

*Physique quantique-17 Janvier 2011*

# Cours 2010-2011: Deuxième Leçon

## La physique de la jonction Josephson

Avant de décrire les qubits supraconducteurs et leurs manipulations, nous analysons dans cette leçon les propriétés essentielles de l'effet Josephson des circuits mésoscopiques. Nous commençons par rappeler quelques aspects importants de la supraconductivité qui nous permettront de modéliser une jonction Josephson et de comprendre les effets Josephson continu et alternatif sur lesquels est basée toute la physique des qubits supraconducteurs.

Nous décrivons deux îles supraconductrices séparées par une barrière isolante comme une induction non-linéaire associée à une capacité, système dont nous étudions la dynamique, d'abord de façon classique, puis quantique. Nous considérons la différence du nombre de particules et la différence de phase de leur fonction d'onde de part et d'autre de la jonction comme les variables quantiques conjuguées d'un système dont la dynamique est celle d'un oscillateur non-linéaire possédant des niveaux d'énergie non équidistants, les deux plus profonds définissant les états d'un qubit.

Nous analysons également l'effet d'un champ magnétique sur un circuit contenant des jonctions, pour comprendre de façon simple le fonctionnement d'un SQUID, dispositif jouant un rôle important dans la détection des qubits supraconducteurs.

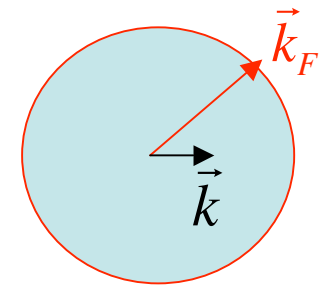
L'analyse développée dans cette leçon est basée sur un modèle simple décrivant un supraconducteur comme un condensat de Bose Einstein de paires d'électrons (paires de Cooper). Cette modélisation nous permet de relier la physique des jonctions Josephson à celle des condensats d'atomes ultra-froids qui a fait l'objet du cours 2006-2007.

II-A

Dynamique d'une jonction Josephson en  
champ nul

# Supraconductivité

La supraconductivité « classique » se manifeste au dessous d'une température critique  $T_c \sim$  quelques °K. Nous nous intéresserons ici au comportement d'un supraconducteur idéal à  $T=0K$ , bonne approximation de la situation des qubits supraconducteurs opérant à  $T \sim 25mK \ll T_c$ . Dans ces conditions, il nous suffit d'analyser l'état fondamental des électrons dans le métal, décrit à  $T=0K$  par la théorie BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer). Dans le modèle simple d'un métal normal à  $T=0K$ , les électrons se comportent comme  $N$  fermions libres, occupant tous les états d'impulsion  $k$  jusqu'à la surface de Fermi.



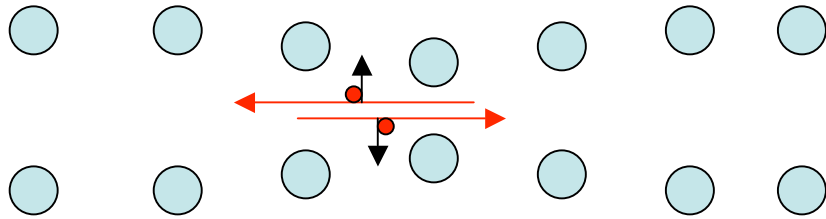
**Métal normal à  $T=0K$ :** tous les états jusqu'à la surface de Fermi  $k=k_F$  sont occupés chacun par deux électrons de spins opposés.

$$\text{Energie de Fermi : } E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad ; \quad k_F \approx \frac{1}{d} \left( d : \text{distance entre électrons} \right)$$

$$\text{densité d'états (par état de spin) : } g(E) = \frac{3N}{4} \frac{E^{1/2}}{E_F^{3/2}} \quad (2-1)$$

Dans un supraconducteur, les électrons s'attirent sous l'effet de la déformation du réseau ionique induite par leur passage. Qualitativement, un électron attire les ions dans son sillage, induisant une vibration du réseau ionique et une déformation transitoire de la densité des charges positives. Cette déformation attire un autre électron, préférentiellement de spin opposé. Il se crée ainsi des « paires de Cooper » d'électrons ayant une petite énergie de liaison  $\Delta$ . Ces paires impliquent effectivement des électrons au voisinage de la surface de Fermi, où les électrons ont l'énergie  $E_F$  de l'ordre de quelques électrons volts. Il s'agit donc de paires ayant une énergie cinétique de l'ordre de  $2E_F$  et une énergie potentielle faiblement attractive. Cette liaison ouvre un « gap » dans la densité d'états électronique qui empêche toute excitation électronique d'énergie inférieure à  $2\Delta$  et confère au système ses propriétés remarquables (supraconductivité, effet Meissner etc...)

# Paire de Cooper



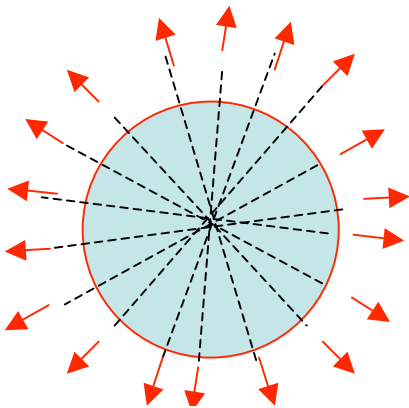
Un électron crée un sillage dans le réseau ionique le long de sa direction de propagation. Ce sillage attire un autre électron, préférentiellement de spin opposé. La fonction d'onde antisymétrique de spin est en effet

associée à une fonction symétrique d'espace qui favorise les configurations où les deux électrons sont au voisinage l'un de l'autre et donc s'attirent le plus fortement sous l'effet de l'interaction transmise par le réseau ionique. L'état de la « première » paire de Cooper formée à partir de l'état électronique normal est un état d'impulsion globale nulle de la forme:

$$|\Psi_C\rangle = \sum_{k > k_F} a_k |\vec{k}, \uparrow; -\vec{k}, \downarrow\rangle \quad (2-2)$$

où la somme porte sur des  $k$  pointant dans toutes les directions (symétrie sphérique d'une onde  $S$ ), avec  $|\vec{k}| > k_F$  car tous les états d'énergie inférieure sont occupés. On montre que l'énergie de cette paire est:

$$E_C = 2E_F - \Delta \quad \text{avec} \quad \Delta \approx k_B T_C \approx 10^{-4} E_F \approx 10^{-4} \text{ à } 10^{-3} \text{ eV} \quad (2-3)$$



L'énergie cinétique de la paire est  $> 2E_F$ , mais cette augmentation est plus que compensée par le potentiel attractif, d'où une énergie de liaison positive. Dans l'espace libre le faible potentiel attractif serait insuffisant pour permettre un état lié. La situation est différente ici car la décomposition de la paire créerait deux électrons dont l'un au moins devrait avoir une énergie inférieure à  $E_F$ , ce qui est impossible car tous ces états sont occupés.

