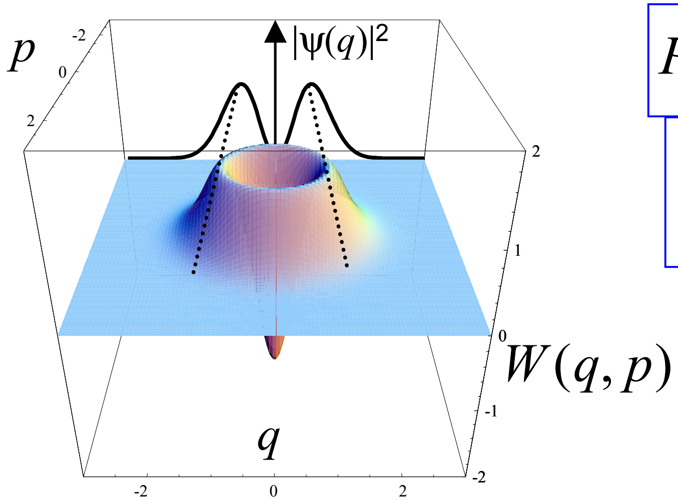
• Cas d'un champ "libre": méthodes "tomographiques".

Tomographie médicale



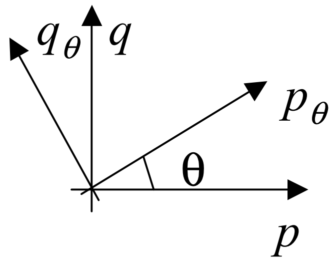
• Principe de la "tomographie" optique :

1. Mesure des probabilités "marginales" $P\,(q_\theta)$:



$$\boxed{P(q) = \int W(q,p)\,dp = \langle q|\rho|q\rangle}$$

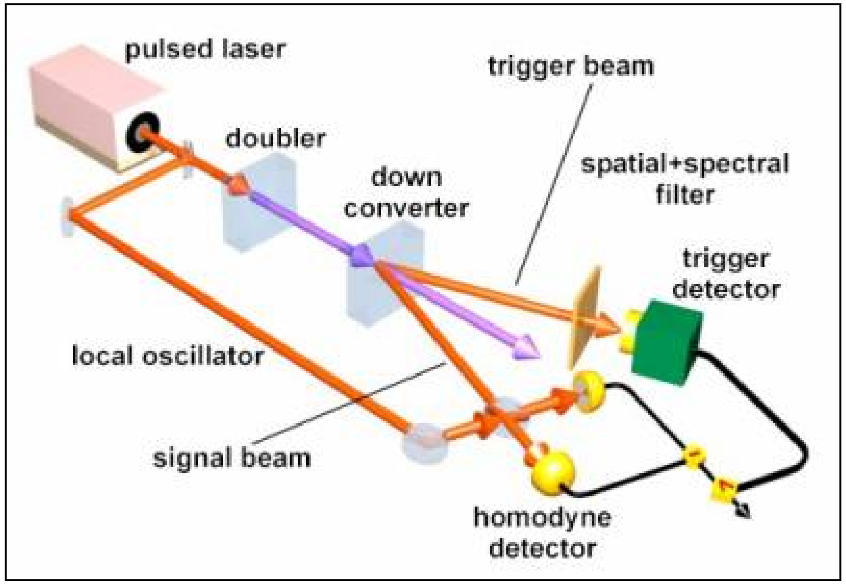
C'est une vraie distribution de probabilité

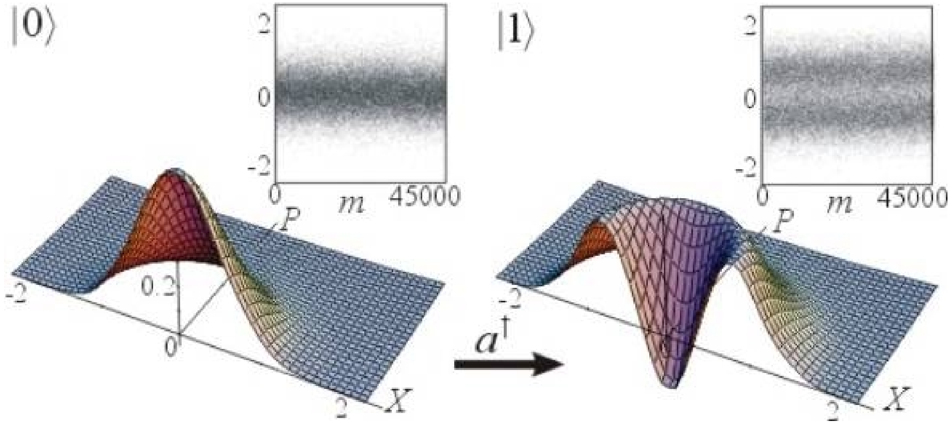


2. Calcul de $W(p,q)$ par la "transformée de Radon inverse"

Fonction de Wigner d'un champ libre

- Mesure des probabilités marginales par détection homodyne des quadratures:





$$\boxed{W(0) = -0.21 \pm 0.05}$$

*Lvovsky et al., PRL **87**, 050402 (2001), Univ. Konstanz*

Autres expériences en optique:

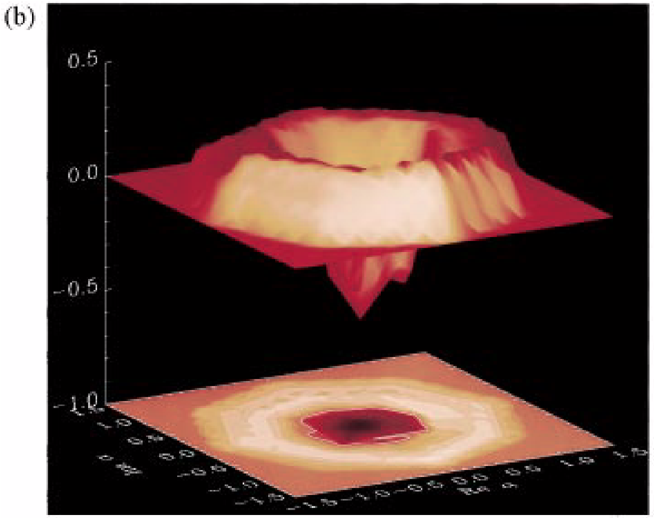
- $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$: *Lvovsky et al., PRL **88**, 250401-1 (2002)*
- Coherent and squeezed states :
  - *Smithey et al., PRL **70**, 1244 (1993)*
  - *Breitenbach et al., Nature **387**, 471 (1997)*
- Mesures par comptage de photons:
  K. Banaszek et al., PRA 60, 674 (1999)

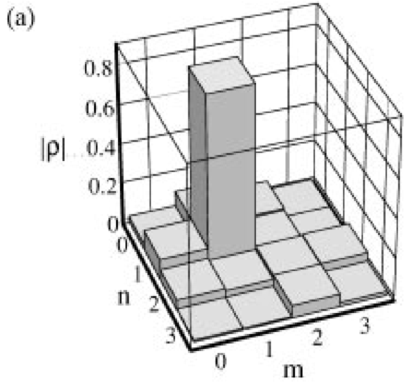
From http://www.uni-konstanz.de/quantum-optics

Mesure de la fonction de Wigner pour un ion piégé

- Etat de vibration d'un ion unique:

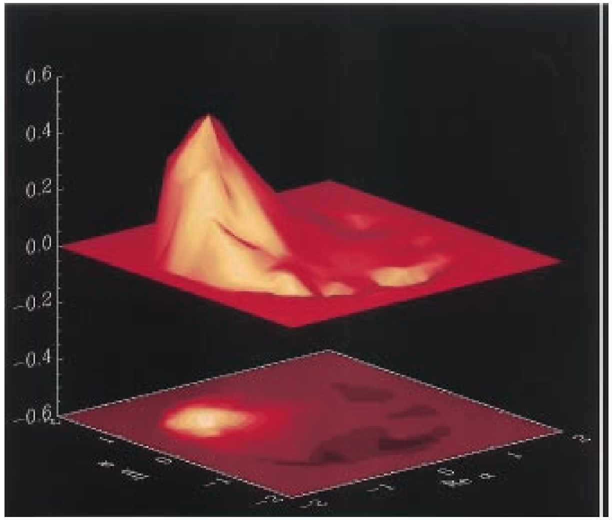
Etat nombre $\left|n=1\right\rangle$





Matrice densité

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle+\left|1\right\rangle\right)$$



D. Liebfried et al, PRL 77, 4281 (1996), NIST, Boulder

- Etat de vibration d'un atome neutre:

  *- G.Drobny and V. Buzek, PRA **65** 053410 (2002)*

  D'aprés les données de: C. Salomon et I. Bouchoule

Principe de notre méthode de mesure

- Une autre expression de W: *Cahill and Glauber, PR 177, 1857 and 1882 (1969)*

$$W(\alpha) = 2.Tr\left(\hat{P}.\rho(\alpha)\right)$$

Opérateur Parité

$$P|n\rangle = (-1)^{\hat{N}}|n\rangle = \begin{cases} +|n\rangle & \text{si n pair} \\ -|n\rangle & \text{si n impair} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ W est la valeur moyenne de L'opérateur parité $(-1)^{\hat{N}}$ dans l'état "déplacé" $\rho(-\alpha)$

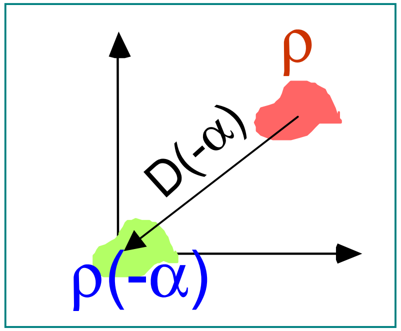
$\Rightarrow$ Méthode de mesure de W :

1. Appliquer $D(-\alpha)$
2. Mesurer l'opérateur parité

$$\rho(\alpha) = D(-\alpha)\rho D(\alpha)$$

$$D(-\alpha) = \exp\left(\alpha^* a - \alpha a^+\right)$$

Opérateur déplacement

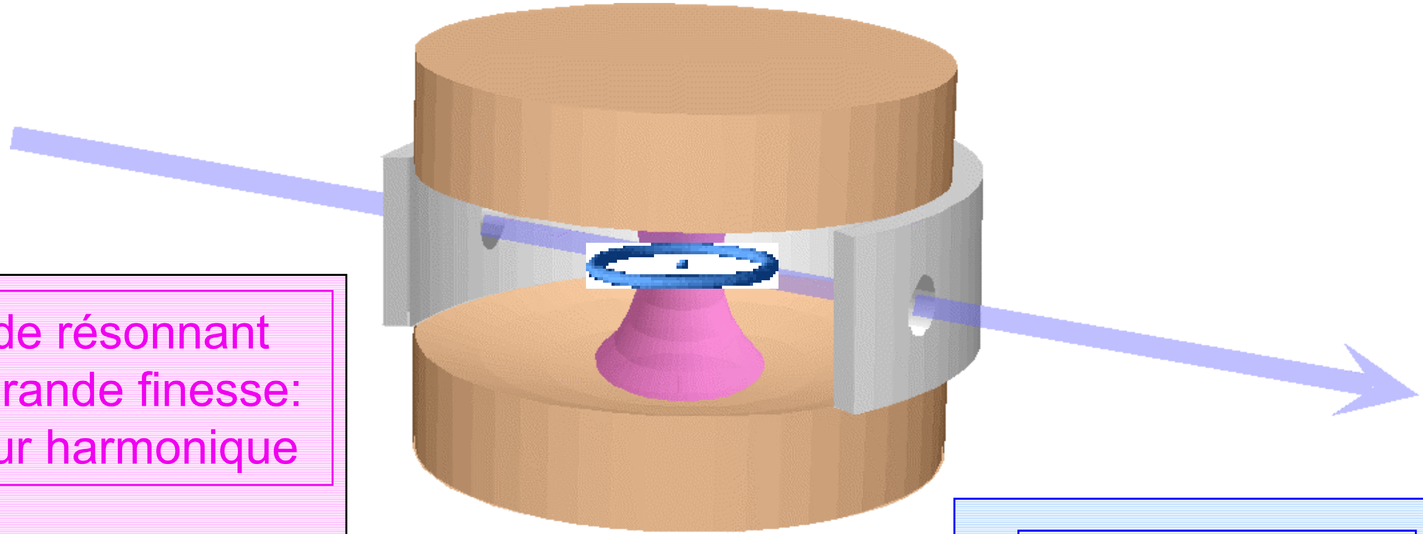


Réalisation: une source classique couplée à la cavité

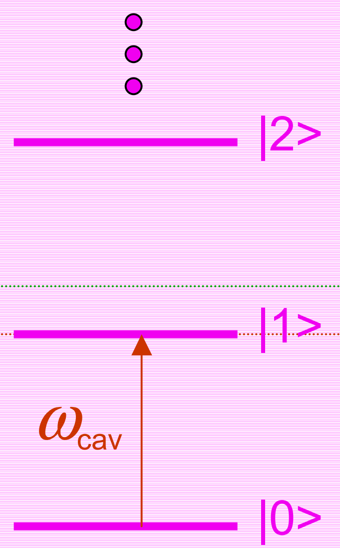
Mesurer la parité du champ?

