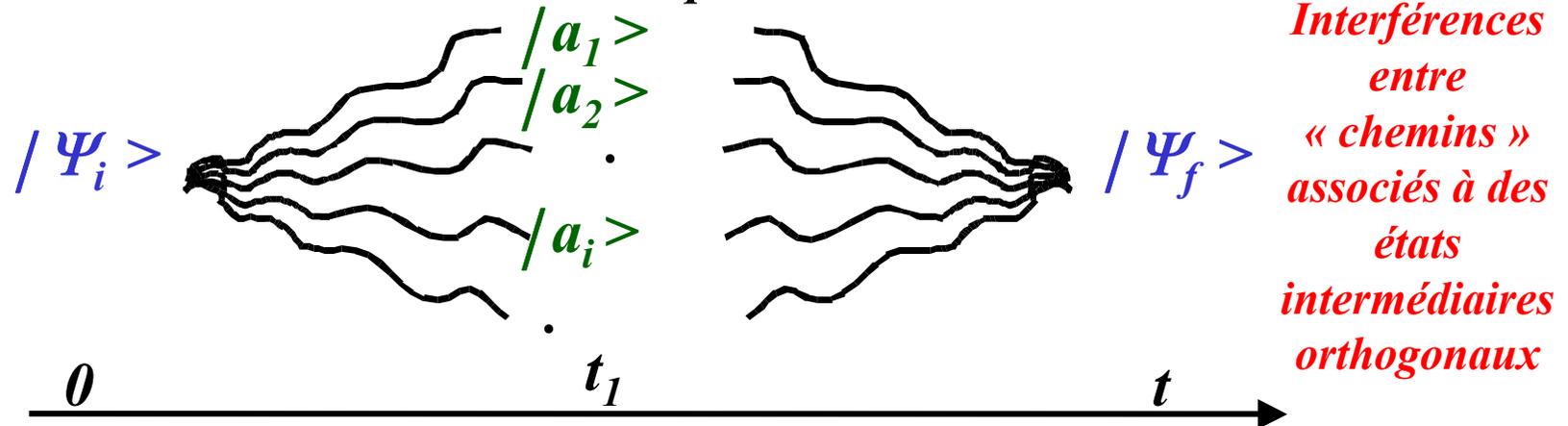


6. Intrication et complémentarité

Le principe de superposition des états conduit directement aux interférences quantiques et au **dualisme onde-corpuscule**. Les notions d'onde et de particule sont des aspects **complémentaires** de la description des systèmes quantiques.

L'**intrication entre le système et l'appareil utilisé** pour l'observation des interférences joue un rôle essentiel pour déterminer lequel de ces deux aspects est dominant dans une expérience donnée.



Evolution d'une particule dans un interféromètre (réel ou virtuel):

$$|\Psi_i\rangle \longrightarrow |\Psi(t_1)\rangle = U(t_1, 0) |\Psi_i\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i| U(t_1, 0) |\Psi_i\rangle$$

