

Fondements cognitifs de l'arithmétique élémentaire

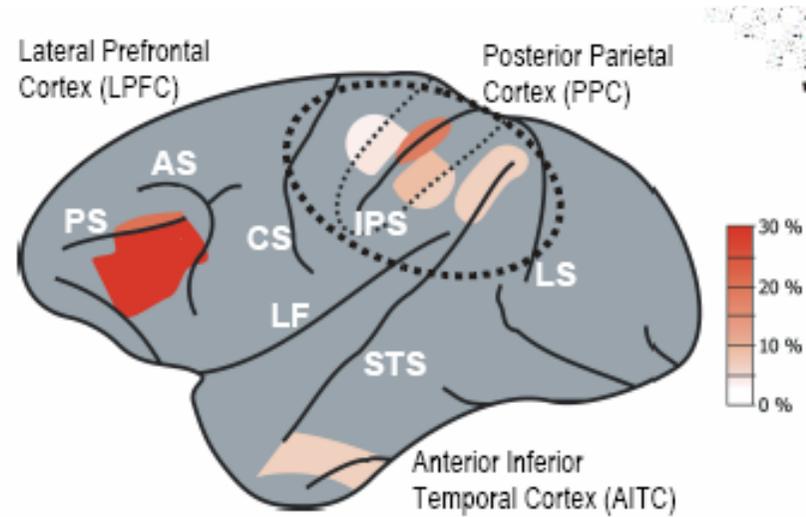
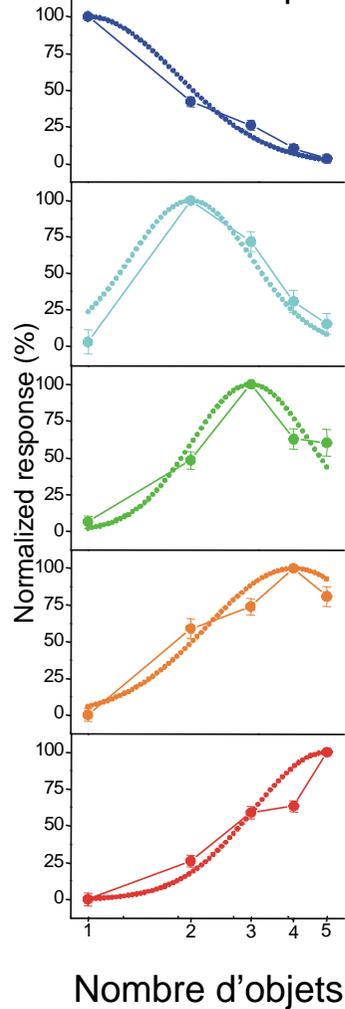
Stanislas Dehaene  
Chaire de Psychologie Cognitive Expérimentale

Cinquième Cours

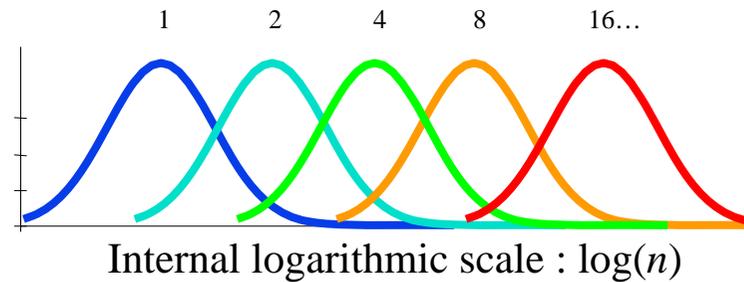
**L'impact des symboles  
sur la cognition numérique**

# Codage « log-gaussien » des nombres par une population de neurones chez le singe macaque

Courbes de réponse  
de neurones uniques



Modèle Log-Gaussien: chaque neurone  
possède une courbe d'accord gaussienne sur  
une échelle logarithmique



# Apprentissage de symboles numériques chez l'animal

**Le chimpanzé « Ai » de Tetsuro  
Matsuzawa (1985, 2005)**



L'apprentissage des symboles permet des jugements rapides et précis.

Il « libère » également l'animal de la contingence immédiate de la quantité.

[Boysen, S. T., & Berntson, G. G. (1995). Responses to quantity: perceptual versus cognitive mechanisms in chimpanzees (*Pan troglodytes*). *J Exp Psychol Anim Behav Process*, 21(1), 82-86.]

