1er Cours 08 Janvier 2002

Chaire de physique quantique

Cours de l 'année 2001-2002

Intrication, complémentarité et décohérence: des expériences de pensée à l 'information quantique

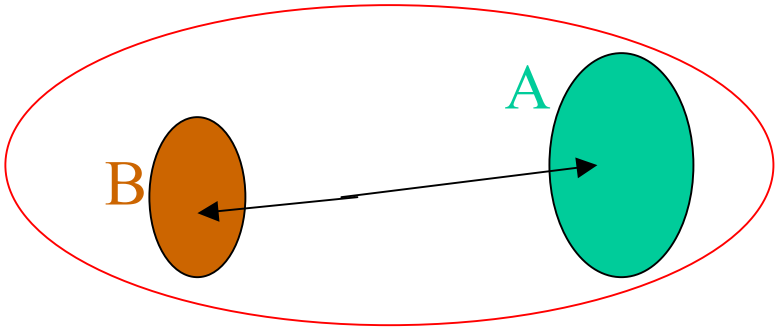
La manipulation d 'objets microscopiques simples (atomes, molécules photons) et la généralisation de ces expériences à des systèmes mésoscopiques de plus en plus complexes constituent un des domaines les plus dynamiques de la physique quantique actuelle. Ces expériences de pensée devenues réelles éclairent d 'un jour nouveau les concepts fondamentaux de la théorie.

Ces études sont également stimulées par le développement théorique du traitement quantique de l 'information, lui-même largement influencé par les concepts de l 'information classique: les systèmes quantiques simples (à deux niveaux) peuvent être considérés comme des porteurs de « bits » quantiques d 'information (« qubits ») et leur manipulation permet d 'accomplir des tâches impossibles avec des bits classiques...

Superpositions quantiques et intrication

Le principe de superposition conduit à décrire chaque état d 'un système physique par un vecteur d 'un espace de Hilbert associé à ce système. Cet espace devient extrêmement vaste lorsque l 'on considère des systèmes à plusieurs particules (m^N dimensions pour N systèmes à m niveaux). Toutes les combinaisons linéaires des états de base sont accessibles en principe, ce qui donne une richesse d 'effets physiques bien plus grande qu 'en physique classique.

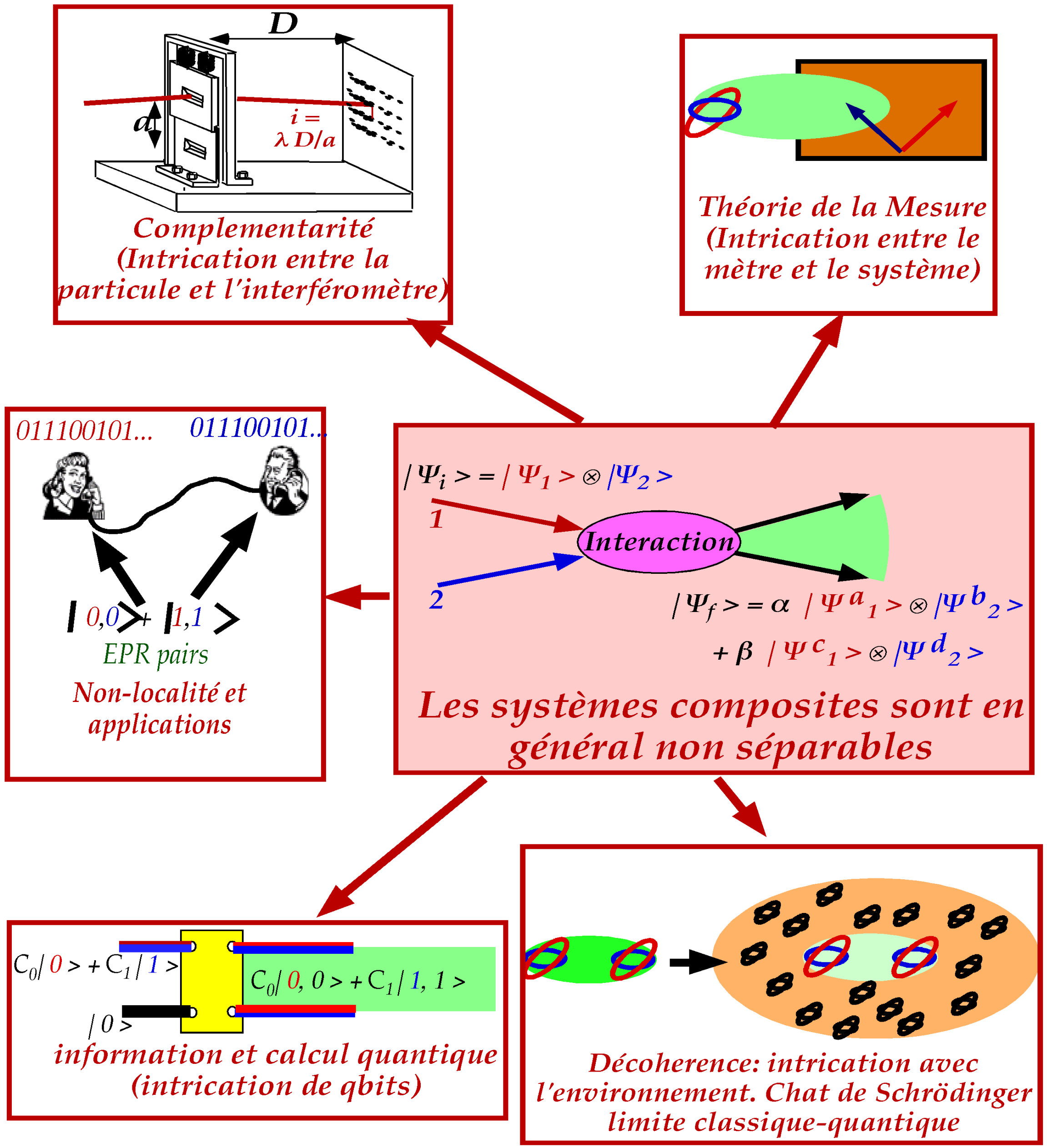
L 'aspect essentiel de cette richesse est lié à l 'intrication quantique: la plupart des états des systèmes composites sont non-séparables (ne peuvent s 'écrire comme des produits d 'états indépendants associés à chaque sous système). Cette intrication conduit à des corrélations non classiques entre les parties d 'un système physique, même lorsqu 'elles sont spatialement disjointes.