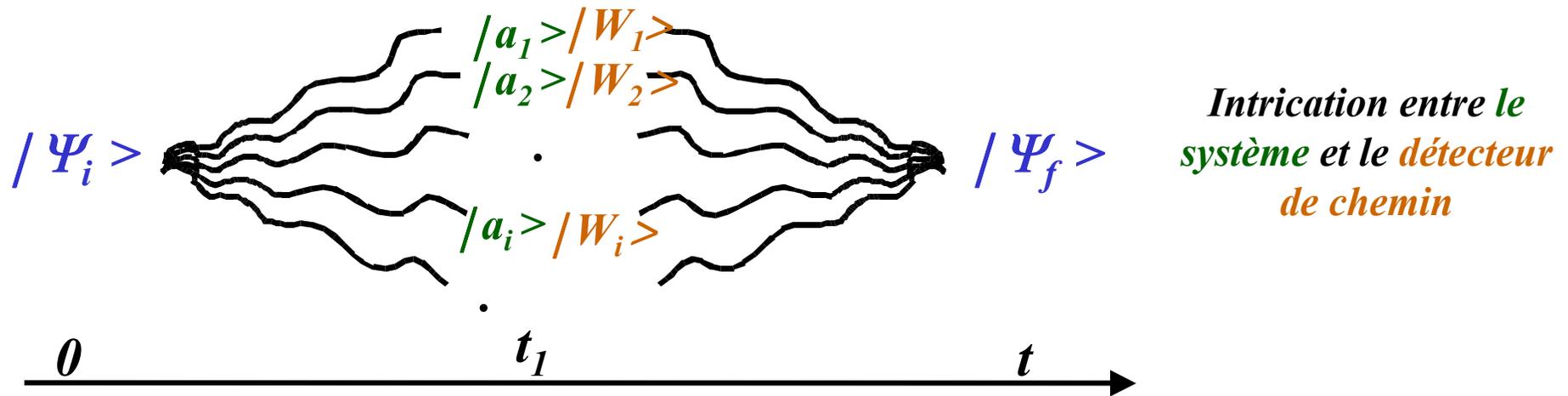
Relation de fermeture

$$P_{if} = \left| \sum_i \langle \Psi_f | U(t, t_1) | a_i \rangle \langle a_i | U(t_1, 0) | \Psi_i \rangle \right|^2$$

Interférences associées aux **termes « rectangles »** ($i \neq j$) de ce carré de somme

Les interférences ne s'observent que si les chemins sont indiscernables (les $|a_i\rangle$ ne sont pas « mesurés »)

Pour détecter les $|a_i\rangle$, il faut coupler le système à un appareil de mesure indiquant le chemin («welcherweg» ou «which-path» detector)



$$|\Psi(t_1)\rangle |W_0\rangle \longrightarrow \sum_i |W_i\rangle |a_i\rangle \langle a_i | U(t_1, 0) | \Psi_i \rangle$$

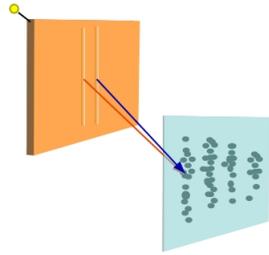
Matrice densité du système à l'instant t_1 (tracée sur l'espace du détecteur de chemin):

$$\sum_{ij} |a_i\rangle \langle a_i | U(t_1, 0) | \Psi_i \rangle \langle W_j | W_i \rangle \langle \Psi_i | U^\dagger(t_1, 0) | a_j \rangle \langle a_j |$$

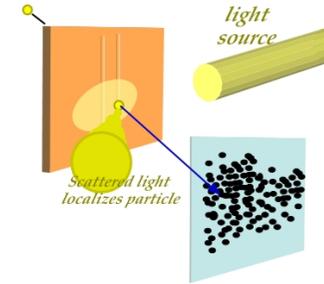
Visibilité des interférences nulle si possibilité d'information non-ambiguë sur le chemin

($\langle W_j | W_i \rangle = 0$). Il n'est pas nécessaire que cette information soit lue...

Le détecteur de chemin peut être un appareil indépendant du système (intrication « externe »)...

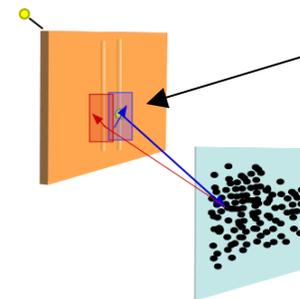


Franges disparaissent lorsqu'un photon diffusé renseigne sur la trajectoire (intrication photon-particule)



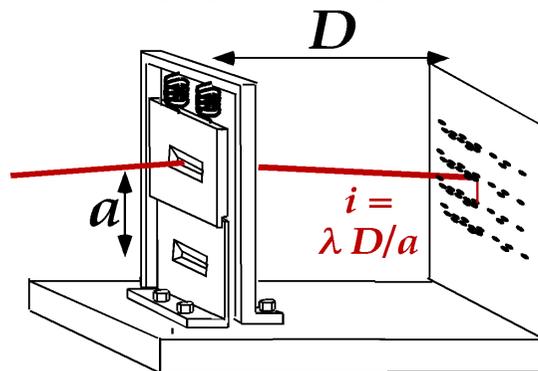
...ou bien correspondre à un degré de liberté « interne » de la particule qui s'intrique avec l'état associé au chemin (intrication « interne »)...

Les franges disparaissent lorsque l'on polarise la particule selon deux directions orthogonales dans les deux chemins (polarisation lumineuse ou spin...): intrication entre variables internes et externes de chaque particule



Lames polarisantes ou bobines de résonance magnétique...

..ou bien faire partie de l'interféromètre lui-même (lame séparatrice ou fente « microscopique » capable de s'intriquer avec la particule).