# Nombre effectif de paires de Cooper

Les paires se condensent jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint quand le système a été assez modifié par la condensation pour que l'apparition d'une paire de plus ne soit plus énergétiquement favorable. Cet équilibre est analysé par la théorie BCS. Sans entrer dans les détails, on schématisera la situation comme s'il se créait un **nombre effectif**  $N_C$  de paires, le reste des électrons de la mer de Fermi restant en première approximation non affectés. Pour évaluer  $N_C$ , supposons les paires identiques, considérées comme des bosons indiscernables d'énergie  $2E_F - \Delta$ . Au fur et à mesure que les paires se forment, les électrons restant disponibles pour des paires nouvelles ont une énergie abaissée  $E_F - x$ . Il arrive un moment où l'énergie initiale d'une paire additionnelle devient  $2(E_F - x) = 2E_F - \Delta$  et il n'y a alors plus d'avantage à une liaison. Ceci se produit pour  $x = \Delta/2$ . Cet argument conduit à estimer que  $N_C$  est de l'ordre du nombre de paires d'électrons dans une bande de largeur  $\Delta/2$  à la surface de Fermi soit:

$$N_C = g(E_F) \frac{\Delta}{2} = \frac{3N}{8} \frac{\Delta}{E_F} \approx 10^{-4} N \quad (2-4)$$

l'énergie de condensation totale du système étant à  $T=0K$ :

$$E_s(0) - E_n(0) = -N_C \Delta = -\frac{1}{2} g(E_F) \Delta^2 \quad (2-5)$$

Ce résultat est exactement celui donné par la théorie BCS. On peut donc modéliser un supraconducteur comme un ensemble de  $N_C \sim 10^{-4}N$  paires de Cooper constituant des bosons identiques. Evaluons enfin la taille  $\delta r$  d'une paire. La somme sur  $k$  dans l'expression (2-2) porte sur des valeurs  $k_F \pm \delta k$  associées à une bande d'énergie  $\Delta$ . On en déduit:

$$\frac{\hbar^2 k_F \delta k}{m} \approx \Delta \rightarrow \delta r = \frac{1}{\delta k} \approx \frac{\hbar^2 k_F}{m \Delta} = \frac{2}{k_F} \frac{E_F}{\Delta} \approx 10^4 d \approx 1 \mu m \quad (2-6)$$

Le nombre de paires effectives dans un volume  $V_0 = 1 \mu m^3$  est  $\sim 10^{-4}(V_0/d^3) \sim 10^8$ . Ces paires se recouvrent donc largement spatialement.

# Gaz de paires de Cooper comme condensat de Bose Einstein

L'ensemble des paires d'un volume  $V$  de supraconducteur homogène est décrit comme un condensat de Bose Einstein. La fonction d'onde  $\Psi(r) = |\Psi(r)|e^{i\delta}$  du centre de masse des paires possède, en absence de champ magnétique, une phase uniforme  $\delta$ . La dépendance en  $r$  de  $|\Psi(r)|$  est déterminée par les conditions aux limites définissant le puits de potentiel maintenant les électrons dans le métal. La densité des paires est:

$$N_C / V \approx \frac{\Delta}{E_F} \frac{1}{d^3} \approx 10^8 / \mu m^3 \quad (2-7)$$

Un volume de quelques dizaines de  $\mu m^3$  (correspondant aux circuits mésoscopiques étudiés plus loin) contient  $\sim 10^{10}$  paires effectives, ce nombre n'étant pas bien défini. Appelons  $a$  l'opérateur d'annihilation d'une paire dans l'état  $\psi$ . L'état à  $N$  paires (on omet à présent l'indice  $C$ ) s'écrit dans le formalisme de la seconde quantification, en appelant  $|vide\rangle$  l'état contenant zéro paire:

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} a^{\dagger N} |vide\rangle \quad (2-8)$$

Introduisons également les états cohérents, superpositions Poissonniennes d'états  $|N\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|vide\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |vide\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_N \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \quad (2-9)$$

contenant en moyenne  $N_m = |\alpha|^2$  paires avec une dispersion  $\delta N = \sqrt{N_m} = |\alpha|$ . L'incertitude sur  $N$  conduit à décrire le système par son opérateur densité  $\rho$ , somme de projecteurs  $|N\rangle\langle N|$  ou  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$  (les fonctions  $p(N)$  et  $f(\alpha)$  étant piquées sur  $N=N_m$  et  $|\alpha| = \sqrt{N_m}$  respectivement):

$$\rho = \sum_N p(N) |N\rangle\langle N| = \int d^2\alpha f(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (2-10)$$

# Equation de Ginzburg-Landau

Un argument en faveur de la description bosonique de la supraconductivité vient de la théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau (GL), proposée avant la théorie BCS et justifiée par elle. La théorie GL introduit une pseudo-fonction d'onde  $\psi(r)$ , paramètre d'ordre complexe, qui obéit à une équation différentielle ayant la forme d'une équation de Schrödinger non-linéaire:

$$\alpha_{GL}\psi + \beta_{GL}\psi|\psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} A \right)^2 \psi = 0 \quad (2-11)$$

$A$  est le potentiel vecteur,  $e^*$  et  $m^*$  sont identifiés à  $2e$  et  $2m$ , charge et masse d'une paire de Cooper et  $\alpha_{GL}$  et  $\beta_{GL}$  sont des paramètres dépendant de  $T$  et des caractéristiques du supraconducteur. En champ nul ( $A=0$ ), cette équation présente une analogie frappante avec l'équation de Gross-Pitaevskii décrivant l'évolution de la fonction d'onde macroscopique d'un condensat de Bose-Einstein atomique piégé dans un potentiel  $V_{\text{trap}}$ :