$$|\Psi_{AB}\rangle \neq |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$$

L 'intrication joue un rôle important dans la description et l 'analyse d 'un grand nombre de concepts ou processus quantiques: non-localité, complémentarité, théorie de la mesure, relaxation et décohérence, frontière classique-quantique…..Elle est également essentielle à la mise en œuvre de processus nouveaux de traitement quantique de l 'information (communication quantique et cryptographie, téléportation, algorithmes quantiques…).

Différents aspects de l'Intrication



Quelques questions posées par la physique de l 'intrication:

Comment interpréter le formalisme de la théorie (mesure, non-localité…)?

Comment quantifier le « degré » d 'intrication d 'un système dans différents cas (systèmes bi-ou multi-parties, cas purs ou mélanges statistiques…)?

Comment protéger la « bonne » intrication (celle que l 'on contrôle et que l 'on veut utiliser) de la « mauvaise » (celle avec l 'environnement qui cause la décohérence)?

Comment l 'utiliser pour communiquer, partager de l 'information et calculer de façon plus efficace ou plus rapide que par des voies classiques?

Comment la réaliser expérimentalement (choix des systèmes de qubits, réalisation des opérations élémentaires, possibilité d 'intégrer un grand nombre d 'éléments…etc)?

Les cours et séminaires de cette année et des années prochaines essayeront de poser ces questions de façon plus précise et d 'y apporter des réponses

Connaissances requises: Bases de Mécanique Quantique (niveau Maîtrise ou équivalent)

Plan (provisoire) du cours des années 2001-2002 et 2002-2003

1. Introduction à l' intrication en physique quantique:

l 'intrication en physique atomique et optique quantique, la non-localité et les inégalités de Bell, le problème de la mesure, la complémentarité et la décohérence, intrication et information quantique (cryptographie, téléportation, ordinateur quantique).

5 leçons en Janvier-Février 2002

2. Réalisations expérimentales de qubits et expériences d 'intrication:

Photons jumeaux, ions piégés, atomes et cavités, RMN…

4 Leçons en Février-Mars 2002

3. Quantification de l 'intrication et évolution de systèmes intriqués:

Intrication de systèmes bi-parties, évolution en présence d 'un environnement, théorie de la décohérence, distillation de l 'intrication etc….