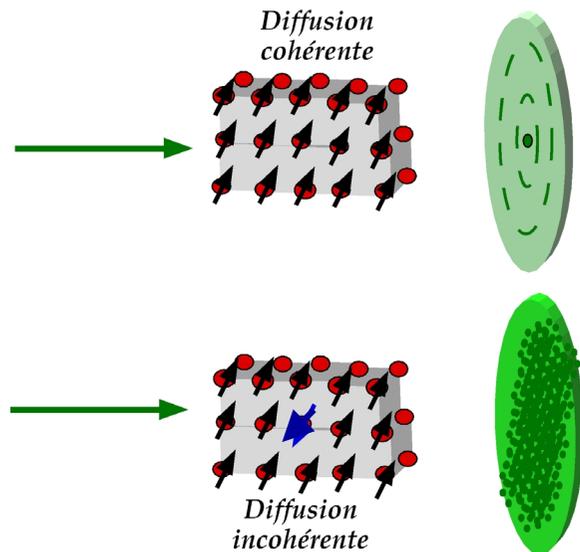


Dessin de Bohr décrivant une expérience de pensée

Le recul de la fente fournit une information sur le chemin: intrication entre la particule et l'interféromètre lui-même. (Un interféromètre classique est un appareil « macroscopique » qui ne s'intrique pas avec la particule)

Dans tous les cas, l'intrication de la particule avec un système donnant potentiellement une information sur le « chemin » détruit les interférences....

Détecteur de chemin dans une expérience de diffusion: quand la diffusion est-elle « cohérente »?



Dans une expérience de diffusion, un flux de particules (photons, électrons, neutrons...) interagit avec un système diffuseur (atome, cristal...). La diffusion est dite « cohérente » si les amplitudes associées à différents « chemins » interfèrent (diffusion correspondant à différents niveaux atomiques intermédiaires, ou à différents centres dans le cristal). La diffusion est incohérente si elle résulte de la sommation de probabilités associées à ces différents processus élémentaires.

La diffusion est cohérente si le système diffuseur ne garde dans son état final aucune information du chemin suivi (exemples: la diffusion résonnante de photons par un atome « passant » par plusieurs niveaux intermédiaires excités et aboutissant au même état final conduit au phénomène cohérent de battements quantiques; la diffusion élastique de lumière ou de neutrons par un cristal est cohérente et donne lieu à des interférences). Par contre, la diffusion de lumière par un atome, lorsqu'elle fait intervenir plusieurs transitions correspondant à des niveaux finals différents est incohérente (pas de battements quantiques dans ce cas). La diffusion inélastique de neutrons (qui bascule le spin d'un atome du cristal) est également incohérente.

Relation directe avec la complémentarité

Intrication et gomme quantique

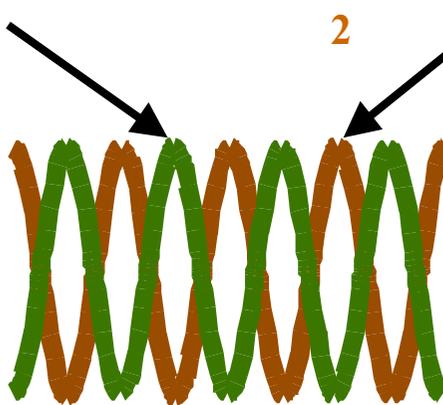
*La disparition des interférences se produit dès qu 'une information sur la trajectoire de la particule est inscrite dans le « détecteur de chemin », sans qu 'il y ait besoin d 'achever la mesure (**la phase d'intrication de la pré-mesure suffit**). Nous avons vu que tant que la décohérence ne s 'est pas produite, le détecteur a la potentialité de mesurer une autre observable, « mélangeant » les $|a_i\rangle$: une telle mesure, si elle est effectuée, « **efface** » l 'information sur la trajectoire de la particule dans l 'interféromètre et rétablit les franges.*

Cas d 'un interféromètre à deux voies:

$$|W_1\rangle|a_1\rangle\langle a_1|U(t_1, 0)|\Psi_i\rangle + |W_2\rangle|a_2\rangle\langle a_2|U(t_1, 0)|\Psi_i\rangle = \alpha_1|W_1\rangle|a_1\rangle + \alpha_2|W_2\rangle|a_2\rangle =$$

$$\frac{(|W_1\rangle + |W_2\rangle)}{2}(\alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle) + \frac{(|W_1\rangle - |W_2\rangle)}{2}(\alpha_1|a_1\rangle - \alpha_2|a_2\rangle)$$