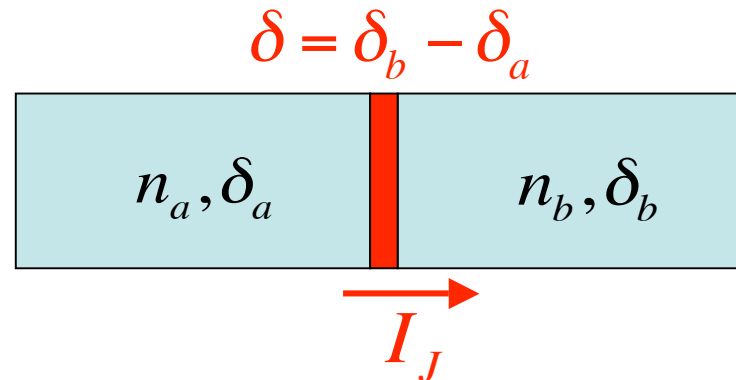
$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V_{\text{trap}} \psi + \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} |\psi|^2 \psi \quad (2-12)$$

$a_s$  est alors la longueur de diffusion caractérisant l'interaction entre les atomes. Le terme non linéaire dans ces équations est dû aux interactions entre bosons. Elles sont toujours répulsives pour les paires de Cooper ( $\beta_{GL} > 0$ ), répulsives ou attractives suivant le signe de  $a_s$  pour des atomes. Un terme non-linéaire positif favorise des fonctions  $\psi$  tendant à occuper tout l'espace aussi uniformément que possible. Dans le cas de bosons atomiques, les interactions entre atomes correspondent en seconde quantification à une contribution énergétique:

$$E_{\text{interaction}} = \frac{\hbar U}{2} \hat{N}(\hat{N} - 1) \quad ; \quad \hat{N} = a^\dagger a \quad (2-13)$$

où  $U$  dépend de  $a_s$  et des paramètres géométriques du piège contenant le condensat. Dans le modèle des paires de Cooper effectives, le  $U$  équivalent doit correspondre à une énergie au plus de l'ordre de l'énergie des paires soit  $\hbar U N^2 \sim N\Delta$  ou encore  $U \sim \Delta/\hbar\kappa$ .

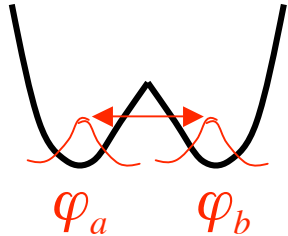
# Description d'une jonction supraconductrice



Une jonction Josephson est réalisée par deux supraconducteurs séparés par une barrière isolante de quelques nanomètres d'épaisseur à travers laquelle les paires de Cooper passent par effet tunnel. Les deux côtés de la jonction sont caractérisés par leur nombre de paires de Cooper  $n_a, n_b$  et leurs phases  $\delta_a, \delta_b$ . Les différences de charge  $n_a - n_b$  et de phase  $\delta = \delta_b - \delta_a$  entre les deux métaux sont les paramètres essentiels décrivant le comportement de la jonction. B. Josephson a montré en 1962 que pour une telle jonction dite « faible », un courant  $I_J = I_0 \sin \delta$  circule sans tension appliquée à travers la barrière si  $\delta$  est constant et qu'un courant alternatif de fréquence  $\nu = 2eV/h$  oscille dans la jonction s'il existe à ses bornes une tension  $V$ . Nous allons interpréter ces effets Josephson continu et alternatif en utilisant un modèle bosonique à deux états, analogue à celui que nous avons déjà analysé pour étudier le comportement d'un condensat atomique bimodal (cours 2006-2007) dont nous commençons par rappeler la physique.



# Rappel sur un condensat atomique dans un double puits



Considérons  $N$  atomes bosoniques répartis entre 2 puits identiques séparés par une barrière. La fonction d'onde normalisée de ces bosons s'écrit:

$$|\psi(t)\rangle = \eta_a(t)e^{i\delta_a(t)}|\varphi_a\rangle + \eta_b(t)e^{i\delta_b(t)}|\varphi_b\rangle \quad ; \quad \eta_a = \sqrt{\frac{n_a}{N}} \quad ; \quad \eta_b = \sqrt{\frac{n_b}{N}} \quad (2-14)$$

où les  $|\varphi_i\rangle$  ( $i=a,b$ ) sont les états propres de l'état fondamental dans chaque puits. Passons en seconde quantification en appelant  $a$  et  $b$  les opérateurs d'annihilation d'un boson dans les puits  $a$  et  $b$  et  $a_\psi$  l'opérateur combinaison linéaire:

$$a_\psi = \sqrt{\frac{n_a}{N}}e^{-i\delta_a}a + \sqrt{\frac{n_b}{N}}e^{-i\delta_b}b \quad (2-15)$$

L'état des  $N$  bosons s'écrit alors:

$$|N_\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}a_\psi^{\dagger N}|vide\rangle \quad (2-16a); \quad n_a = \langle N_\psi|a^\dagger a|N_\psi\rangle, \quad n_b = \langle N_\psi|b^\dagger b|N_\psi\rangle \quad (2-16b)$$

Les réels  $n_i$  ( $i=a,b$ ) satisfaisant  $n_a+n_b=N$  sont les valeurs moyennes du nombre de bosons de chaque côté à l'instant  $t$ . Ce sont des quantités classiques, tout comme les phases  $\delta_i$ . Pour un  $N$  total fixé, les opérateurs nombres  $N_a=a^\dagger a$  et  $N_b=b^\dagger b$  présentent des fluctuations autour de leurs valeurs moyennes, que l'on calcule en développant l'équation (2-16a) compte tenu de (2-15) suivant la formule du binôme. On obtient:

$$\Delta^2 N_i = \langle (N_i - n_i)^2 \rangle = \frac{n_a n_b}{N} \quad (2-17)$$

# Double condensat de Bose-Einstein (suite)

La différence de phase  $\delta = \delta_b - \delta_a$  entre les deux puits présente également des fluctuations reliées à celles de  $N_i$  par la relation d'incertitude:

$$\Delta N_i \cdot \Delta \delta = \frac{1}{2} \quad (2-18)$$

Pour montrer de façon simple que  $\delta$  est définie à  $\Delta \delta$  près, calculons le produit scalaire de deux états  $|N_{\psi}\rangle$  et  $|N_{\psi'}\rangle$  dont les phases  $\delta$  et  $\delta'$  sont légèrement différentes:

$$\langle N_{\psi'} | N_{\psi} \rangle = \sum_{q=0}^N \binom{N}{q} \left(\frac{n_a}{N}\right)^{N-q} \left(\frac{n_b}{N}\right)^q e^{iq(\delta-\delta')} = \sum_{q=0}^N F(q) e^{iq(\delta-\delta')} \quad (2-19)$$