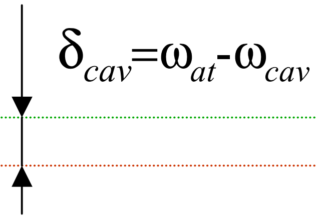
- Interaction atome-champ en cavité:

B. Englert et al., Opt. Comm. ***100****, 526 (1993),*
Lutterbach and Davidovich, PRL ***78*** *2547 (1997)*



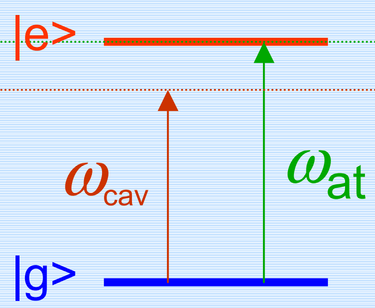
Un mode résonnant
de très grande finesse:
Oscillateur harmonique





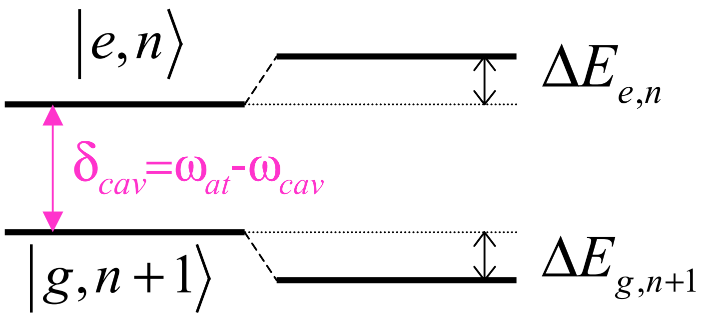
Interaction
Non-résonante

Un atome
"à deux niveaux"



Interaction atome-cavité non résonnante

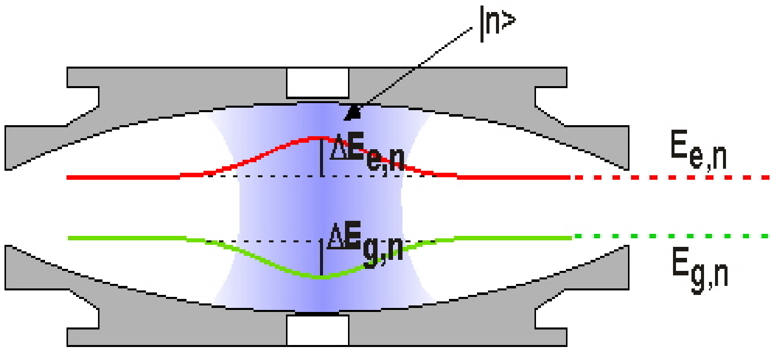
- Un atome à deux niveaux en interaction avec n photons:



- Couplage: $\langle e,n|\hat{V}|g,n+1\rangle = \Omega\sqrt{n+1}$

Ω: "fréquence de Rabi du vide"

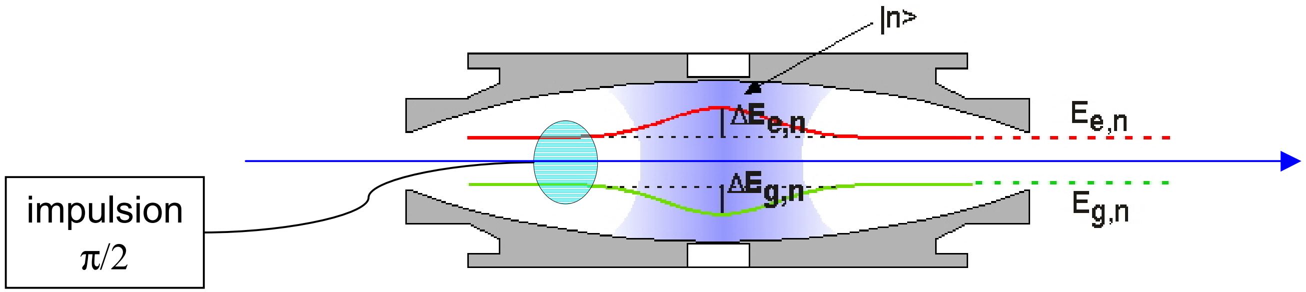
- régime dispersif $\delta \gg \Omega\sqrt{n+1}$



$$\boxed{\begin{aligned}\Delta E_{e,n} &\simeq \hbar\frac{\Omega^2}{4\delta}(n+1)\\ \Delta E_{g,n} &\simeq -\hbar\frac{\Omega^2}{4\delta}n\end{aligned}}$$

- La fréquence de la cavité est modifiée: indice de réfraction
- La fréquence atomique est modifiée: "Lamb shift" et déplacement lumineux

Mesurer la parité du nombre de photons:
mesurer un déphasage de l'état atomique



$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle+|g\rangle\right)\otimes|n\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_n}\left(|e\rangle+e^{i\Delta\Phi(n)}|g\rangle\right)\otimes|n\rangle \quad , \quad \Delta\Phi(n)=\phi_0\left(n+1/2\right)}$$

$\Rightarrow$ La cohérence atomique

est déphasée proportionnellement à n.

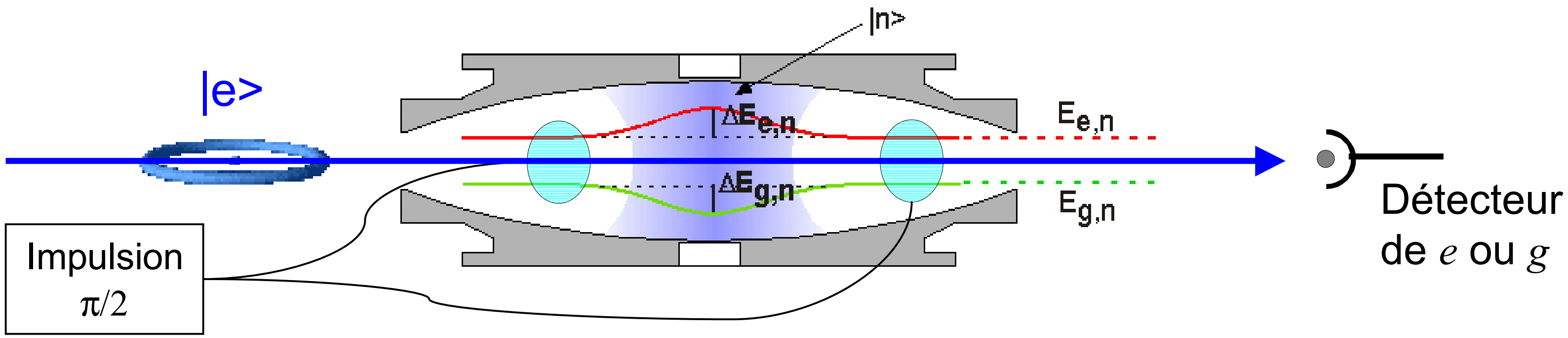
$$\boxed{\phi_0=\frac{\Omega^2}{2\delta}.T_{eff}}$$

Pour $\phi_0=\pi$ $\quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle+|g\rangle\right)\otimes|n\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_n}\left(|e\rangle+i(-1)^n|g\rangle\right)\otimes|n\rangle}$

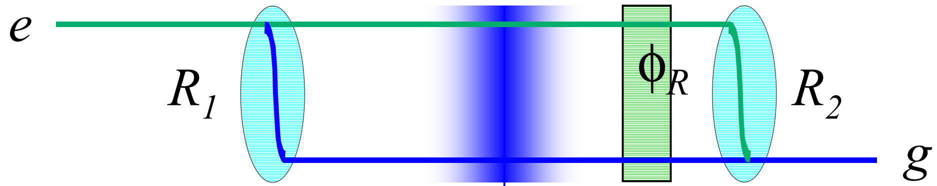
- n pair: $\quad 1/\sqrt{2}\left(|e\rangle+|g\rangle\right)\longrightarrow 1/\sqrt{2}\left(|e\rangle+i|g\rangle\right)$
- n impair: $\quad 1/\sqrt{2}\left(|e\rangle+|g\rangle\right)\longrightarrow 1/\sqrt{2}\left(|e\rangle-i|g\rangle\right)$

Les états pairs et impairs sont corrélés à deux états atomiques orthogonaux.

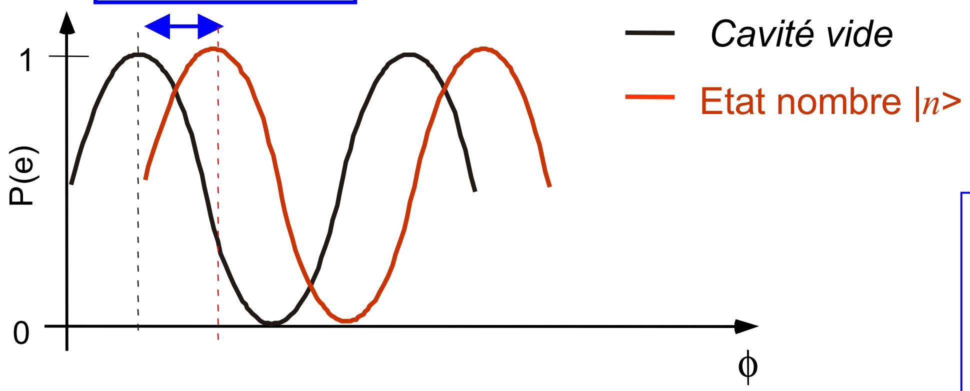
Mesure de la parité: interféromètre de Ramsey



Les impulsions $\pi/2$ resonantes R_1 et R_2 sont les "lames séparatrices" d'un interféromètre



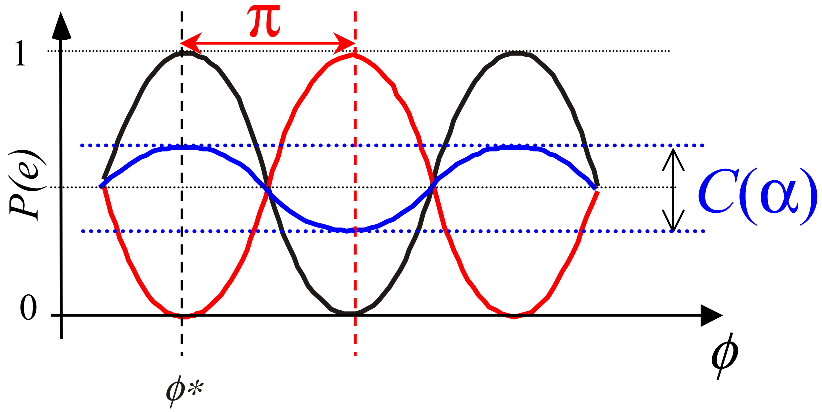
$$\boxed{\Delta\Phi = \phi_0 n}$$



Le déphasage des franges est proportionnel au nombre de photons n.