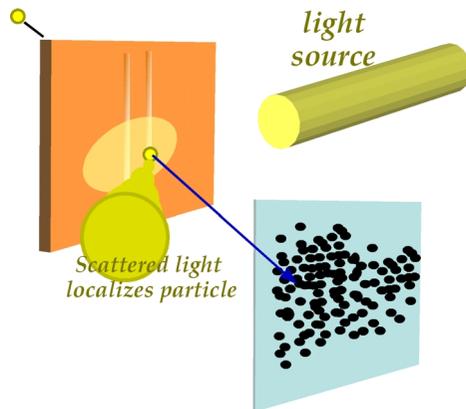
La détection d 'une observable mélangeant les deux voies « projette » la particule dans une superposition d 'états rétablissant les interférences...



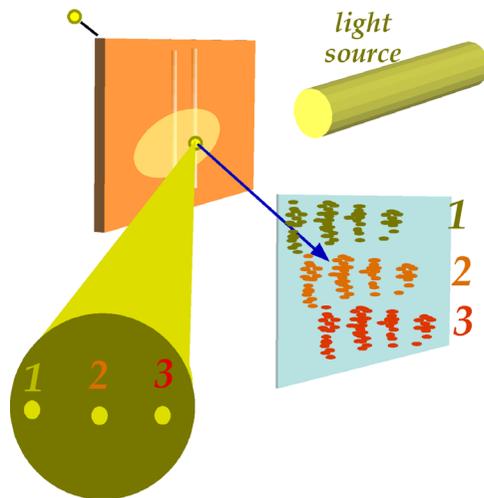
..mais il faut détecter la particule en coïncidence avec le « détecteur de chemins »: franges conditionnelles

Si on ne mesure pas W , il faut sommer des franges de phases opposées: il n 'y a alors pas de frange (le choix de la base dans laquelle l 'intrication est exprimée est indifférent)

*Une expérience de gomme quantique
(d'après Chapman et al, PRL.75, 3783 (1995))*



Particule intriquée avec le photon servant de détecteur de chemin: pas de franges, même si le photon n'est pas « vu »



Photon détecté dans un petit angle solide et particule enregistrée en coïncidence: observations de franges dont la phase est corrélée à la direction de détection du photon

On observe ici l'impulsion du photon, qui ne commute pas avec la position

Franges brouillées lorsque l'on somme sur toutes les directions de photons

7. Intrication et décohérence

Qu 'arrive-t-il aux superpositions impliquant des états « macroscopiques » tels que ceux associés aux « mètres » des appareils de mesure? Peut-on comprendre la disparition des éléments non-diagonaux de la matrice densité du système « S+M » que l 'on associe au problème de la « réduction du paquet d 'onde »? Comment se fait le « choix » de la base diagonale des états de ce système?

Problème de la disparition des superpositions impliquant des états macroscopiques différents et de l 'émergence du monde classique à partir des lois quantiques sous-jacentes, ou encore problème du « chat de Schrödinger » (« mètre » remplacé par un système biologique pour dramatiser la situation)



Rôle essentiel de l 'intrication de M à son « environnement » pour expliquer la décohérence