# Le modèle du triple code

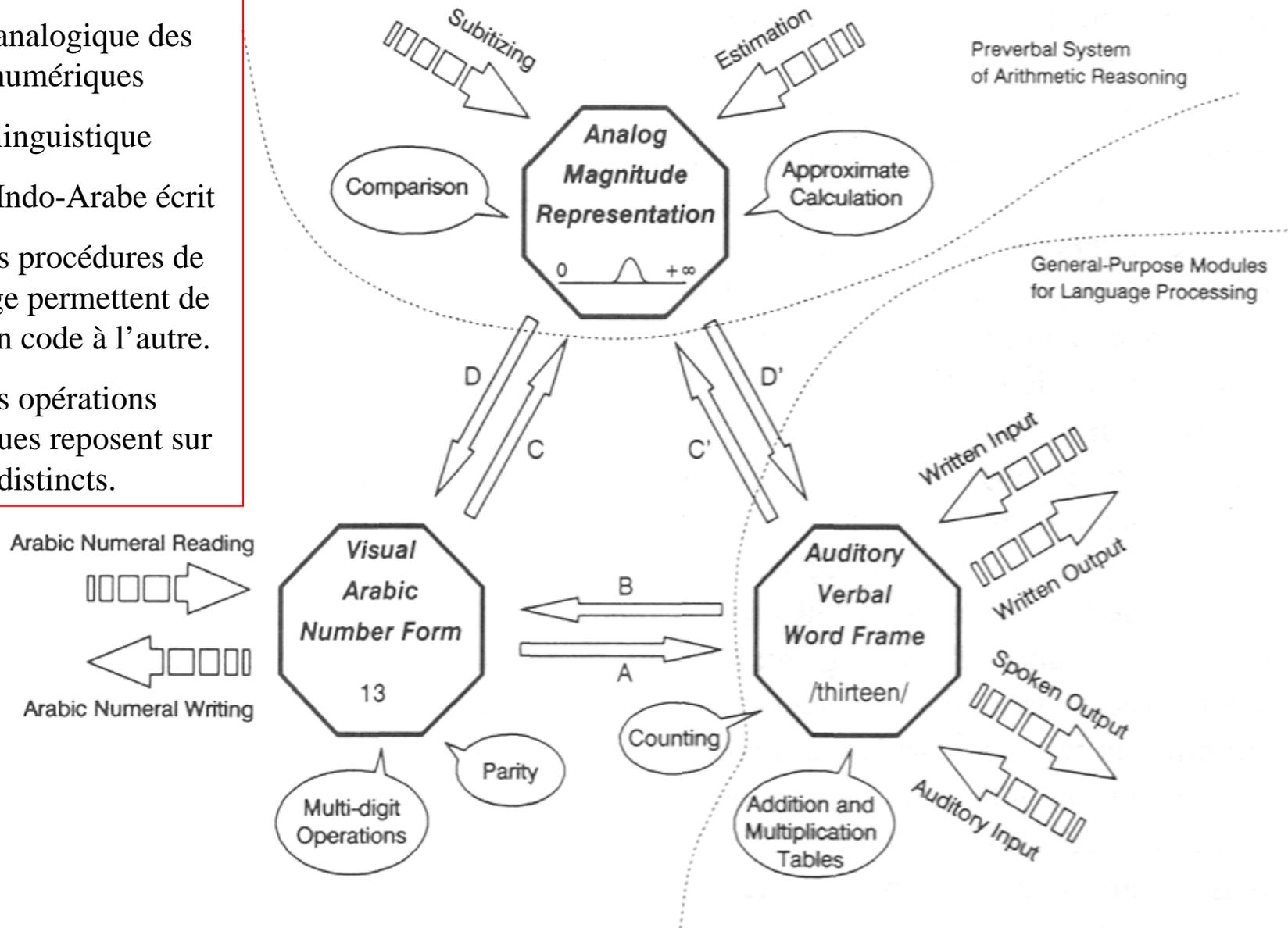
Dehaene, *Cognition* 1992

3 grands systèmes de représentation mentale des nombres:

- Le code analogique des quantités numériques
- Le code linguistique
- Le code Indo-Arabe écrit

Différentes procédures de transcoding permettent de passer d'un code à l'autre.

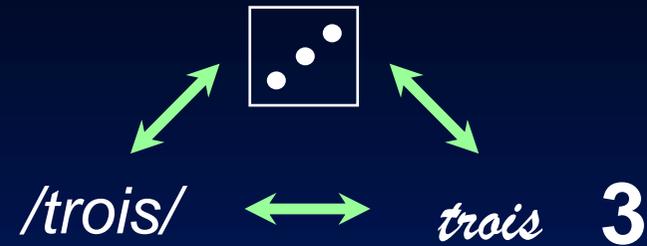
Différentes opérations arithmétiques reposent sur des codes distincts.