Mesure de la parité de l'état ρ(α)

- Pour $\phi_0=\pi$ les franges "paires" et "impaires" sont en opposition de phase.



— n pair: $C_{pair} = +1$

— n impair: $C_{impair} = -1$

— ρ(α):

$$C(\alpha) = \left\langle (-1)^{\hat{N}} \right\rangle = \frac{W(\alpha)}{2}$$

- Sensibilité au contraste de l'interféromètre?

$$C_{pair} = -C_{impair} = \eta \le 1$$

$$\boxed{\frac{C(\alpha)}{\eta} = \frac{W(\alpha)}{2}}$$

Un contraste réduit diminue le signal mais ne déforme pas $W(\alpha)$.

$W(\alpha)$ est obtenue par normalisation: $\int W(\alpha)d\alpha = \pi, \quad -2 \le W(\alpha) \le 2$

Condition expérimentales requises:

- Cavité de grande finesse

  (amortissement négligeable pendant toute la mesure)
- Niveaux atomiques de grande durée de vie

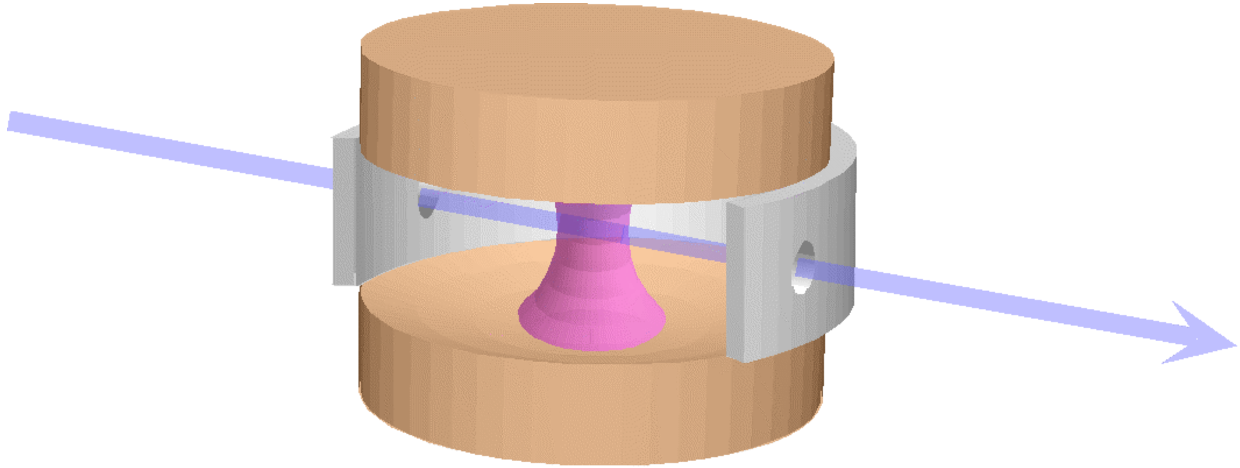
  (stables pendant toute la mesure)
- Fort couplage non-résonnant

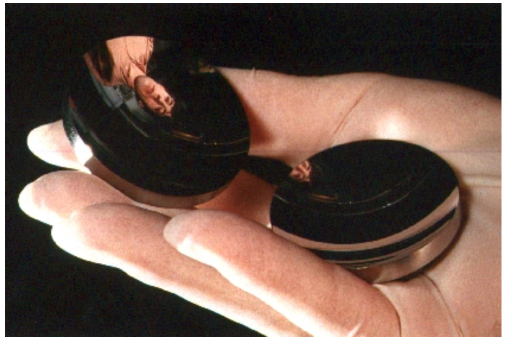
  (atteindre un déphasage de π par photon, une situation peu commune)

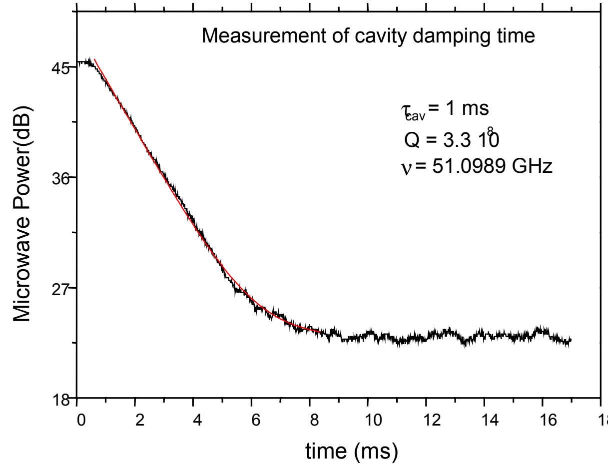
Notre système:

Atomes de Rydberg circulaires et cavité supraconductrice

La cavité







Une "boite à photons":
- miroirs supraconducteurs
- micro-ondes:

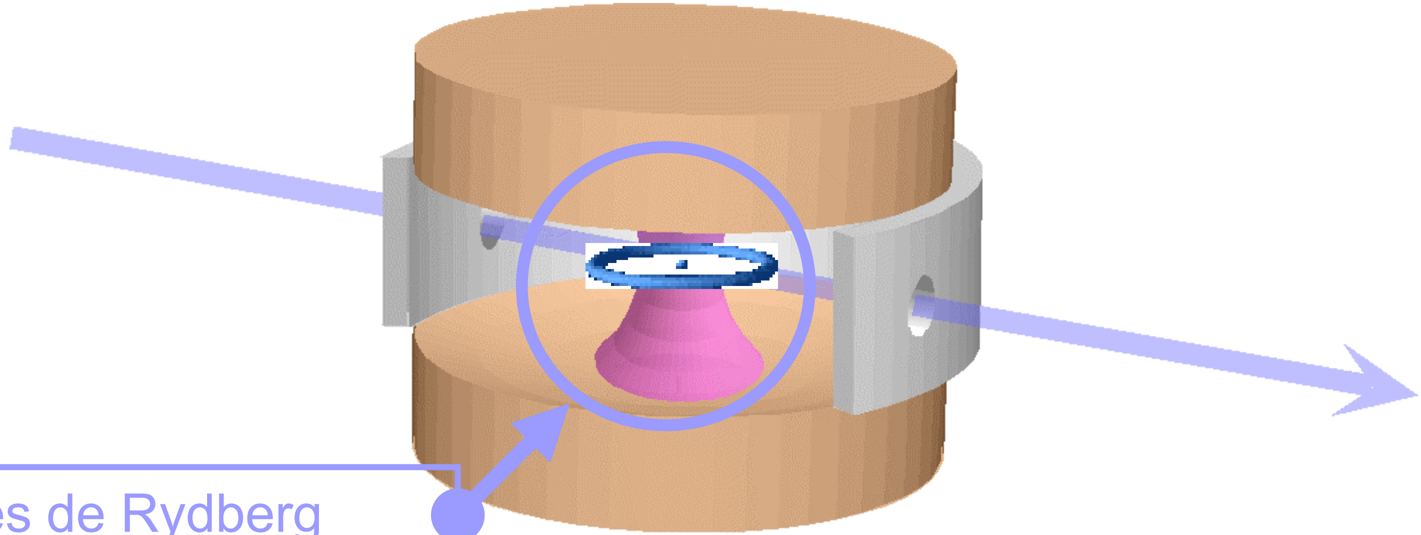
λ=6 mm, ν_{cav}=51GHz

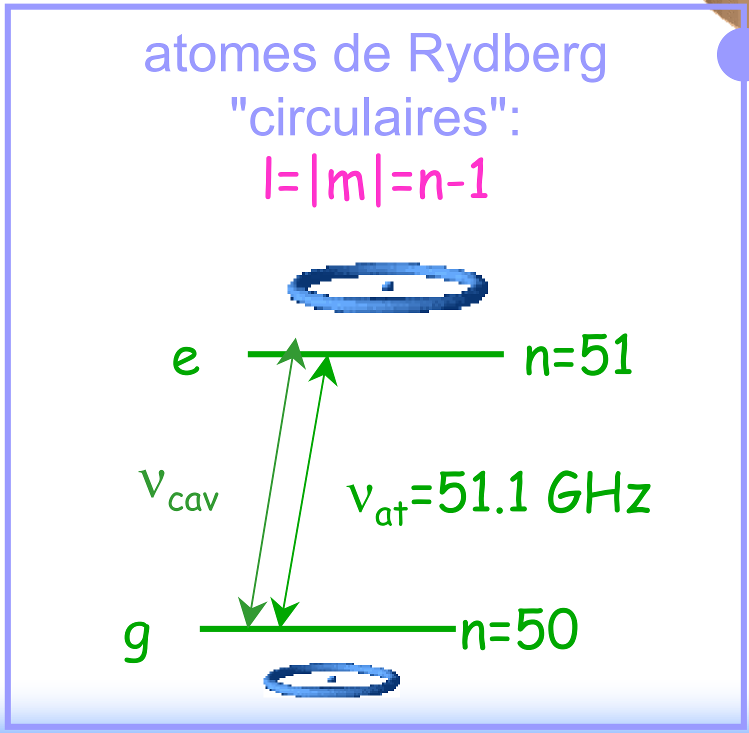
-durée de vie du champ:

$$T_{cav}=1ms \; (\, Q = 3.10^8 \,)$$

- un seul mode
- quelques photons "piégés"

Atomes de Rydberg "circulaires"