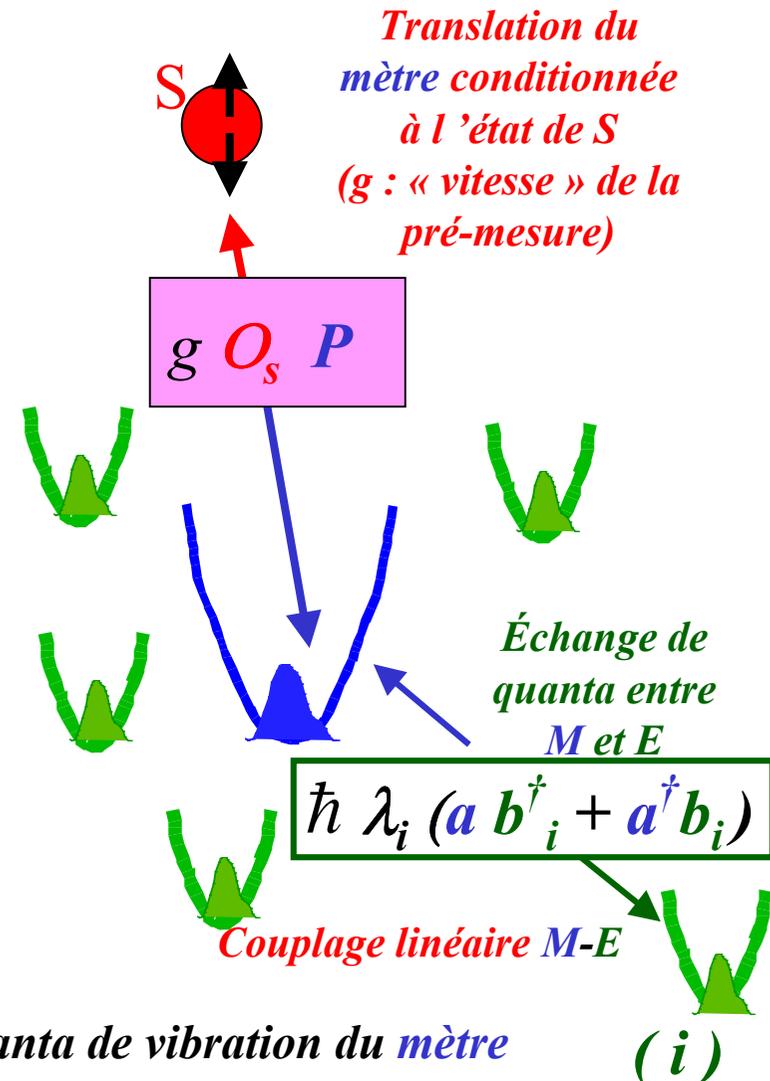
Première approche simple à partir d 'un modèle entièrement calculable

Un modèle simple de mesure quantique:

Le système S a deux niveaux $|s_0\rangle$ et $|s_1\rangle$, états propres d'une observable O_s de valeurs propres $\varepsilon_0 = 0$ et $\varepsilon_1 = 1$ (sans dimension).

Le « mètre » M est un oscillateur harmonique de grande masse. Il est couplé à un réservoir E (« environnement ») constitué d'un ensemble d'oscillateurs élémentaires. Le couplage $M - E$ assure l'amortissement du mètre. La pré-mesure intervient en un temps court par rapport aux temps d'évolution caractéristiques du mètre (période d'oscillation, temps d'amortissement et de décohérence). Les états initiaux du mètre et de l'environnement sont leurs états fondamentaux respectifs: $|0\rangle_M$ et $|0\rangle_E = \prod_i |0\rangle_i$.

a et a^\dagger : opérateurs d'annihilation et de création de quanta de vibration du mètre
 b_i et b_i^\dagger : opérateurs d'annihilation et de création de quanta du mode i du réservoir



Modèle simple analytique. Pas d'« étalement » du paquet d'onde du « mètre ».

Rappels sur l'oscillateur harmonique

$$H = p^2 / 2m + m\omega^2 x^2 / 2$$

Opérateurs d'annihilation et de création de quanta

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p$$

$$[a, a^+] = 1$$

$$H = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right)$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p$$

Etat fondamental $|0\rangle$ de l'oscillateur (énergie $\hbar\omega/2$)

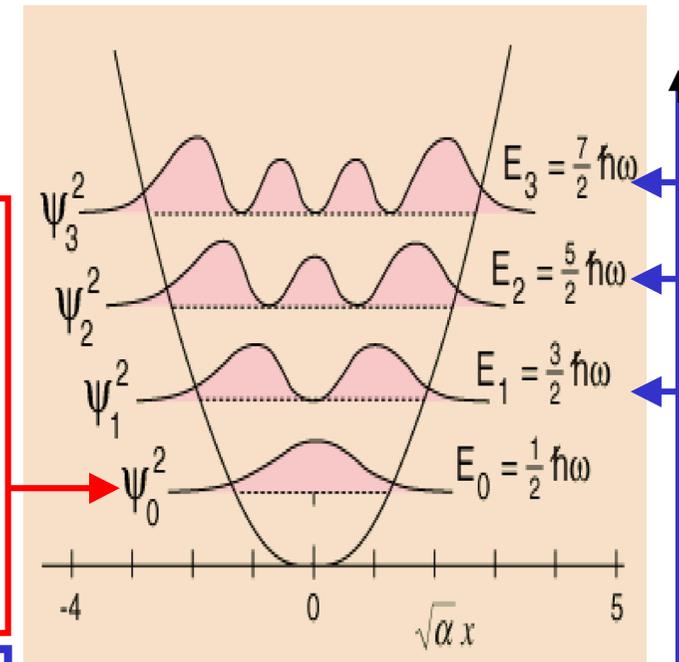
$$\langle x|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Paquet d'onde gaussien « minimal »