La fonction  $F(q)$  a une largeur en  $q$  égale à  $\Delta N_i$ . Le produit scalaire  $\langle N_{\psi'} | N_{\psi} \rangle$  est la transformée de Fourier de  $F(q)$  pour la valeur  $\delta - \delta'$ . Cette fonction symétrique de  $\delta - \delta'$  admet un maximum égal à 1 pour  $\delta - \delta' = 0$  avec une largeur  $\Delta \delta \sim 1/2\Delta N_i$ . En d'autres termes, deux états ne sont physiquement distinguables que si leur différence de phase excède la quantité  $\Delta \delta = 1/2\Delta N_i$  égale à  $1/\sqrt{N}$  pour  $n_a \sim n_b \sim N/2$ . Cette relation de conjugaison entre les incertitudes de la phase et celles du nombre de particules dans les deux puits jouera comme nous le verrons plus loin un rôle essentiel dans la physique d'une jonction Josephson.

# Dynamique d'un double condensat atomique

La dynamique du double condensat est déterminée par son Hamiltonien, en seconde quantification:

$$H = E_0 (a^\dagger a + b^\dagger b) - \hbar \frac{J}{2} (a^\dagger b + ab^\dagger) + \hbar \frac{U}{2} [N_a (N_a - 1) + N_b (N_b - 1)] \quad (2-20)$$

Le premier terme décrit l'énergie des particules dans les deux puits identiques (on peut choisir l'origine des énergies en faisant  $E_0=0$ ). Le 2<sup>nd</sup> terme décrit l'effet tunnel (caractérisé par la fréquence  $J$ ) et le 3<sup>ème</sup> décrit l'interaction des bosons à l'intérieur de chacun des deux puits. Les équations de Heisenberg décrivant l'évolution des opérateurs  $a$  et  $b$  sont alors:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da}{dt} &= [a, H] = E_0 a - \hbar \frac{J}{2} b + \hbar U N_a a \\ i\hbar \frac{db}{dt} &= [b, H] = E_0 b - \hbar \frac{J}{2} a + \hbar U N_b b \end{aligned} \quad (2-21)$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous allons évaluer la moyenne des opérateurs dans l'état du système des  $N$  bosons. Nous avons jusqu'à présent considéré que ce système était dans un état de Fock à nombre de particules fixé. Ce nombre est en fait fluctuant. Dans le cas d'atomes bosoniques, la fraction dans l'état fondamental des puits n'est pas de 100% et il existe un réservoir d'atomes non condensés. Dans le modèle des paires de Cooper effectives, il est également naturel de considérer que  $N$  présente des fluctuations puisque le nombre total d'électrons est beaucoup plus grand que  $N$ . Il est donc toujours possible de décrire le système sur une base d'états cohérents, étant entendu qu'il faut faire à la fin des calculs une moyenne sur des projecteurs associés à des états cohérents de phase répartie entre 0 et  $2\pi$ . Utiliser la base des états cohérents va s'avérer pratique pour résoudre les équations (2-21).

# Dynamique d'un double condensat (suite)

L'état cohérent d'amplitude  $\alpha$  associé à  $a_\psi$  s'écrit:

$$|\alpha\rangle_\psi = e^{\alpha a_\psi^\dagger - \alpha^* a_\psi} |vide\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a_\psi^\dagger} |vide\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\left(\alpha \sqrt{\frac{n_a}{N}} e^{i\delta_a} a^\dagger + \alpha \sqrt{\frac{n_b}{N}} e^{i\delta_b} b^\dagger\right)} |vide\rangle \quad (2-22)$$

Comme a et b commutent, on factorise l'exponentielle de (2-22) et l'état cohérent ayant en moyenne N bosons s'écrit comme produit d'états cohérents associés aux parties a et b:

$$|\alpha = \sqrt{N}\rangle_\psi = |\alpha_1 = \sqrt{n_a} e^{i\delta_a}\rangle_a \otimes |\alpha_2 = \sqrt{n_b} e^{i\delta_b}\rangle_b \quad (2-23)$$

Prendre la moyenne dans cet état des deux membres des équations (2-21) revient simplement à remplacer les opérateurs a et b par les amplitudes complexes des deux états cohérents:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d(\sqrt{n_a} e^{i\delta_a})}{dt} &= E_0 \sqrt{n_a} e^{i\delta_a} - \hbar \frac{J}{2} \sqrt{n_b} e^{i\delta_b} + \hbar U n_a \sqrt{n_a} e^{i\delta_a} \\ i\hbar \frac{d(\sqrt{n_b} e^{i\delta_b})}{dt} &= E_0 \sqrt{n_b} e^{i\delta_b} - \hbar \frac{J}{2} \sqrt{n_a} e^{i\delta_a} + \hbar U n_b \sqrt{n_b} e^{i\delta_b} \end{aligned} \quad (2-24)$$

Soit en séparant les parties imaginaire et réelle et en posant  $\delta = \delta_b - \delta_a$ :

$$\frac{dn_a}{dt} = -\frac{dn_b}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(n_a - n_b)}{dt} = -J \sqrt{n_a n_b} \sin \delta \quad ; \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{J}{2} \frac{n_a - n_b}{\sqrt{n_a n_b}} \cos \delta + U(n_a - n_b) \quad (2-25)$$

et en changeant de variables:

$$n = \frac{n_a - n_b}{2} \quad \rightarrow \quad n_a = \frac{N}{2} + n ; n_b = \frac{N}{2} - n \quad (2-26)$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{J}{2} \sqrt{N^2 - 4n^2} \sin \delta \quad (2-27a) \quad ; \quad \frac{d\delta}{dt} = J \frac{2n}{\sqrt{N^2 - 4n^2}} \cos \delta + 2Un \quad (2-27b)$$

# Hamiltonien effectif du double condensat

Les équations couplées (2-27 a & b) permettent de définir un Hamiltonien effectif classique:

$$H_0 = -\frac{\hbar J}{2} \sqrt{N^2 - 4n^2} \cos \delta + \hbar U n^2 \quad (2-28)$$

On vérifie que les équations de Hamilton correspondantes:

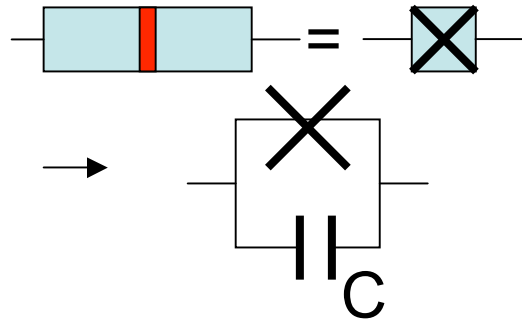
$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial H_0}{\partial \delta} \quad (2-29a) \quad ; \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H_0}{\partial n} \quad (2-29b)$$

redonnent bien les équations d'évolution (2-27a) et (2-27b). Le fait que  $n$  et  $\delta$ , qui présentent des fluctuations reliées par une relation d'incertitude (voir plus haut) apparaissent dans  $H_0$  comme des variables canoniquement conjuguées nous incitera à considérer  $H_0$  comme la version classique d'un Hamiltonien quantique régissant l'évolution d'opérateurs  $n_Q$  et  $\delta_Q$  satisfaisant la relation de commutation  $[n_Q, \delta_Q] = i$ . Nous revenons sur ce point plus loin. Nous avons vu dans le cours de l'année 2007-2008 (3ème leçon) le sens que l'on peut donner à un opérateur de phase.

Le 1<sup>er</sup> terme de  $H_0$  est un terme d'effet tunnel associé au saut des particules à travers la barrière. La première équation de Hamilton (2-29a) décrit l'effet Josephson continu. Elle exprime en effet que le courant de particules qui circule à travers la barrière est proportionnel à  $\sin \delta$ . Le 2<sup>nd</sup> terme de  $H_0$ , quadratique en  $n$ , décrit l'effet différentiel des interactions entre particules dans chacun des deux puits. Il exprime le fait que les bosons se repoussent dans chaque puits en cherchant à occuper la fonction d'onde la plus étendue possible. Nous allons voir maintenant comment on doit adapter ce modèle bosonique simple pour décrire le comportement des paires de Cooper de charge  $2e$  dans une jonction Josephson supraconductrice.

# Hamiltonien effectif des paires de Cooper dans une jonction Josephson

La différence essentielle entre bosons atomiques et paires de Cooper est que ces dernières sont chargées. Il en résulte un terme important d'interaction entre bosons dans les états a et b qui est absent dans le cas atomique et qui domine largement le terme d'interaction intra-puits que nous avons considéré plus haut.



Cette interaction inter-puits correspond à un effet capacitif. La barrière entre les deux îles de la JJ correspond en effet à une capacité  $C$  qui se charge lorsque des paires passent d'un côté à l'autre, contribuant à l'énergie du système par un terme de polarisation électrique. Pour fixer les idées, l'ordre de grandeur de  $C$  correspondant à deux électrodes de  $10\mu\text{m}^2$  de surface séparées par 1 nm est  $\sim 10^{-13}\text{F}$ . En pratique, nous considérerons des jonctions avec  $C$  compris entre  $10^{-12}$  et  $10^{-15}\text{F}$ . On modélise la jonction, symbolisée par une croix dans une boîte, comme une

jonction intrinsèque (croix) en parallèle avec  $C$ . Appelons  $Q_a$  et  $Q_b$  les charges des deux côtés de la JJ à l'exclusion des paires et supposons la jonction globalement neutre:

$$2eN + Q_a + Q_b = 0 \quad (2-30)$$

Les charges totales des deux puits sont  $2e(N/2 + n) + Q_a$  et  $2e(N/2 - n) + Q_b$ . La capacité est déchargée quand ces charges sont nulles, c.à.d quand  $n$  est égal à  $n_0$ :

$$n_0 = \frac{Q_b - Q_a}{4e} \quad (2-31)$$

# Hamiltonien effectif des paires de Cooper dans une jonction Josephson (suite)

Le potentiel aux bornes de  $C$  est  $V_C = 2e(n-n_0)/C$  et l'énergie électrostatique associée est  $(1/2)2e(n-n_0)V_C = 2e^2(n-n_0)^2/C$ . Le facteur  $1/2$  est classique quand on détermine l'énergie d'une distribution de charges dans le potentiel qu'elle crée. En ajoutant ce terme au Hamiltonien (2-28) et en négligeant le terme en  $U$  (voir plus loin) on obtient:

$$H_0 = -\frac{\hbar J}{2} \sqrt{N^2 - 4n^2} \cos \delta + \frac{2e^2}{C} (n - n_0)^2 \quad (2-32)$$

Pour les jonctions que nous étudierons,  $C$  est de l'ordre de  $10^{-12}$  à  $10^{-15}$  F et l'énergie de polarisation associée à une paire est  $2e^2/C \sim 10^{-4}$  à  $10^{-7}$  eV. Le terme en  $U$  associé à la non-linéarité de l'équation de  $GZ$  ajouterait une autre contribution en  $n^2$  à l'énergie qui pour  $n=1$  est de l'ordre de  $\Delta/N$  soit  $\sim 10^{-13}$  à  $10^{-14}$  eV. Il s'agit bien d'une toute petite correction, qui revient à renormaliser légèrement la capacité de la jonction.

Le modèle présenté ici n'est valable que pour des  $n$  très petits. On se restreint en effet au cas où la tension de charge  $2en/C$  est inférieure à la tension critique  $\Delta/e$  qui fait transiter le supraconducteur soit  $n < \Delta C/2e^2 \sim 1$  à  $10^3$  pour  $\Delta = 10^{-4}$  eV et  $C = 10^{-15}$  F à  $10^{-12}$  F. On a donc toujours  $n/N \ll 1$  et l'on peut négliger  $n$  devant  $N$  dans le premier terme au membre de droite de (2-32). On fait enfin le changement de variable  $p = n - n_0$ , on pose  $I_0 = eJN$  et on obtient le Hamiltonien effectif de la jonction JJ en circuit ouvert:

$$H_J = \frac{2e^2 p^2}{C} - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos \delta \quad (2-33)$$

# Manifestation des effets Josephson dc et ac dans la dynamique de la jonction

Les deux équations de Hamilton qui dérivent de (2-33) expriment les effets Josephson dc et ac dans la dynamique de la jonction en circuit ouvert. La première donne en effet:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial H_J}{\partial \delta} = -\frac{I_0}{2e} \sin \delta \quad \rightarrow \quad i = -2e \frac{dp}{dt} = I_0 \sin \delta \quad (2-34)$$

$I_0 = eJN$  est le courant critique de la jonction, qui dépend de ses paramètres physiques (typiquement  $10\mu\text{A}$  pour les JJ que nous étudierons). Si l'on impose à la JJ un courant qui dépasse  $I_0$ , l'état supraconducteur ne peut se maintenir, la jonction transite vers un état normal résistif et il apparaît une différence de potentiel associée au courant. La détection de cette transition entre phases supraconductrice et normale est exploitée dans de nombreux dispositifs utilisant des jonctions supraconductrices (SQUIDS, voir plus loin).