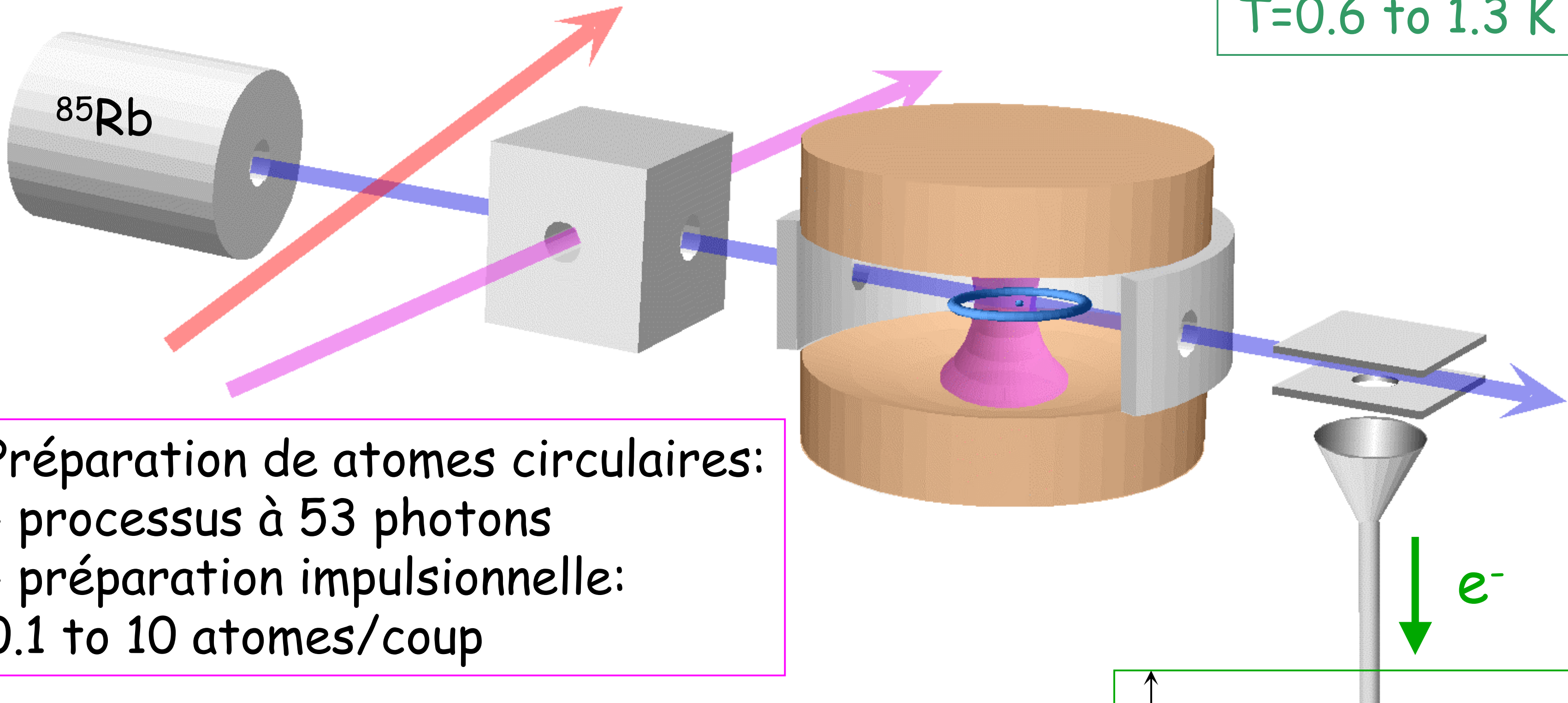


- durée de vie: 30 *ms*
- dipôle: *d*= 1500 *u.a.*
- système à deux niveaux idéal

Le dispositif expérimental

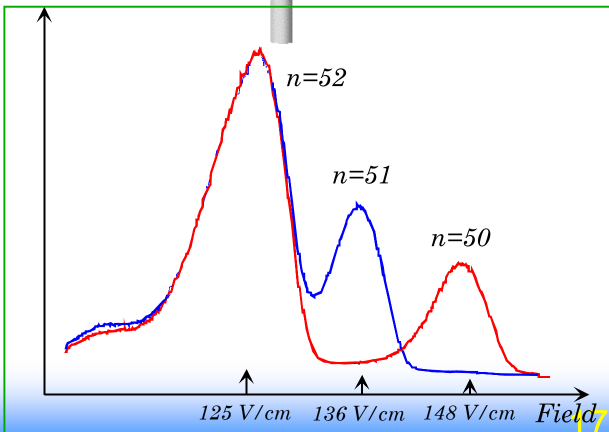
Sélection de vitesse par laser

Cryostat à ^{3}He
T=0.6 to 1.3 K

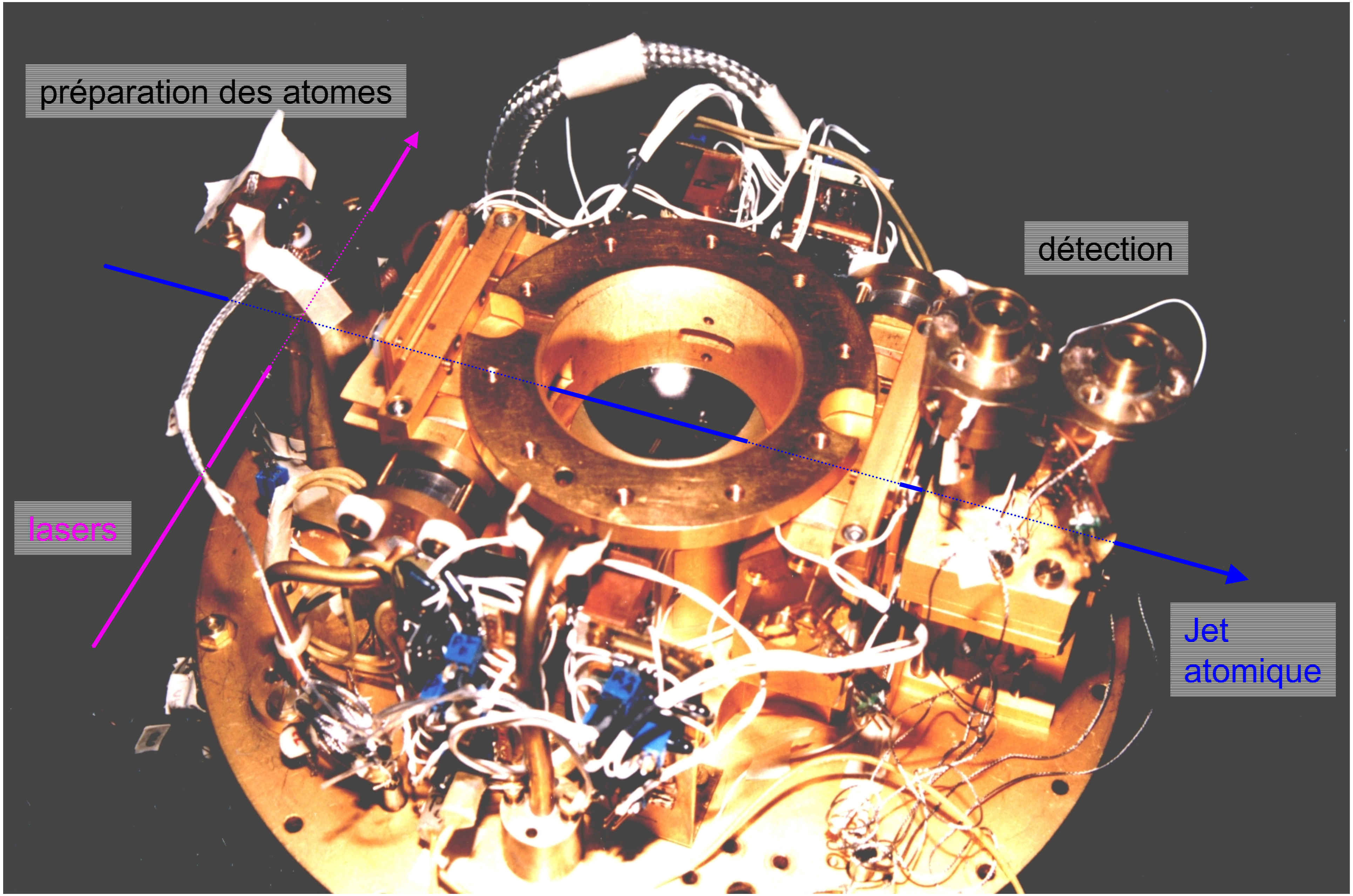


Préparation de atomes circulaires:
- processus à 53 photons
- préparation impulsionnelle:
0.1 to 10 atomes/coup

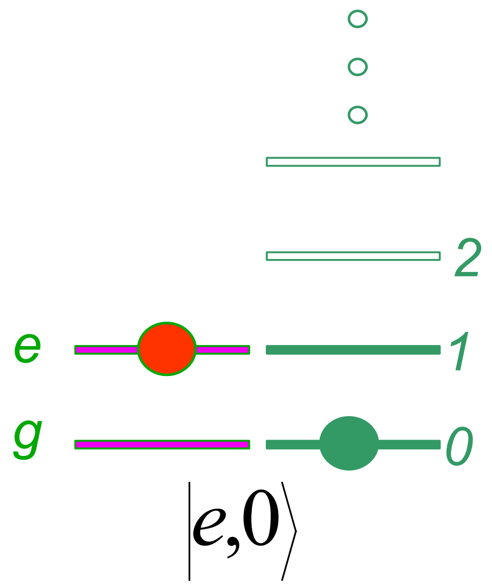
Détection sélective
par ionisation:
Atomes détectés un par un



Le dispositif expérimental



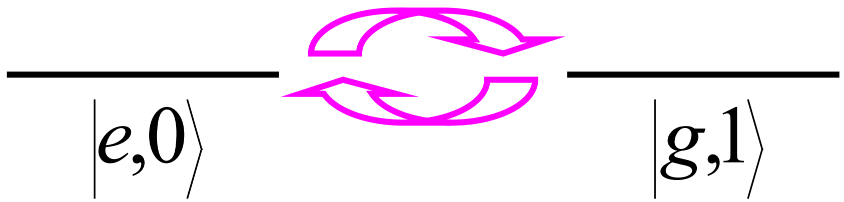
Le couplage "fort"



Fréquence de Rabi du "vide:

$\Omega/2\pi = 50$ kHz

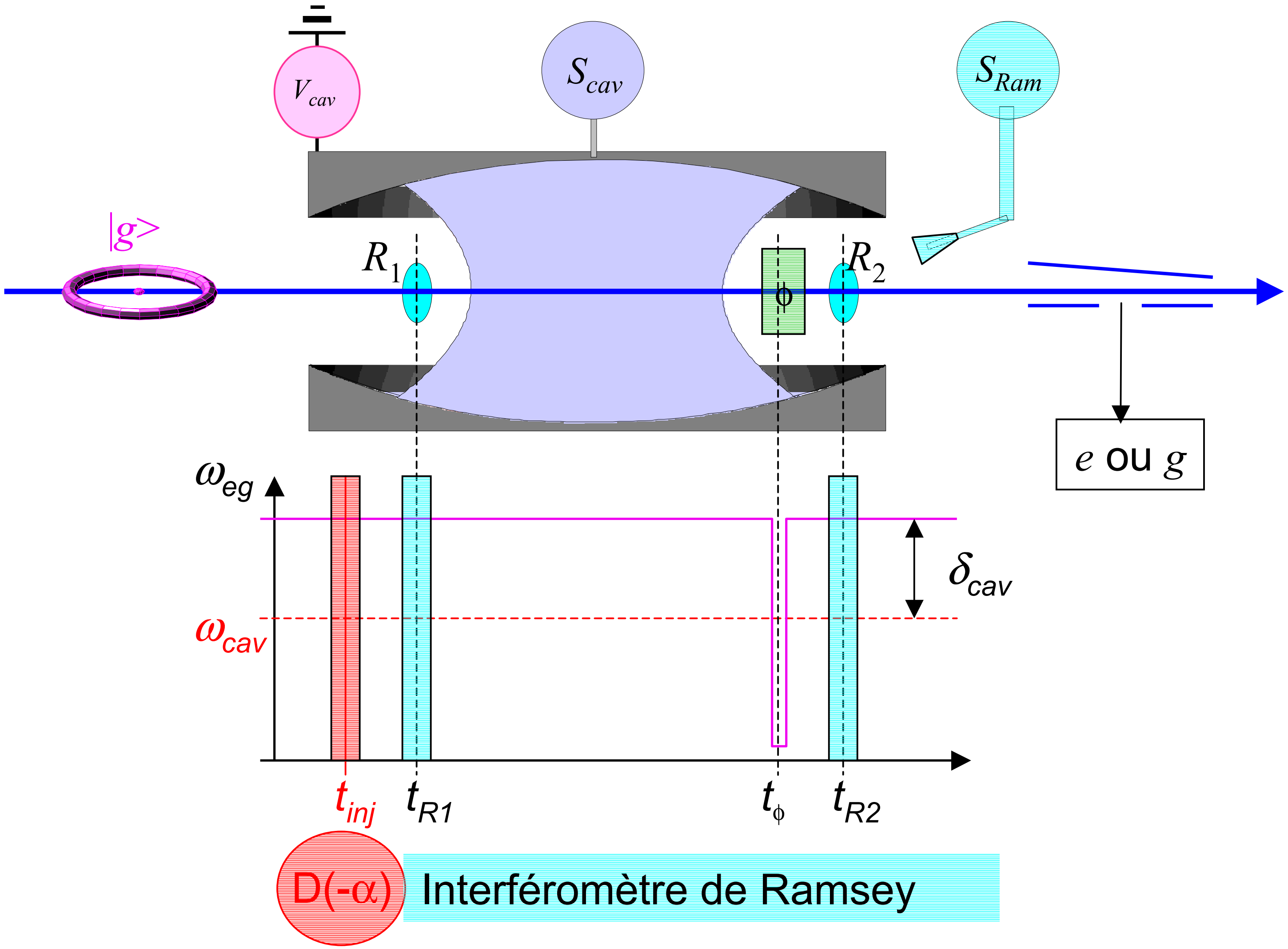
$T_{rabi} = 20\ \mu s$



- Oscillation de Rabi du vide:
  - Couplage "fort": $\boxed{T_{Rabi} \ll \{T_{at} = 30ms\ ,\ T_{cav} = 1ms\}}$
  - réalisation de portes logiques pour l'intrication "programmée" de qubits.