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}; \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \rightarrow \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

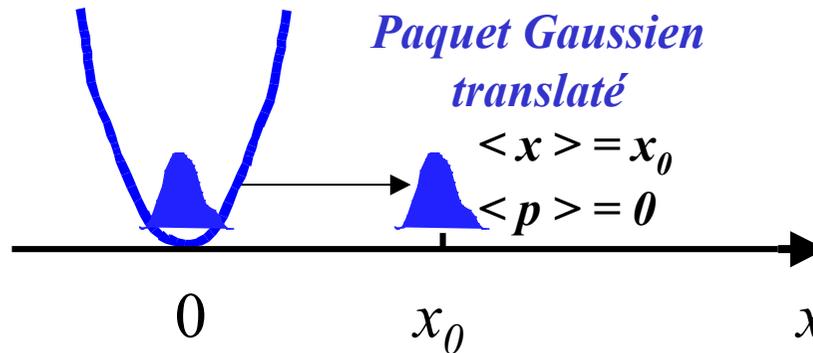
Etat excité à n quanta (énergie : $(n+1/2)\hbar\omega$)

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$



Translation de l'état fondamental:

$$T(x_0)|0\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}x_0P\right)|0\rangle = \exp\left[\alpha(a^+ - a)\right]|0\rangle \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 = \frac{x_0}{2\Delta x}$$



Généralisation: « translation » dans l'espace des phases:

$$|\alpha\rangle = \exp\left[\alpha a^+ - \alpha^* a\right]|0\rangle \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p_0$$

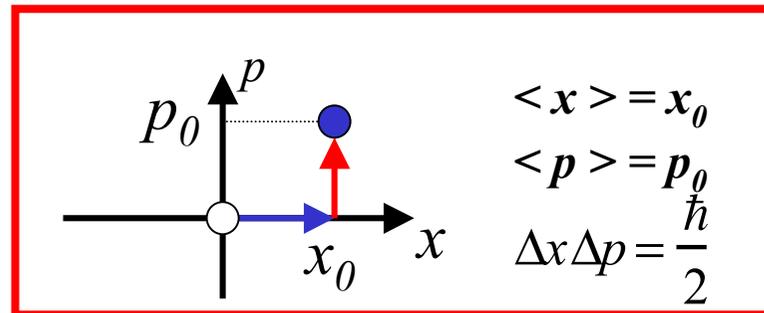
Etat « cohérent »
Gaussien

Opérateur
Déplacement
 $D(\alpha)$

(à un facteur de phase global
près qui dépend de l'ordre
des opérations)

α complexe

**On translate
l'oscillateur et on
lui applique une
force
impulsionnelle**



Propriétés des états cohérents

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^+ - \alpha^* a] = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) \quad (\text{Théorème de Glauber})$$

On montre alors sans peine:

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha) |n\rangle \quad \text{avec} \quad C_n(\alpha) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Loi de Poisson pour n

$$\bar{n} = |\alpha|^2 ; \quad \frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Les $|\alpha\rangle$ sont états propres de a avec la v.p. α (attention: a n'est pas hermitique et les $|\alpha\rangle$ ne sont pas orthogonaux)

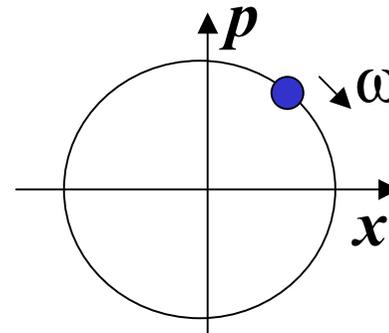
$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{\beta \alpha^*}$$

Gaussiennes quasi-orthogonales lorsque $|\alpha - \beta| \gg 1$

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

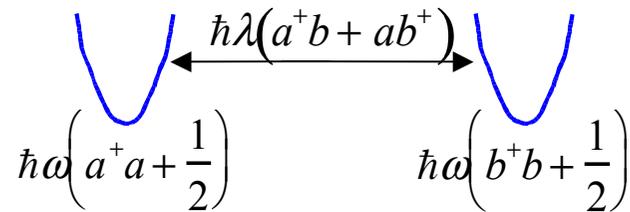
Evolution temporelle:

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+1/2)\omega t} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$



Le « paquet » déplacé oscille sans étalement dans le potentiel harmonique

Couplage linéaire de deux oscillateurs de même fréquence



$$H = \hbar\omega(a^+a + b^+b + 1) + \hbar\lambda(a^+b + ab^+) = \hbar(\omega + \lambda)(A^+A + 1/2) + \hbar(\omega - \lambda)(B^+B + 1/2)$$

Hamiltonien de deux oscillateurs indépendants (A) et (B) de fréquences $\omega \pm \lambda$.

$$A = \frac{a+b}{\sqrt{2}}; B = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \quad \left| \begin{array}{l} [A^+, A] = [B^+, B] = 1 \\ [A, B] = [A, B^+] = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Etat} \\ \text{fondamental} \\ \text{énergie}(\hbar\omega) \end{array} \quad |0\rangle_a |0\rangle_b = |0\rangle_A |0\rangle_B$$

Un quantum du mode (A) ou (B) est un état intriqué des deux modes (a) et (b):

$$\frac{(a^+ + b^+)}{\sqrt{2}} |0_a, 0_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle_a |0\rangle_b + |0\rangle_a |1\rangle_b] = |1\rangle_A |0\rangle_B \quad \left| \begin{array}{l} \text{énergie} \\ \hbar\omega + \hbar(\omega + \lambda) \end{array} \right. \quad \frac{(a^+ - b^+)}{\sqrt{2}} |0_a, 0_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle_a |0\rangle_b - |0\rangle_a |1\rangle_b] = |0\rangle_A |1\rangle_B \quad \left| \begin{array}{l} \text{énergie} \\ \hbar\omega + \hbar(\omega - \lambda) \end{array} \right.$$

En appliquant $(a^\dagger \pm b^\dagger)^n$ à $|0_a, 0_b\rangle$ on calcule de même les états à n quanta de (A) et (B)

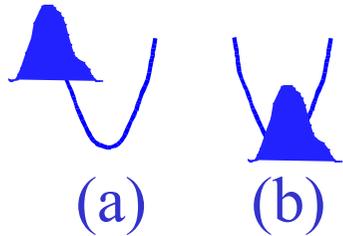
L'échange réversible d'un quantum entre les oscillateurs les intrique pour $\lambda t \neq k\pi/2$:

$$|\Psi(0)\rangle_{ab} = |1\rangle_a |0\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |1\rangle_B] \rightarrow |\Psi(t)\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i(2\omega+\lambda)t} |1\rangle_A |0\rangle_B + e^{-i(2\omega-\lambda)t} |0\rangle_A |1\rangle_B]$$

$$\longrightarrow e^{-2i\omega t} [\cos(\lambda t) |1\rangle_a |0\rangle_b - i \sin(\lambda t) |0\rangle_a |1\rangle_b]$$

On calcule de même l'échange de n quanta (intrication avec nombre de Schmidt = n+1) 12

Etat initial: (a) excité dans un état cohérent, (b) dans l'état fondamental:

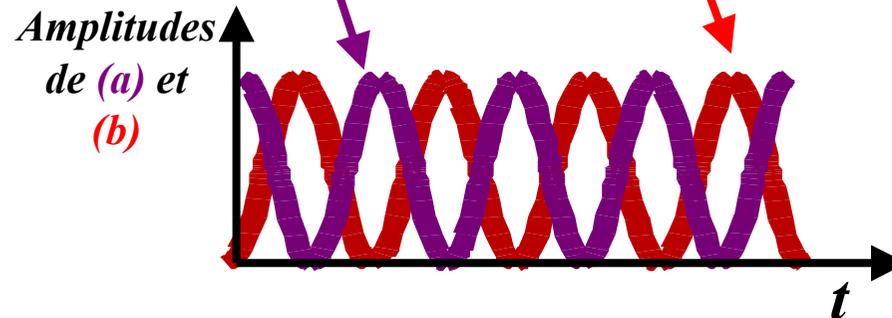


→ ? $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_a |0\rangle_b \rightarrow |\Psi(t)\rangle?$