# Le modèle du "triple code" dans sa version 'neurologisée'

(Dehaene & Cohen, 1995)

## REPRESENTATION des GRANDEURS

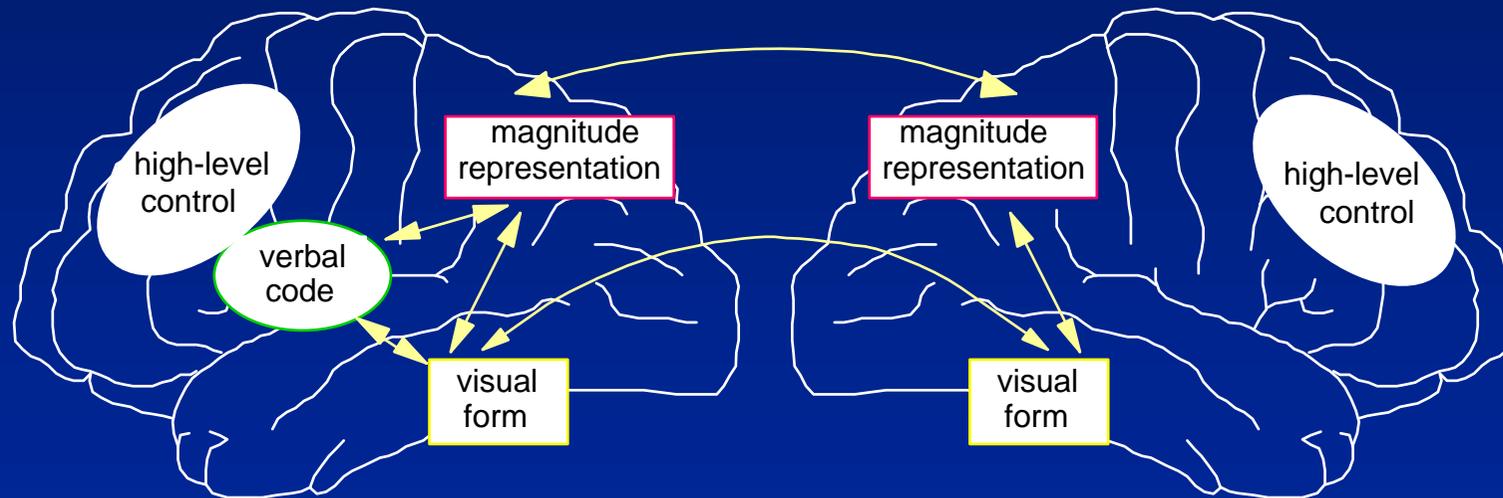


CODE VERBAL

FORME VISUELLE

Hémisphère gauche

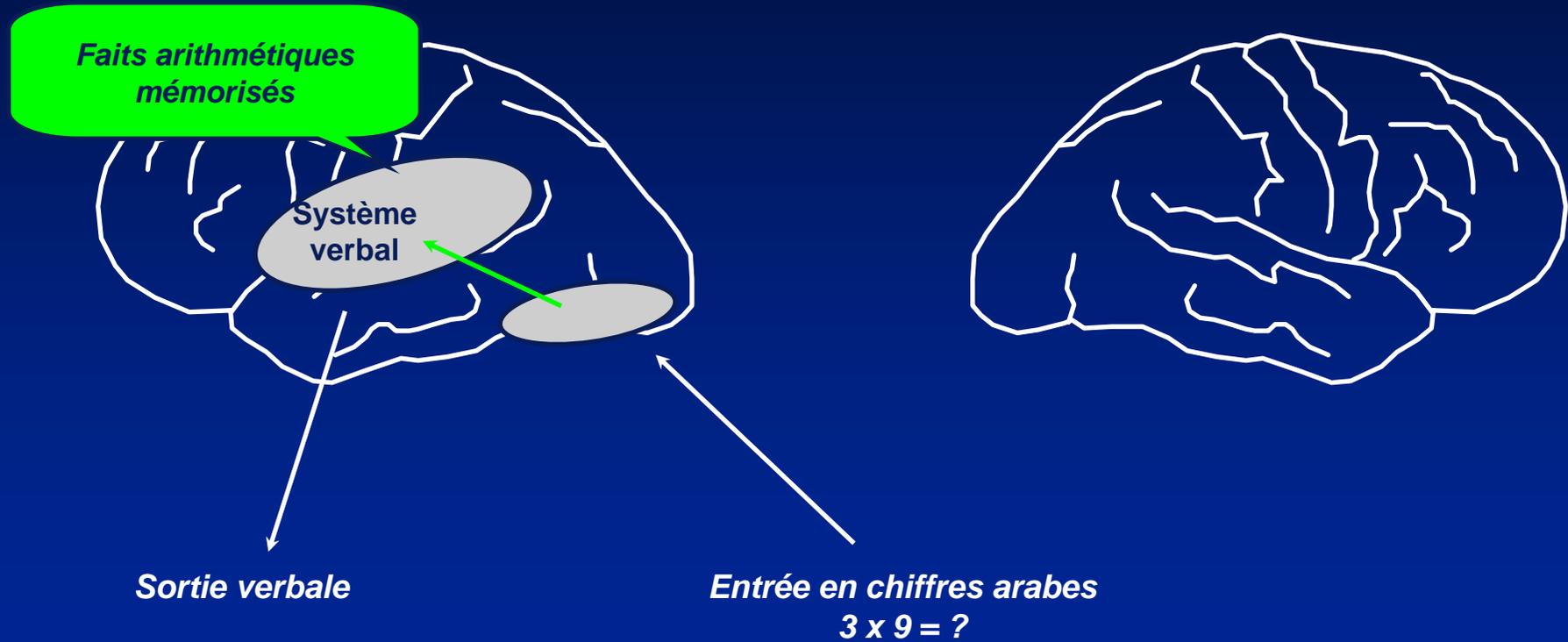