Cours de l 'automne 2002

Quelques références

« Quantum Theory: Concepts and Methods »,
Asher Peres, Kluwer (1995)

« Quantum Theory and Measurement », Wheeler et Zurek (éditeurs), Princeton Univ.Press (1983).

« The physics of quantum information », D.Bouwmeester, A.Ekert et A.Zeilinger (éditeurs), Springer (2000)

« Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory », Giulini et al, Springer (1996)

« Quantum computation and quantum information »
M.A. Nielsen and I.Chuang, Cambridge Univ.Press. (2000)

« Quantum computation »,
J. Preskill, cours sur le Web:
www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/#lecture

Première Partie: Introduction à l'intrication en physique quantique

- *1. Définition et exemples simples d 'intrication*
- *2. Forme canonique d 'intrication: décomposition de Schmidt*
- *3. Intrication, non-localité et inégalités de Bell*
- *4. Intrication et mesure*
- *5. Intrication et complémentarité*
- *6. Intrication et décohérence*
- *7. Degré d 'intrication et entropie de von Neumann*
- *8. Intrication et communication quantique de l 'information*
- *9. Intrication et algorithmes quantiques*

1. Définition et exemples d'intrication en physique quantique:

Système S composite constitué de deux parties A et B dont les états appartiennent à des espaces de Hilbert H_A et H_B séparés (bases $|a_i>$, $|b_j>$). Si on prépare un état du système en effectuant un ensemble complet de mesures sur A et B séparément:

$$|\Psi_{AB}> = |\Psi_A>.|\Psi_B> \quad \text{(produit tensoriel « séparable »)}$$

Une manipulation de A seul laisse l'état de B et les prévisions des résultats de mesure sur B inchangés.

On peut cependant préparer aussi S par des mesures conjointes d'observables de l'ensemble A-B. Alors en général:

$$|\Psi_{AB}> \neq |\Psi_A>.|\Psi_B> \text{ (état non séparable ou « intriqué »)}$$

Un état intriqué est toujours une superposition d'états séparables:

$$|\Psi_{AB}> = \Sigma_{ij} \ \alpha_{ij} \ |a_i>|b_j>$$

Une manipulation de A a un effet « à distance » sur l'état de B (corrélations).

L'évolution (si le hamiltonien couple A et B) crée aussi de l'intrication:

$$|\Psi_A>.|\Psi_B> \quad \rightarrow \quad |\Psi_{AB}> \neq |\Psi'_A>.|\Psi'_B> \text{ (« collision »)}$$

Exemples d 'intrication (observables à spectre discret):

Deux spins 1/2:

Mesure de S_z^A et S_z^B $\longrightarrow$ $|+_A;+_B>$, $|+,->$, $|-;+>$, $|-;->$

Crée des états produits non intriqués

Mais...

Mesure de $S^{2\,(AB)}$ et $S_z^{(AB)}$ (résultat 0 , 0) $\longrightarrow$ $|0;0> = (1/\sqrt{2})\ (|+;-> - |-;+>)$

Observables collectives

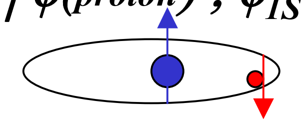
État intriqué, singulet de spin (invariant par rotation)

Etat fondamental de l 'Hydrogène
(A: spin du proton; B: spin de l 'électron

Etat « orbital » produit

$|\Psi_H> = |\phi(\text{proton})\ ;\ \phi_{1S}(\text{électron})>|0;0>$

Spins intriqués

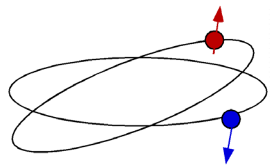


Etat fondamental de l 'Hélium
(A et B: spins des deux électrons)

Etat orbital symétrique par échange

$|\Psi_{He}> = |\phi_{1s}\ ;\ \phi_{1s}>|0;0>$

Etat de spin antisymétrique (Pauli) et intriqué



Intrication reconnue comme concept essentiel en M.Q. dès les origines

Exemples d 'intrication (observables à spectre continu: états discutés par Einstein-Podolsky et Rosen dans le papier EPR, Phys.Rev. 47, 777 (1935))

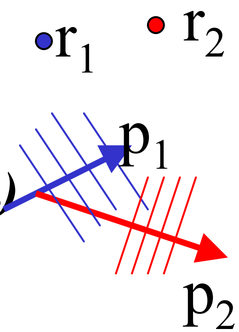
Deux particules sans spin. Différents choix possibles d'ECOC:

Positions R_A ***(résultat:*** r_1***) et*** R_B ***(résultat:*** r_2***):*** $\longrightarrow$ $\delta_A(r - r_1)\ \delta_B(r - r_2)$

Pas d 'intrication

Impulsions P_A ***(résultat:*** p_1***) et*** P_B ***(résultat:*** p_2***):*** $\longrightarrow$ $\delta_A(p - p_1)\ \delta_B(p - p_2)$

Pas d 'intrication



Impulsion totale $P = P_A + P_B$ ***(résultat:*** p***) et position relative*** $R = R_A - R_B$ ***(résultat*** r***)***

$([P_i, R_i] = 0;\ i = x,y,z)$ $\longrightarrow$ $\delta\,(p - p_A - p_B)\ \delta\,(r - r_A + r_B)$

Etat à impulsion totale et distance relative des particules fixées:

Représentation P: $|\Psi> = \int e^{-ip_A \cdot r/\hbar}\,|p_A\ ;\ p - p_A\ > d^3 p_A$

Représentation R: $|\Psi> = \int e^{\,ip \cdot r_A/\hbar}\,|r_A\ ;\ r_A - r\ > d^3 r_A$

<u>Etat intriqué, superposition continue d 'états produits dans les 2 représentations</u>

Intrication à grande distance de particules après interaction:

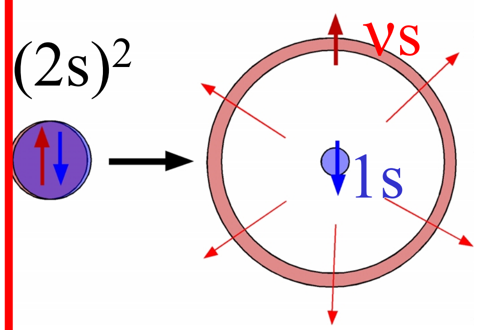
La « préparation » de l 'intrication implique toujours une forme d '<u>interaction</u> entre les sous-systèmes: <u>interaction directe</u> (comme dans H ou He) ou <u>interaction via le couplage avec l 'appareil qui mesure une observable collective</u> ($S_A + S_B$, $P_A + P_B$, $R_A - R_B$ etc…)

Une fois l 'intrication établie, elle peut cependant se maintenir même après que les particules aient cessé d 'interagir: <u>non-séparabilité des systèmes « étendus ».</u>

<u>*Exemple: autoionisation de l 'état $(2s)^2$ de He:*</u>

Hamiltonien indépendant des spins laisse l 'état singulet intriqué inchangé

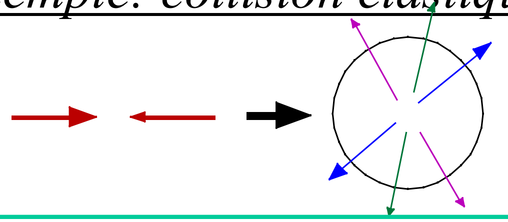
$$|\Psi_{He}(2s)^2\rangle = |\phi_{2s}\,;\phi_{2s}\rangle\,|0;0\rangle \longrightarrow (1/\sqrt{2})(|\phi_{1s}\,;\phi_{vs}\rangle + |\phi_{vs}\,;\phi_{1s}\rangle)\,|0;0\rangle$$



Intrication de spin entre une onde sphérique sortante et un ion He^+ qui subsiste pour une séparation infinie

La partie orbitale, symétrique par échange (Pauli), garde la symétrie sphérique (invariance par rotation du Hamiltonien)

<u>Autre exemple: collision élastique de deux particules d 'impulsions opposées:</u>



$$|p_0; -p_0\rangle \rightarrow \int \phi(p)\;|p\,;-p\rangle\, d^3p$$

Systèmes A et B intriqués: rappels sur l 'opérateur densité ρ

Quand A et B sont intriqués, chacun d'eux n'est pas décrit par un état mais par un opérateur densité:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \Sigma_{ij}\ \alpha_{ij}\ |a_i\rangle|b_j\rangle \quad \rightarrow \quad \rho_{AB} = |\Psi\rangle_{AB}\ {}_{AB}\langle\Psi|$$

$$\rho_A = Tr_B\, \rho_{AB} = Tr_B\, [|\Psi\rangle_{AB}\ {}_{AB}\langle\Psi|] = \Sigma_{i,i'}\ (\Sigma_j\ \alpha_{ij}\, \alpha^*_{i'j})|\, a_i\rangle\langle a_{i'}|$$

$$\rho_B = Tr_A\, \rho_{AB} = Tr_A\, [|\Psi\rangle_{AB}\ {}_{AB}\langle\Psi|] = \Sigma_{j,j'}\ (\Sigma_i\ \alpha_{ij}\, \alpha^*_{ij'})|\, b_j\rangle\langle b_{j'}|$$