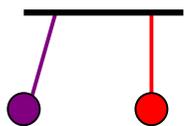
$$|\Psi(0)\rangle = D_a(\alpha)D_b(0)|0\rangle_a|0\rangle_b = D_A\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)D_B\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle_A|0\rangle_B = \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_A \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_B$$

$$\rightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega t} \left| \frac{\alpha e^{-i(\omega+\lambda)t}}{\sqrt{2}} \right\rangle_A \left| \frac{\alpha e^{-i(\omega-\lambda)t}}{\sqrt{2}} \right\rangle_B = e^{-i\omega t} \left| \alpha e^{-i\omega t} \cos(\lambda t) \right\rangle_a \left| -i\alpha e^{-i\omega t} \sin(\lambda t) \right\rangle_b$$

**Echange d'amplitude des deux oscillateurs (a) et (b) à la fréquence λ .
Ils restent « cohérents »**



**Le couplage ne crée pas d'intrication
(les états cohérents sont « classiques »)**



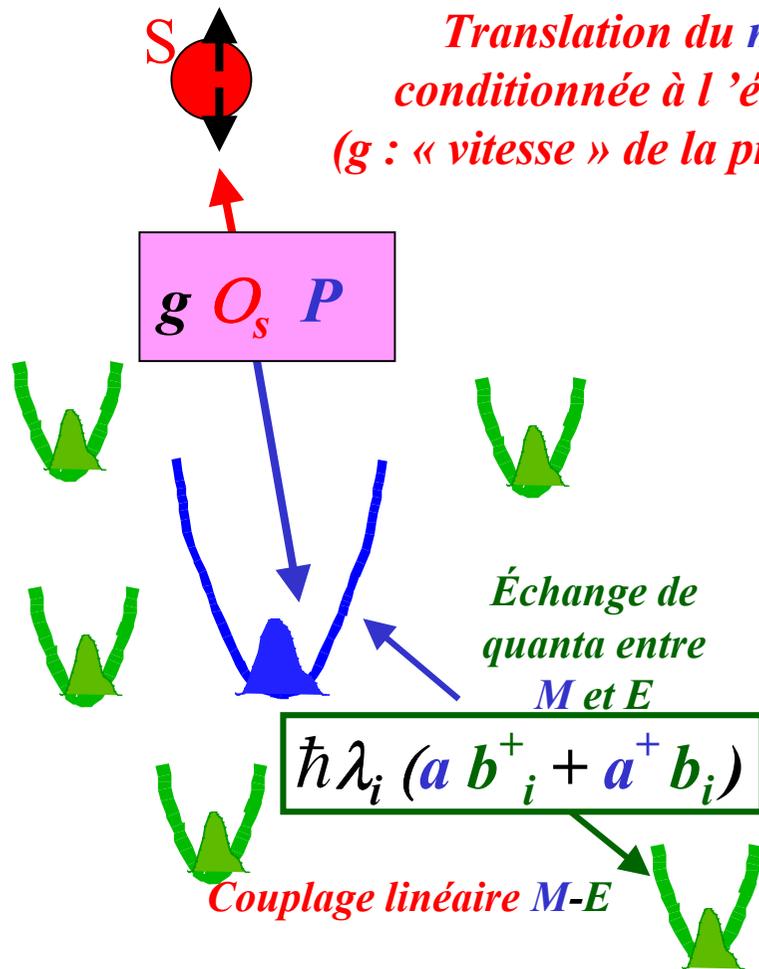
Réalisable avec deux pendules couplés

L'intrication dépend du couplage entre les systèmes *et de leur état initial*:

Etats de Fock: intrication

Etats cohérents: pas d'intrication...

Retour au problème de la mesure d'un **spin** par un **oscillateur** couplé à un **environnement**



Translation du mètre conditionnée à l'état de S (g : « vitesse » de la pré-mesure)

Nous ne décrivons pas ici la réalisation pratique de cet hamiltonien de couplage (voir cours ultérieurs)

Nous supposons que g assez grand pour que l'intrication S-M soit « instantanée » par rapport à l'évolution de l'oscillateur M.

La prémesure prépare l'état

$$[C_0 |s_0\rangle |0\rangle_M + C_1 |s_1\rangle |\alpha\rangle_M] |0\rangle_E$$

On se propose de décrire l'évolution ultérieure du système (couplage de M aux oscillateurs de l'environnement).

*La fuite d'information vers l'environnement constitue la **décohérence**. Sera traitée de façon analytique dans la prochaine leçon.*