- Couplage non-résonnant: $\boxed{\phi_0 = \frac{\Omega^2}{2\delta}.T_{eff} = \pi}$ $\boxed{\begin{array}{l}\delta_{cav}/2\pi = 115\ kHz \\ V_{at} = 150\ m/s\end{array}}$

Mesure de la fonction de Wigner du vide

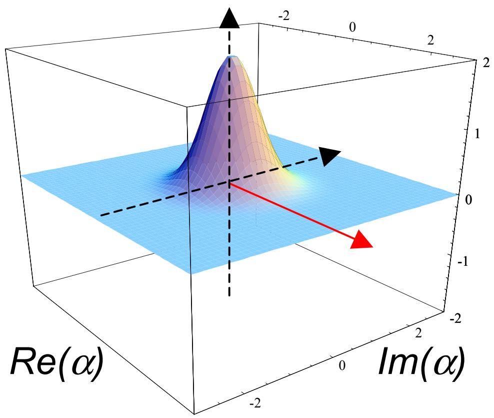


1- Déplacement du champ: on applique $D(-\alpha)$ avec la source S_{cav}.

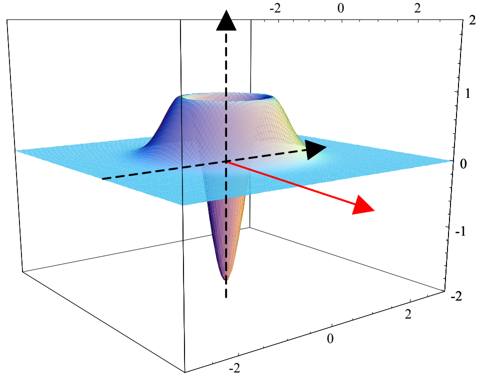
2- Mesure de la parité du champ avec l'interféromètre de Ramsey.

Mesure de $W(\alpha)$ pour un état nombre

Le vide |0>



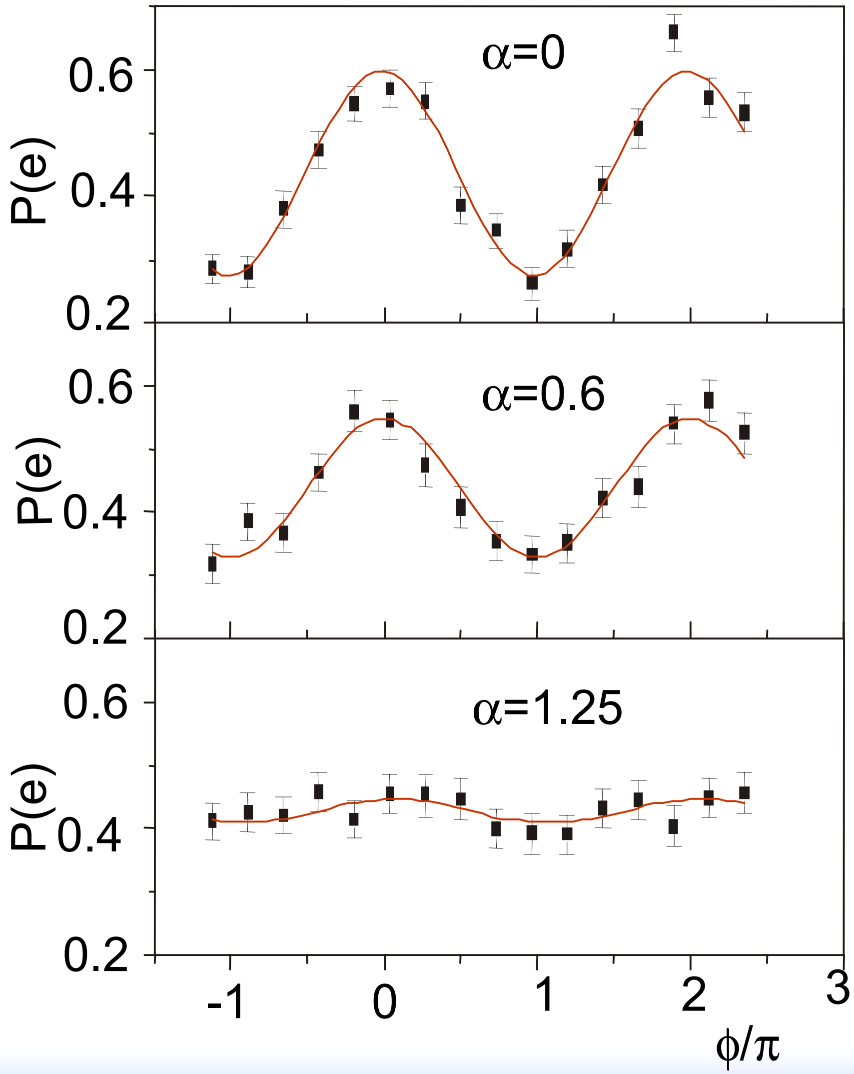
état à un photon |1>



Ces fonctions de Wigner ont une symétries cylindrique:
Elles sont indépendantes de la phase de α.
$\Rightarrow$ expérimentalement, on ne fait varier que l'amplitude de la source S_{cav}.

On mesure une coupe radiale de $W(\alpha)$.

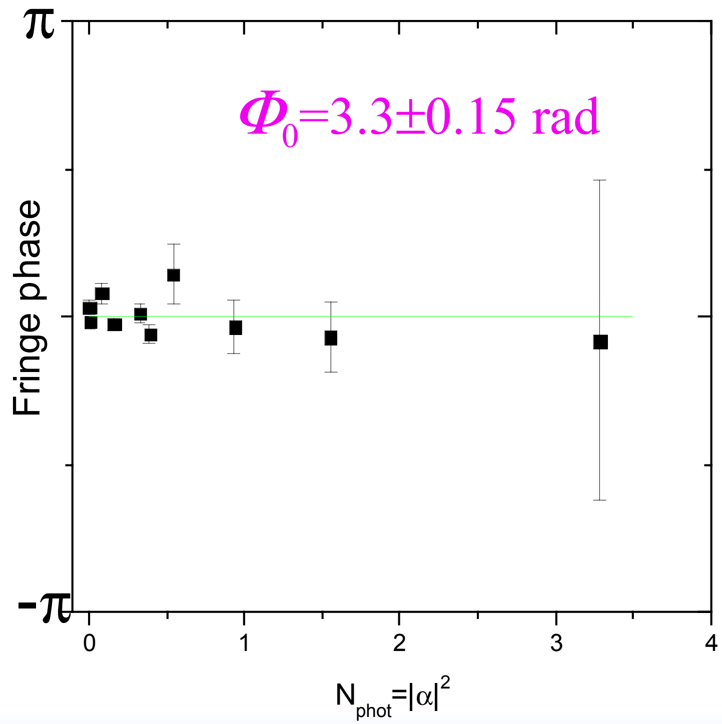
Fonction de Wigner du vide: ajustement de ϕ_0 à π



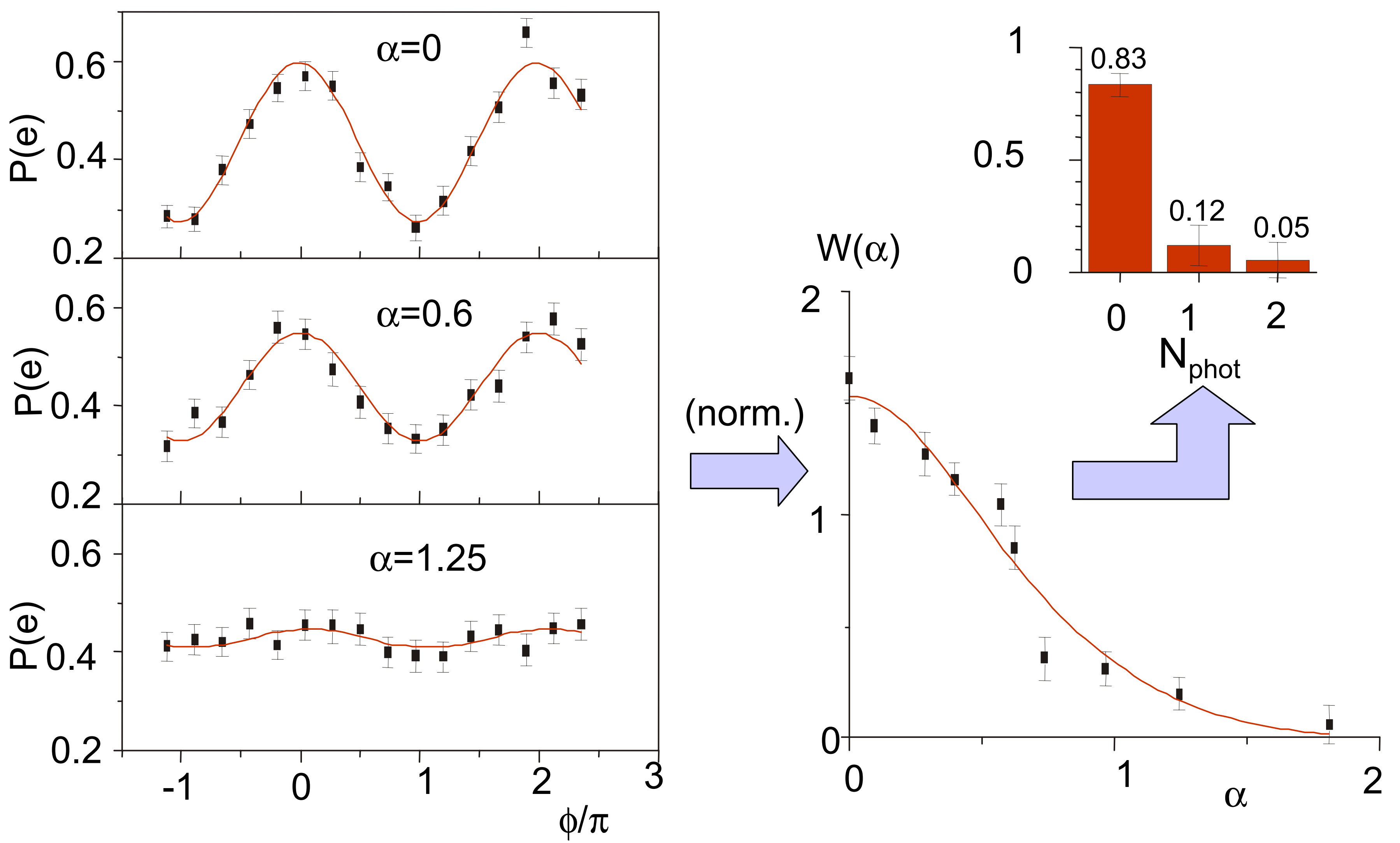
- Vitesse atomique: 150 m/s

On ajuste δ_{cav} pour que la phase des franges soit indépendante de $|\alpha|$.