Pour une jonction typique de quelques  $\mu\text{m}^2$  de section reliant deux îles de quelques dizaines de  $\mu\text{m}^3$ ,  $I_0 \sim 10\mu\text{A}$  et  $N \sim 10^{10}$ . D'où l'ordre de grandeur de  $J$  dans notre modèle:

$$J = \frac{I_0}{eN} \approx 10^4 \text{ s}^{-1}$$

La seconde équation de Hamilton donne:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H_J}{\partial p} = \frac{4e^2 p}{\hbar C}$$

La vitesse instantanée de variation de la phase est égale à  $(2e/\hbar)$  fois la tension entre les deux bornes de la jonction: **c'est l'effet Josephson alternatif.**



# Jonction Josephson en circuit ouvert comme résonateur non-linéaire

L'expression de  $H_J$  fait apparaître 2 paramètres énergétiques caractérisant la JJ:

$$H_J = \frac{2e^2 p^2}{C} - \frac{\hbar I_0}{2e} \cos \delta = E_C p^2 - E_J \cos \delta \quad ;$$

$E_C$  est l'énergie de polarisation de  $C$  chargé par une paire de Cooper. Pour interpréter  $E_J$  introduisons l'inductance non linéaire  $L$  de la JJ définie par la relation générale:

$$V = L \frac{dI_J}{dt} \quad (2-37)$$

En utilisant les deux formules de Josephson, on en déduit l'expression de  $L$ :

$$V = L \frac{dI_J}{dt} = LI_0 \cos \delta \frac{d\delta}{dt}$$

La JJ se comporte intrinsèquement comme une inductance dépendant de façon non-linéaire de la phase. Pour  $\delta=0$ , elle vaut:

$$L_0 = \frac{\hbar}{2eI_0} \quad (2-39)$$

L'énergie magnétique de  $L_0$  parcourue par un courant  $I_0$  est:

$$\frac{L_0 I_0^2}{2} = \frac{\hbar I_0}{4e} = \frac{E_J}{2} \quad (2-40)$$

$E_J$  est le double de l'énergie magnétique d'une inductance égale à celle de la JJ pour  $\delta=0$ , lorsqu'elle est parcourue par le courant critique  $I_0$ .

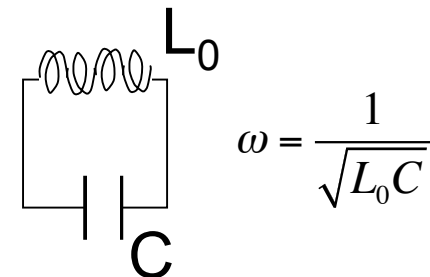
# Jonction Josephson en circuit ouvert comme résonateur non-linéaire (suite)

Nous allons voir maintenant comment les effets Josephson dc et ac exprimés par les équations (2-34) et (2-35) conduisent à une dynamique d'oscillation pour la JJ. L'effet physique est simple: l'existence d'une différence de phase  $\delta$  entraîne un courant à travers la JJ (effet Josephson dc). Celui-ci induit un déséquilibre de charge qui fait apparaître par effet capacitif une différence de potentiel, laquelle produit par effet Josephson ac une variation de  $\delta$ . Il se bâtit une dynamique entraînant une oscillation couplée de la charge et de la phase. La jonction apparaît ainsi comme un circuit LC non-linéaire. Pour obtenir l'équation de l'évolution de  $\delta$ , dérivons une deuxième fois le second membre de l'équation (2-35):

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{4e^2}{\hbar C} \frac{dp}{dt} = -\frac{2eI_0}{\hbar C} \sin\delta \quad (2-41)$$

La phase obéit à une équation pendulaire dont les petites oscillations sont harmoniques (obtenues en remplaçant  $\sin\delta$  par  $\delta$ ), de fréquence angulaire:

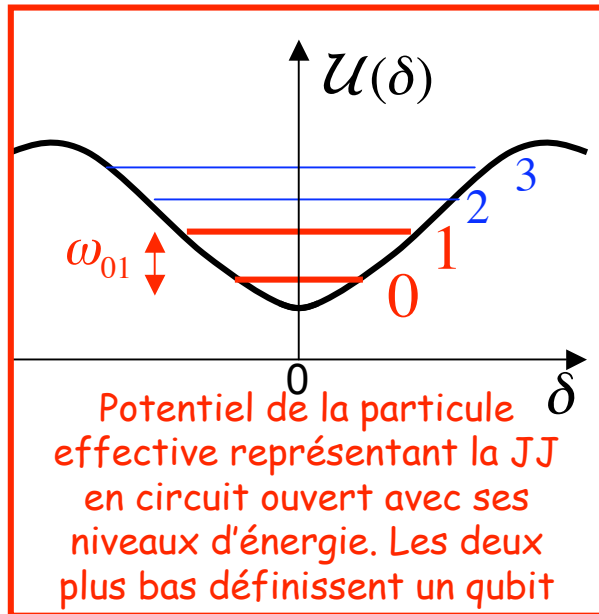
$$\omega_J = \sqrt{\frac{2eI_0}{\hbar C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} \quad (2-42)$$



A l'approximation des petits  $\delta$ , la JJ se comporte comme un résonateur LC linéaire (voir figure).

# Jonction Josephson comme résonateur quantique non-linéaire

La fréquence  $\nu_J = \omega_J / 2\pi$  dépend de  $I_0$  et de  $C$ . Pour le type de qubits que nous étudierons essentiellement dans la suite, ces paramètres valent typiquement  $10 \mu A$  et  $1pF$ . On a donc l'ordre de grandeur:



$$\nu_J = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2eI_0}{\hbar C}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^{-5}}{10^{-34} \times 10^{-12}}} \approx 30 GHz$$

Considérons maintenant  $\delta$  et  $p$  comme des opérateurs quantiques. L'oscillateur non-linéaire possède des niveaux discrets dans le puits en  $\cos\delta$ . A cause de la non-linéarité (différence entre la fonction  $\cos\delta$  et son approximation au second ordre au voisinage de  $\delta = 0$ ), les niveaux d'énergie ne sont pas exactement équidistants, ce qui permet à l'aide d'excitations micro-ondes de ne

manipuler que les deux premiers sans exciter les niveaux d'énergie supérieure. On peut définir ainsi un qubit à 2 niveaux dont la fréquence  $\omega_{01}$  est proche de  $\omega_J$ . En fait, ce *qubit en circuit ouvert* n'est pas pratique car non contrôlable. Nous verrons qu'en le couplant à des circuits extérieurs, on peut aisément le manipuler et le mesurer. Ce couplage modifie le puits de potentiel et change la fréquence du qubit, qui devient 5 à 10 fois plus petite. Avant d'aborder l'étude de circuits pratiques, il est instructif d'évaluer les fluctuations de  $p$  et  $\delta$  dans ce système très simple.