L 'opérateur densité ρ_{AB} de A-B est un projecteur, mais en général pas ρ_A ou ρ_B. Les $\rho_{A,B}$ sont toujours des opérateurs hermitiques positifs (v.p. ≥ 0), de trace unité. Ce ne sont des projecteurs ($Tr\, \rho^2 = 1$) que si A et B ne sont pas intriqués.

Valeurs moyennes d 'observables O_A ou O_B associées à chaque sous-système:

$$\langle O_A \rangle = Tr\, \rho_A O_A; \qquad \langle O_B \rangle = Tr\, \rho_B O_B$$

Cas particulier: A interagit avec un réservoir ou environnement E non détecté $\rightarrow$ importance du formalisme de l 'opérateur densité pour traiter de la relaxation

Autre définition (équivalente): description d 'un système dont la préparation est imparfaitement connue: probabilité p_a de l 'avoir préparé dans l 'état $|a\rangle$ $\rightarrow$

$\rho_A = \Sigma_a\ p_a\, |a\rangle\langle a|$; ***les $|a\rangle$ normés mais non nécessairement orthogonaux.***

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{« cas pur »:} \quad \rho \text{ est un projecteur} \longleftrightarrow Tr\, \rho^2 = 1 \\ \text{« mélange statistique »: au moins deux } p_a \neq 0 \longleftrightarrow Tr\, \rho^2 < 1 \end{array}}$$

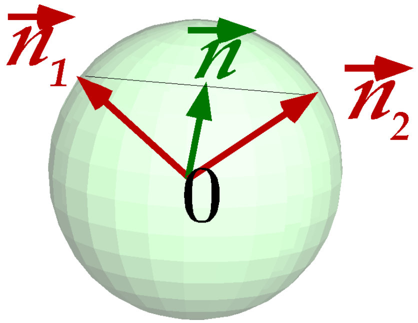
Opérateur densité d'un système à deux niveaux (spin 1/2 ou qubit 0,1): La sphère de Bloch

Matrice hermitique 2x2 de trace unité:

$$\rho = \frac{1}{2}\left[1 + \vec{n}.\vec{\sigma}\right] \ldots\ldots \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Où les σ_i (i =x,y,z) sont les matrices de Pauli vérifiant: $\sigma_i^2 = 1; \sigma_i \sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$; *Tr* $\sigma_i = 0$

$\vec{n}$ ***: Polarisation du spin ou du qubit vérifiant: det (ρ) = (1/4)(1– n^2) ≥ 0 (ρ positif)*** $\rightarrow$ $\left|\vec{n}\right| \leq 1$



$\left|\vec{n}\right| = 1$ ***Extrémité de n sur la sphère de Bloch: cas pur (θ,φ : angles polaires de n)***

$$\boxed{\left|\varphi(\vec{n})\right\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi/2}\left|+1/2\right\rangle_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{+i\varphi/2}\left|-1/2\right\rangle_z}$$

$\left|\vec{n}\right| < 1$ ***n à l 'intérieur de la sphère de Bloch: mélange*** $\langle\vec{\sigma}\rangle = \vec{n}$

$\left|\vec{n}\right| = 0$ ***État non polarisé*** $\langle\vec{\sigma}\rangle = 0$

Tout n < 1 peut s 'écrire d 'une infinité de façons comme la somme de deux n sur la sphère: $\rightarrow$ $\vec{n} = \lambda\vec{n}_1 + (1-\lambda)\vec{n}_2$ (0 <λ<1)

$\rightarrow \rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ ***avec (j =1,2):*** $\rho_j = \frac{1}{2}(1 + \vec{n}_j.\vec{\sigma}) = \left|\varphi(\vec{n}_j)\right\rangle\left\langle\varphi(\vec{n}_j)\right|$

(Ambiguïté du mélange d 'états non-orthogonaux)