- Calibration de $|\alpha|$: mesure du déphasage des franges lorsque $\phi_0 << \pi$ (δ_{cav} grand)

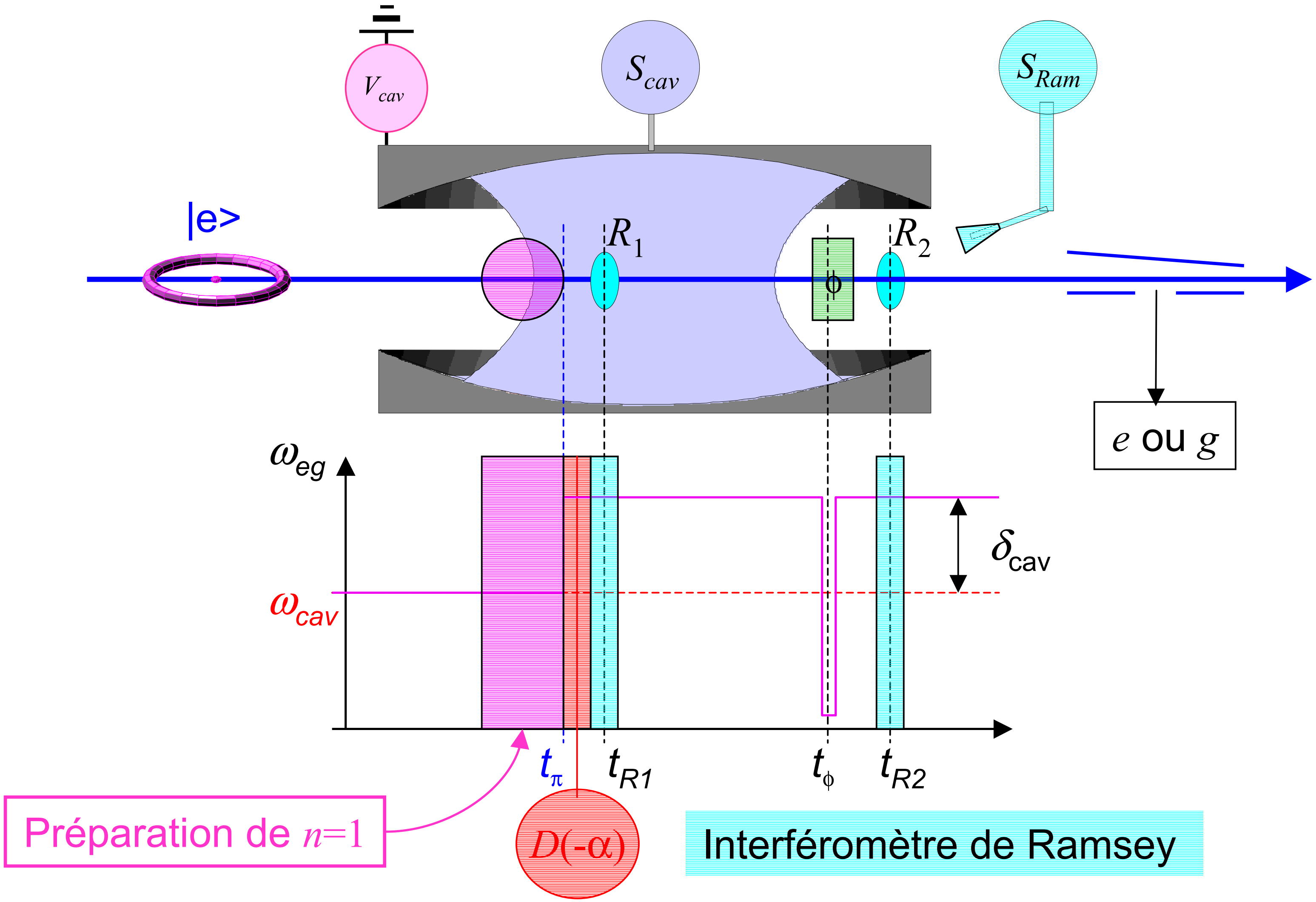


Function de Wigner du "vide"



P. Bertet et al., PRL ***89****, 200402 (2002)*

Fonction de Wigner: état à un photon

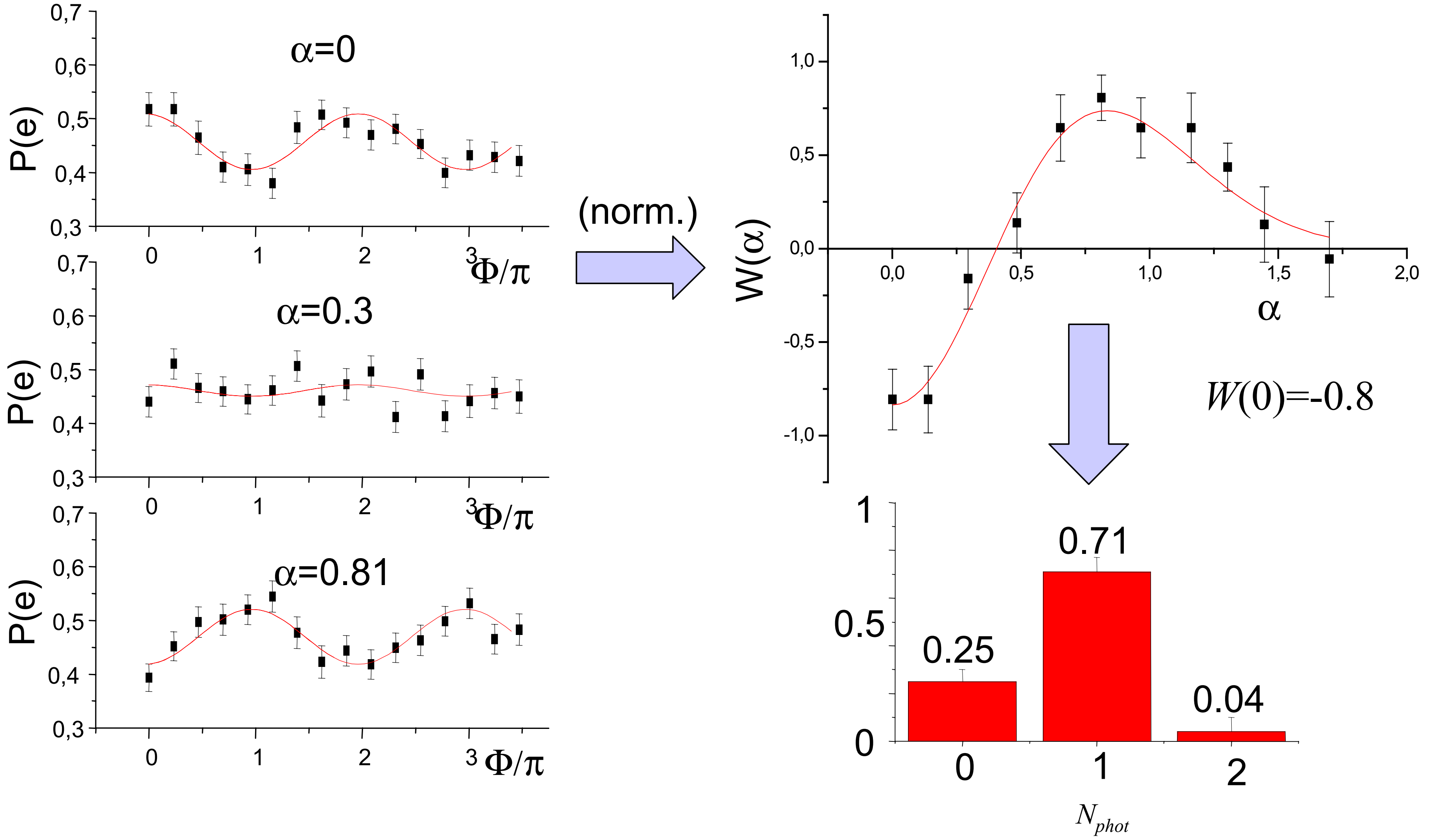


- t_π : durée d'interaction résonnante correspondant à une impulsion π.

$$\left|e,0\right\rangle \rightarrow \left|g,1\right\rangle$$

Préparation de $|n=1>$

Fonction de Wigner: état à un photon



*P. Bertet et al., PRL **89**, 200402 (2002)*

Performance ultime de la méthode

- Limite dispersive: $\delta \gg \frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1}$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n \ll n_{disp} = (2\delta/\Omega)^2}$$

En pratique, ce n'est pas si critique: le couplage est adiabatique.

- Amortissement du champ:

La parité de n ne doit pas changer pendant le temps de mesure

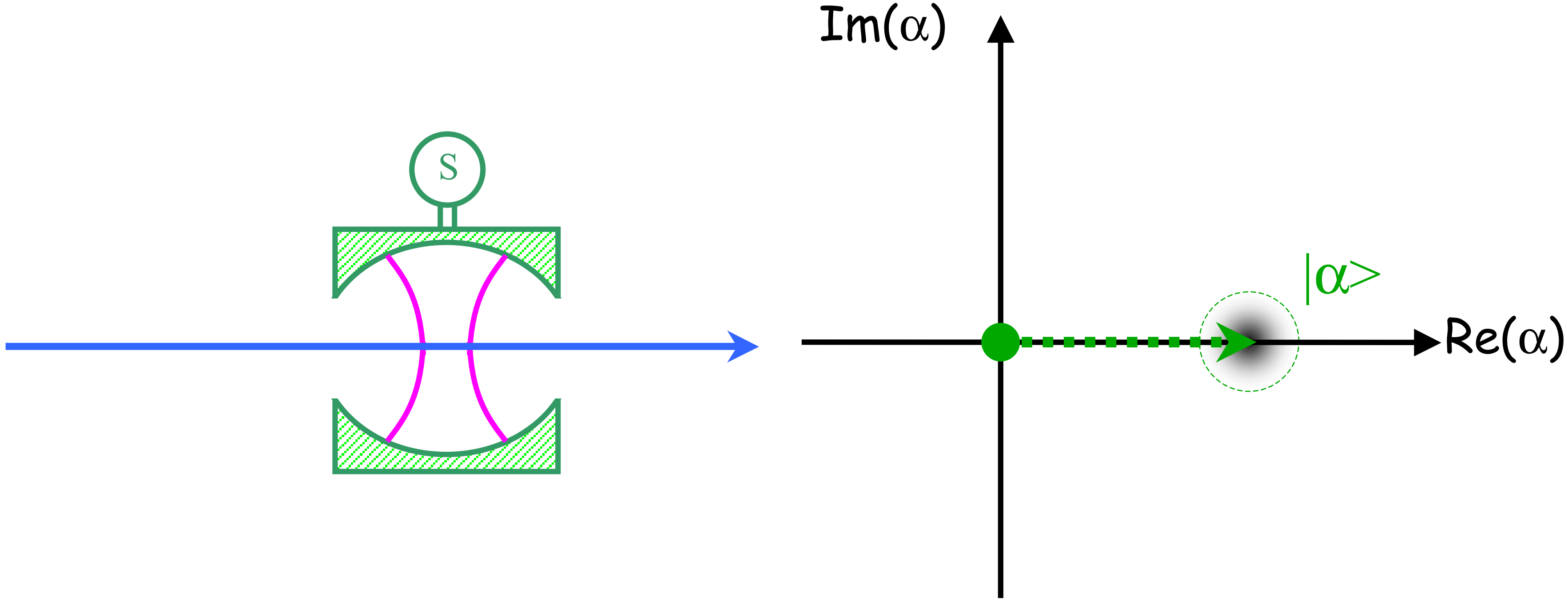
$\Rightarrow$ Il ne faut pas perdre un seul photon parmi n:

$$\boxed{T_{mes} \ll \frac{T_{cav}}{n_{\max}} = T_{dec}}$$

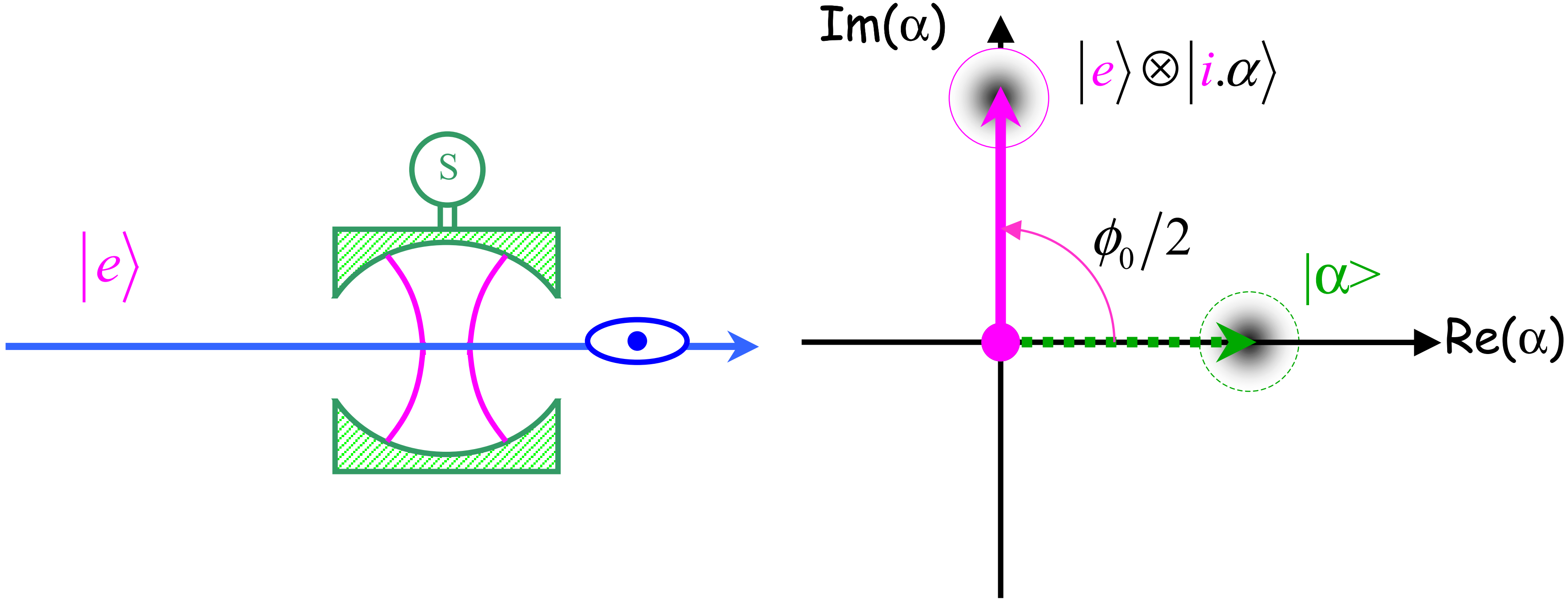
Durée de vie d'un "chat de Schrödinger" pair ou impair!

$$\boxed{T_{cav} = 10ms,\ T_{mes} \approx 100\mu s,\ n_{\max} \ll 100}$$

Manipulation de la phase d'un champ cohérent:

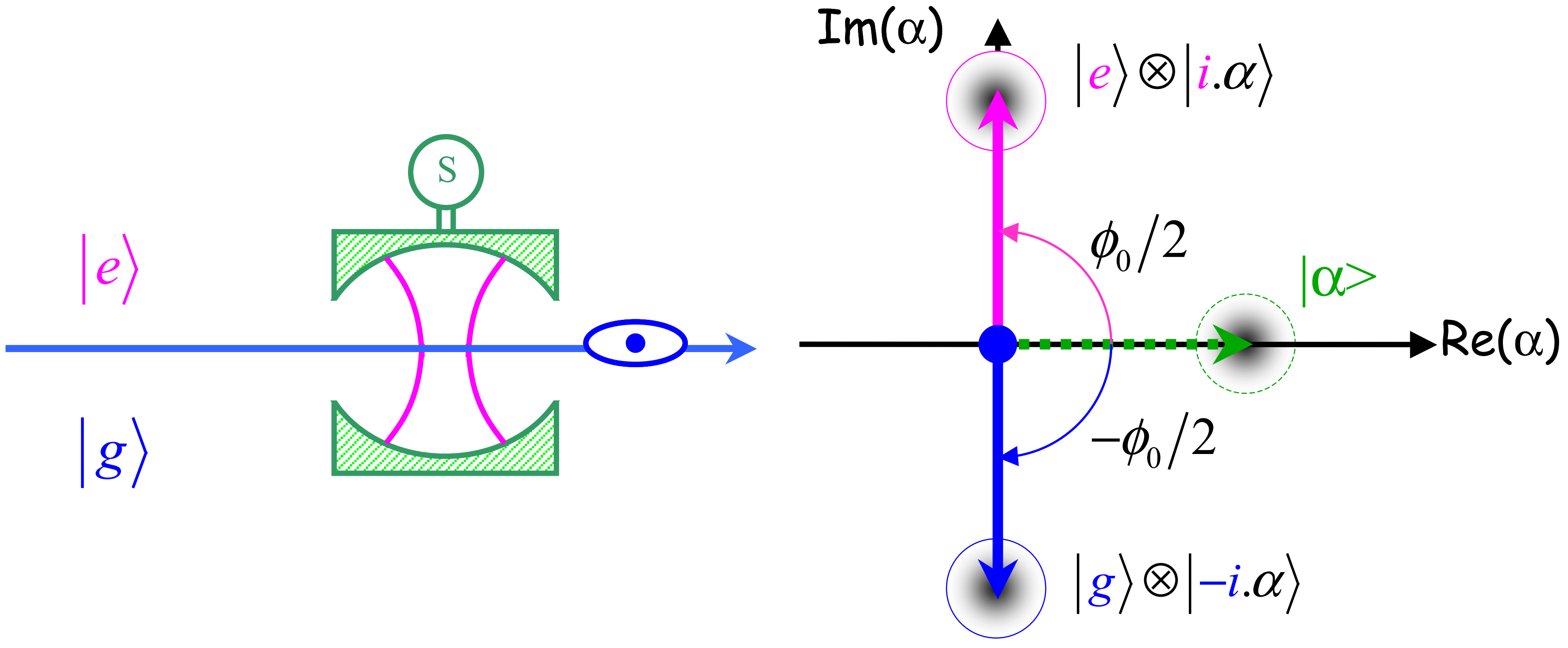


Manipulation de la phase d'un champ cohérent:



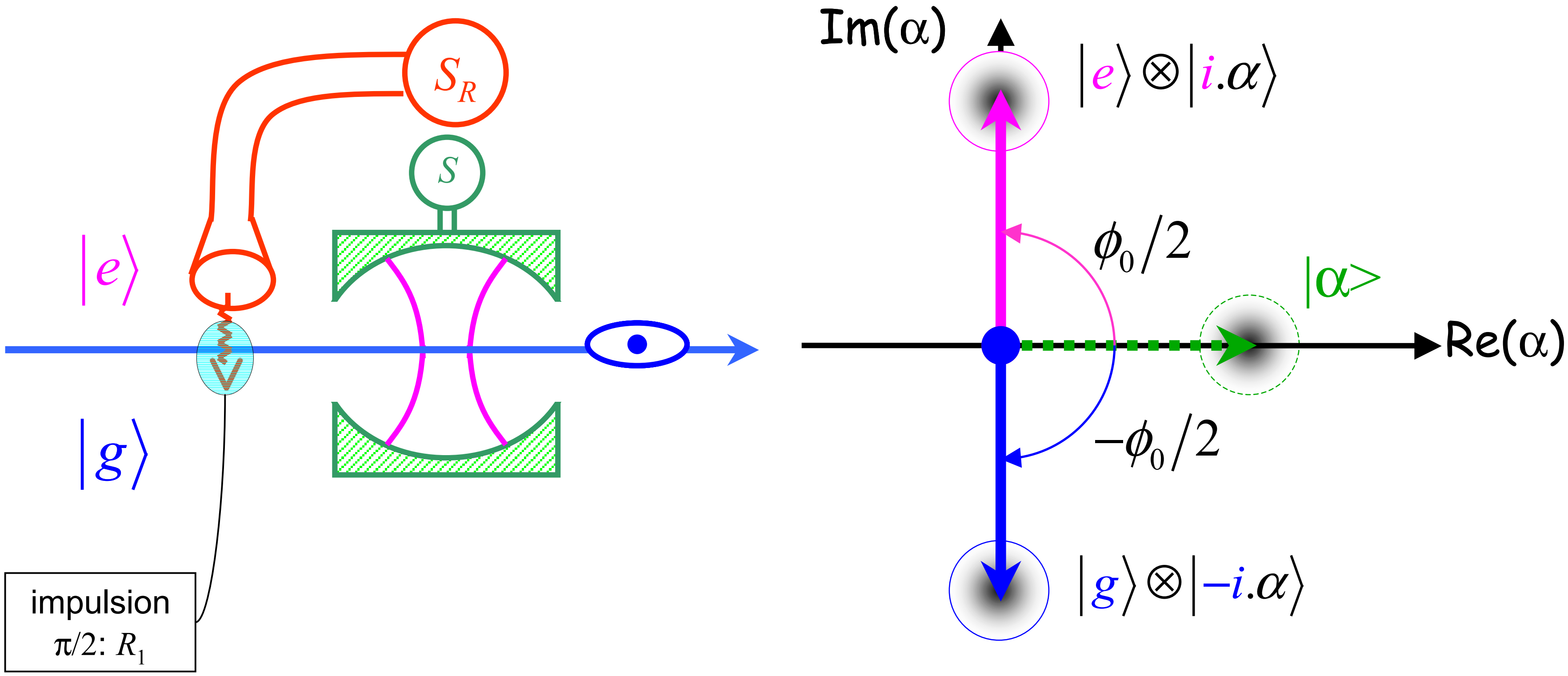
La phase du champ est contrôlée par un seul atome

Manipulation de la phase d'un champ cohérent:



La phase du champ est contrôlée par un seul atome

Manipulation de la phase d'un champ cohérent:



$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle + |g\rangle\right) \otimes |\alpha\rangle \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle \otimes |i.\alpha\rangle + |g\rangle \otimes |-i.\alpha\rangle\right)}$$

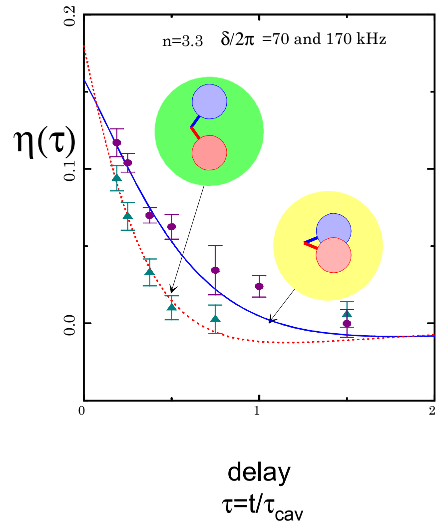
La phase du champ est contrôlée par un seul atome