# Les fluctuations de la Jonction Josephson

Evaluons en fonction de  $E_J$  et  $E_C$  la fréquence de la JJ et les variances de  $p$  et de  $\delta$  dans son état fondamental en circuit ouvert. On les obtient en exprimant la relation d'incertitude entre  $p$  et  $\delta$  et en identifiant à  $\hbar\omega_{01}/4$  la valeur moyenne des deux termes de  $H_J$  (équipartition de l'énergie cinétique et potentielle dans un potentiel quasi-harmonique):

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle \langle \delta^2 \rangle &= \frac{1}{4} \quad ; \quad E_C \langle p^2 \rangle = \frac{E_J}{2} \langle \delta^2 \rangle = \frac{\hbar\omega_{01}}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{\langle p^2 \rangle}{\langle \delta^2 \rangle} = \frac{E_J}{2E_C} \\ \rightarrow \langle \delta^2 \rangle &= \sqrt{\frac{E_C}{2E_J}} \quad ; \quad \langle p^2 \rangle = \sqrt{\frac{E_J}{8E_C}} \quad ; \quad \hbar\omega_{01} \approx \sqrt{2E_J E_C} \end{aligned} \quad (2-43)$$

Suivant le rapport  $E_J/E_C$ , on a donc deux situations limites:

Si  $E_J/E_C \gg 1$  (énergie inductive de la JJ dominante): la variance de la charge  $4e^2 \langle p^2 \rangle$  est grande et celle de la phase petite: la phase est bien définie et la charge est diffuse.

Si  $E_J/E_C \ll 1$  (énergie capacitive de la JJ dominante), c'est au contraire la phase qui fluctue beaucoup et la charge de la jonction qui est bien définie.

Nous verrons dans la suite des exemples de ces deux situations et de situations intermédiaires.

# Comparaison avec la dynamique d'un double condensat atomique (voir leçon 3 de 2006-2007)

Revenons sur la comparaison entre une JJ en circuit ouvert et un condensat de Bose Einstein atomique oscillant entre deux puits symétriques séparés par une barrière. L'équation (3-52) du cours 2006-2007 donnait la fréquence angulaire ( $U$  était appelé  $g$  dans les notes 2006-2007):

$$\omega_J = J \sqrt{1 + \frac{NU}{J}}$$

L'analogie avec l'effet Josephson des paires de Cooper est claire. Le hamiltonien a la même structure (somme de termes en  $n^2$  et en  $\cos\delta$ ). Noter que le terme en  $n^2$  a une origine physique différente dans les deux cas. Dans le cas des paires de Cooper, il est d'origine capacitive et est toujours positif. Son minimum correspond à une répartition des paires neutralisant les charges des deux côtés de la JJ. Le terme en  $n^2$ , beaucoup plus petit pour les atomes, correspond à des interactions intra-puits. Il est positif ou négatif suivant que les atomes se repoussent ou s'attirent. Dans le 1<sup>er</sup> cas, son minimum correspond à l'égalisation des populations des deux puits, minimisant la répulsion moyenne entre atomes. Dans le cas  $U < 0$ , le terme en  $n^2$  négatif favorise les situations où toutes les particules se localisent dans un des deux puits et conduit à des situations de type chat de Schrödinger  $|0, N\rangle + |N, 0\rangle$  qui n'existent pas avec les paires de Cooper. La JJ est donc équivalente à un double condensat avec interactions répulsives définies par le paramètre  $U = 2e^2/\hbar C$ . La fréquence d'oscillation, égale à  $\sim (NUJ)^{1/2}$  pour  $NU \gg J$ , correspond bien à celle donnée par l'équ. (2-42) en remplaçant  $U$  et  $J$  par  $2e^2/\hbar C$  et  $I_0/Ne$  respectivement.

## II-B

Jonctions Josephson dans un champ  
magnétique:  
quantification du flux et SQUID

# Effets magnétiques: quantification du flux

Terminons cette introduction à la supraconductivité des circuits mésoscopiques par la description simple des effets magnétiques. La phase  $\delta$  de la fonction d'onde des paires de Cooper n'est constante dans un petit circuit qu'en champ nul. En présence d'un champ  $B$  dérivant d'un potentiel vecteur  $A(\mathbf{r})$  il apparaît dans la phase de la fonction d'onde un terme de jauge qui la met sous la forme:

$$\psi \propto \exp\left[-2ie\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{r} / \hbar\right] \quad (2-44)$$

On écrit alors la variation de phase entre deux points comme:

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{2e}{\hbar} \int_1^2 \vec{A}\cdot d\vec{l} \quad (2-45)$$

Dans le cas d'une boucle supraconductrice fermée, l'unicité de la phase impose:

$$\frac{2e}{\hbar} \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = 2q\pi \quad (q \text{ entier}) \quad (2-46)$$

impliquant, d'après la relation de Stokes, la quantification du flux dans la boucle:

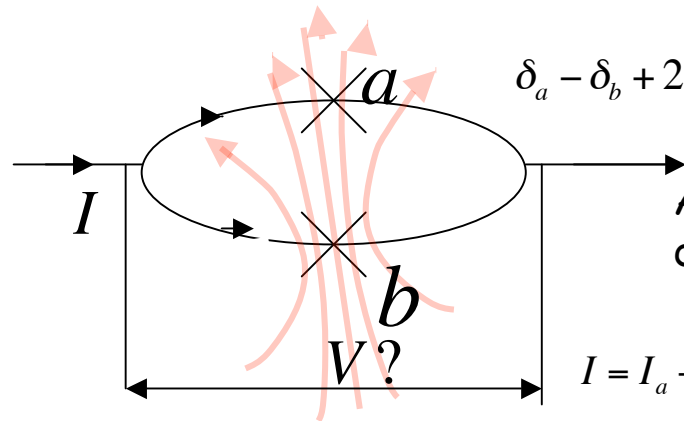
$$\Phi = q\Phi_0 \quad ; \quad \Phi = \int \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{\Sigma} = \text{flux magnétique à travers la boucle} \quad ;$$
$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = \text{quantum de flux} = 2,067 \cdot 10^{-15} \text{ Weber} \quad (2-47)$$

Le courant supraconducteur généré par induction s'ajuste pour compenser partiellement le flux incident afin que le flux total satisfasse la relation (2-47). Si la boucle fermée inclut une jonction, la condition de quantification fixe le saut de phase de la JJ:

$$\frac{2e}{\hbar} \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = \delta \quad (2-48)$$

# Le SQUID: interféromètre supraconducteur détecteur de flux magnétiques faibles

Une boucle supraconductrice avec deux jonctions Josephson a et b est traversée par un flux magnétique  $\Phi$  à mesurer. La phase doit reprendre la même valeur après un tour, soit en appelant  $\delta_a$  et  $\delta_b$  les sauts de phase des deux jonctions et en supposant la self-induction du circuit négligeable:



$$\delta_a - \delta_b + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 0 \quad (2\pi) \rightarrow \delta_a = \delta_0 + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad ; \quad \delta_b = \delta_0 - \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (2-49)$$

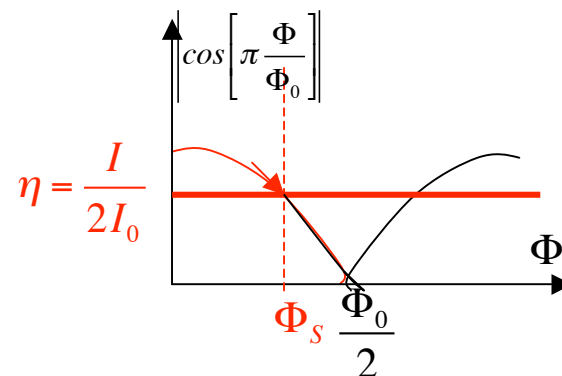
Alimenté à  $I$  constant, le circuit doit satisfaire l'équation qui décrit l'interférence entre deux courants de Josephson:

$$I = I_a + I_b = I_0 \sin\left(\delta_0 + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) + I_0 \sin\left(\delta_0 - \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = 2I_0 \sin \delta_0 \cos \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (2-50)$$

Fixons  $I$  à une valeur  $I = 2\eta I_0$  avec  $\eta < 1$ . Le dispositif fonctionne en régime supraconducteur s'il existe une valeur de  $\delta_0$  satisfaisant (2-50), ce qui implique  $|\cos(\pi\Phi/\Phi_0)| > \eta$ . Dès que  $\Phi$  dépasse le seuil:

$$\Phi_s = \frac{\Phi_0}{\pi} \text{Arc cos } \eta \quad (2-51)$$

le SQUID transite vers l'état normal et il apparaît une tension  $V$  aux bornes de la boucle. Ce pic de tension permet donc de détecter une petite variation de flux très inférieure à  $\Phi_0$  si le point de fonctionnement de l'interféromètre est bien ajusté.





# Conditions pour réaliser un qubit supraconducteur

Nous avons décrit une JJ comme un système quantique. Ses variables  $p$  et  $\delta$ , définies comme des quantités macroscopiques impliquant un très grand nombre de particules, sont associées à des opérateurs non commutant, obéissant à une équation d'évolution dérivant d'un Hamiltonien quantique. Les états de ce système possèdent des énergies discrètes et il est en principe possible d'isoler la transition entre l'état fondamental  $|0\rangle$  et le premier état excité  $|1\rangle$ , non dégénérée en raison de la non-linéarité de la JJ, avec les transitions conduisant aux autres états. En se limitant à exciter la transition  $0 \rightarrow 1$  à l'aide de micro-ondes résonnantes, on peut forcer le système à n'évoluer que dans le sous espace 0-1, réalisant ainsi un qubit.

Pour disposer d'un système opérationnel, il faut inclure une (ou plusieurs JJ) dans un circuit électrique afin de pouvoir réaliser les opérations suivantes:

- accord de la fréquence du qubit
- couplage du qubit à des champs microonde pour manipuler son état
- couplage de qubits entre eux ou avec un résonateur micro-onde quantique pour réaliser des portes quantiques
- Détection du qubit à l'aide d'un dispositif sélectif de son état

Nous allons dans **la leçon 3** décrire quelques dispositifs permettant de réaliser ces fonctions essentielles pour le traitement quantique de l'information.

# Conclusion de la deuxième leçon

Les variables macroscopiques que sont la charge et la phase d'un circuit contenant une jonction Josephson se comportent comme des observables quantiques conjuguées, ce qui n'est pas évident a priori. Au delà des analyses théoriques, ce résultat remarquable n'est *in fine* justifié que par les expériences qui seront décrites à partir de la semaine prochaine. J'ai tenté de donner dans cette leçon une justification qualitative du caractère quantique de ce système basée sur une analogie entre paires de Cooper et bosons atomiques.

En me limitant à une description à  $T=0K$ , j'ai évité d'introduire dans la discussion des concepts de nature thermodynamique (énergie libre, potentiel chimique etc.), indispensables à la description de la supraconductivité à température finie. J'ai aussi essayé d'interpréter les effets Josephson à partir d'une approche microscopique, alors qu'ils sont d'habitude justifiés de façon plus fondamentale par un raisonnement basé sur les propriétés du paramètre d'ordre de l'équation de Ginzburg-Landau.

Je montrerai la semaine prochaine comment la description simple d'une JJ isolée doit être modifiée pour tenir compte de son couplage à un circuit extérieur, nécessaire à la manipulation et à la mesure d'un qubit. Pour établir le hamiltonien décrivant un circuit contenant des jonctions JJ, des capacités et des inductances, je me baserai sur une analyse intuitive basée sur les équations des circuits électriques et sur celles de l'effet Josephson. Une théorie plus systématique des circuits quantiques est présentée dans certaines des références données à la fin de la leçon 1 (en particulier le cours de M. Devoret). Il faudra également tenir compte des effets dissipatifs responsables de la décohérence des qubits supraconducteurs. Nous le ferons au début de la leçon 4 en décrivant des modèles simples prenant en compte des résistances associées aux circuits de couplage des qubits à leur environnement.