"Chat de Schrödinger" et décohérence

$$\left|\Psi_{cat}\right\rangle = 1/\sqrt{2}\left(\left|e, \quad\right\rangle + \left|g, \quad\right\rangle\right)$$

Decoherence time

$$T_{dec} = \frac{T_{cav}}{N_{ph}}$$



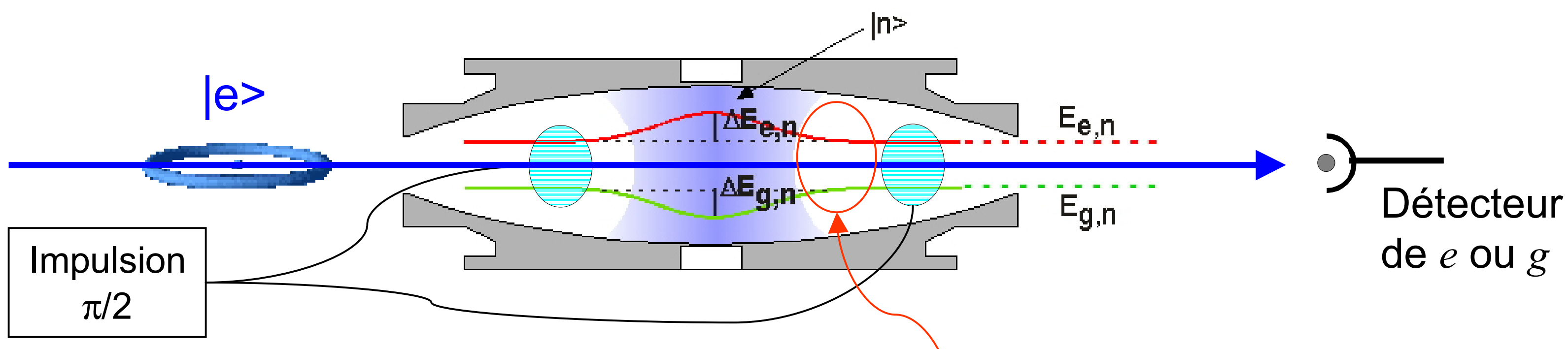
M. Brune et al., Phys. Rev. Lett. 77, 4887 (1996)

$$\boxed{N_{ph} = 3.3}$$

⇒ Mesure de $W(\alpha)$: caractérisation complète de l'état préparé.

⇒ "Voir" la décohérence, image par image.

Mesure de la parité et chat de Schrödinger



Etat intriqué: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle+|g\rangle\right)\otimes|\alpha\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle\otimes|i.\alpha\rangle+|g\rangle\otimes|-i.\alpha\rangle\right)}$

- Etat du champ après la seconde impulsion π/2 et détection de l'atome,
- C'est à dire après mesure de la parité:

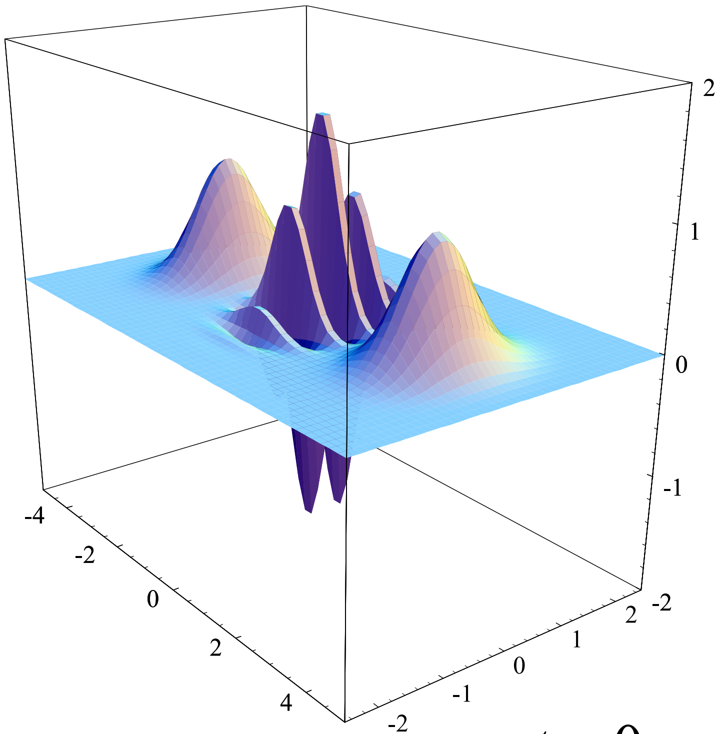
Si e: $\boxed{|\psi_{pair}\rangle = 1/\sqrt{2}\left(|\beta\rangle+|-\beta\rangle\right)}$ "Chat pair"

$\boxed{\beta = i\alpha}$

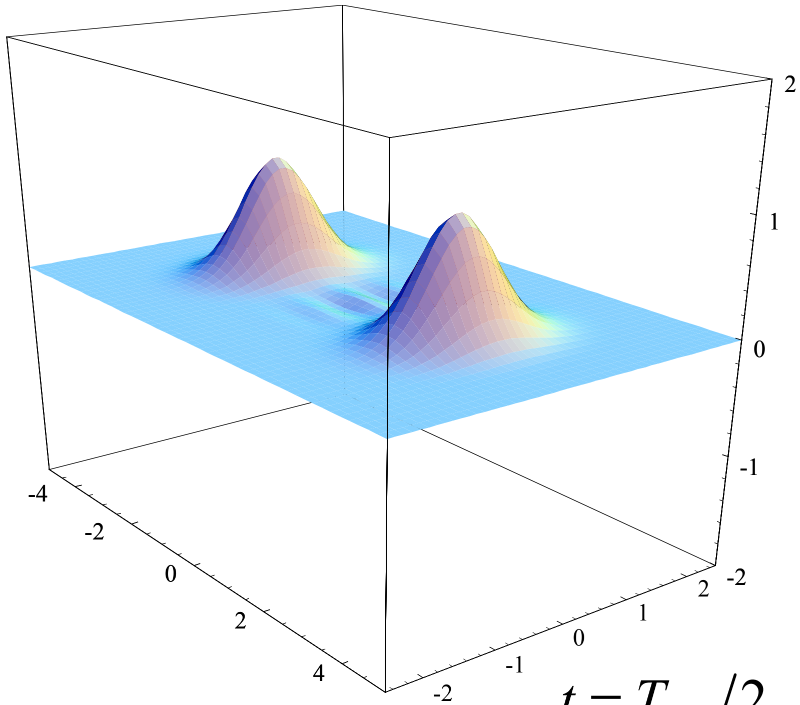
Si g: $\boxed{|\psi_{impair}\rangle = 1/\sqrt{2}\left(|\beta\rangle-|-\beta\rangle\right)}$ "Chat impair"

Fonction de Wigner et décohérence

- "Chat" à 9 photons: (Réaliste avec: T_{cav}= 10 ms)



$t = 0$



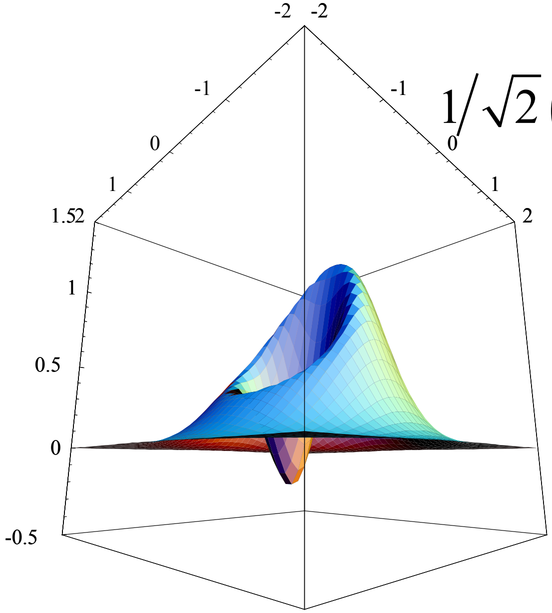
$t = T_{cav}/2$

Conclusion et perspectives

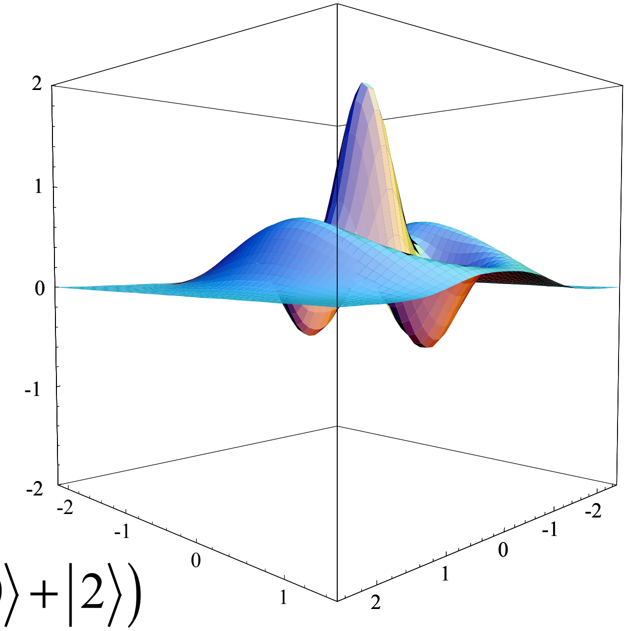
Atomes de Rydberg en cavité, des outils efficaces pour:

- préparer des états non-classiques
- caractériser ces états par leur fonction de Wigner

- Autre états "faciles" à préparer:



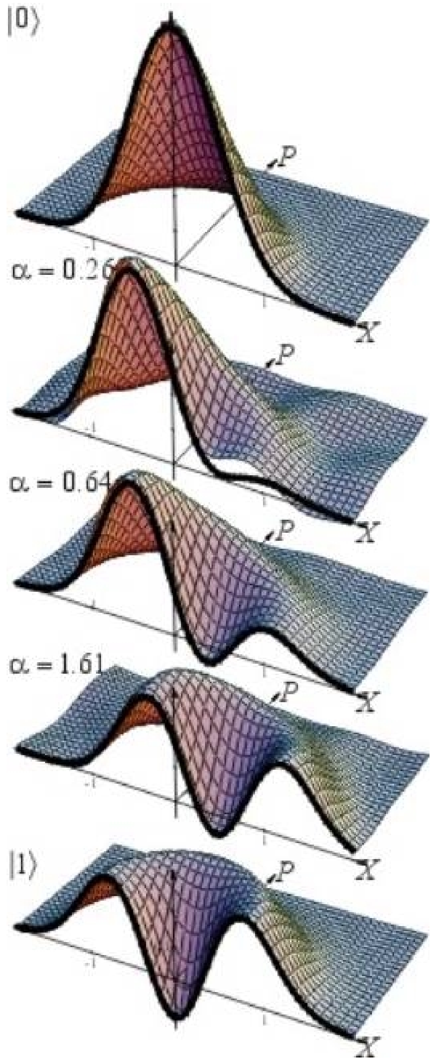
$1/\sqrt{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$



$1/\sqrt{2}\left(|0\rangle + |2\rangle\right)$

- Plus difficile: - observer la décohérence sur la distribution de Wigner
  - préparation de chats non-locaux avec deux cavités:

$$\boxed{1/\sqrt{2}\left(|0,\alpha\rangle + |\alpha,0\rangle\right)}$$



|0⟩
P
X
α = 0.26
P
X
α = 0.64
P
X
α = 1.61
P
X
|1⟩
P
X