Hémisphère droit



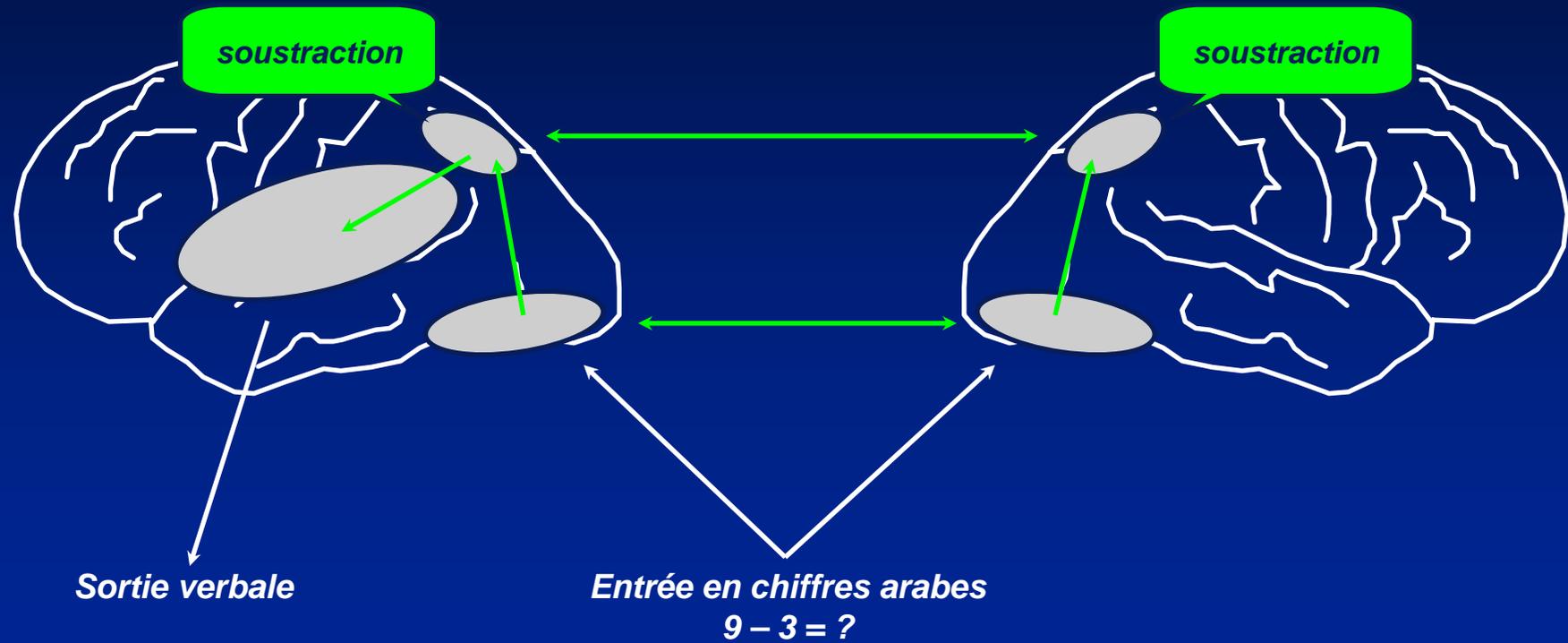
Dehaene, S. (1992). *Cognition*, 44, 1-42.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). *Mathematical Cognition*, 1, 83-120.

# Table de multiplication

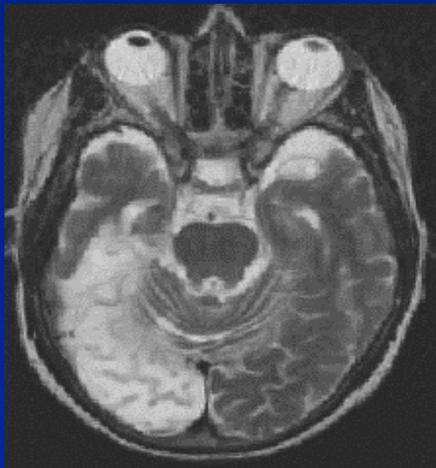
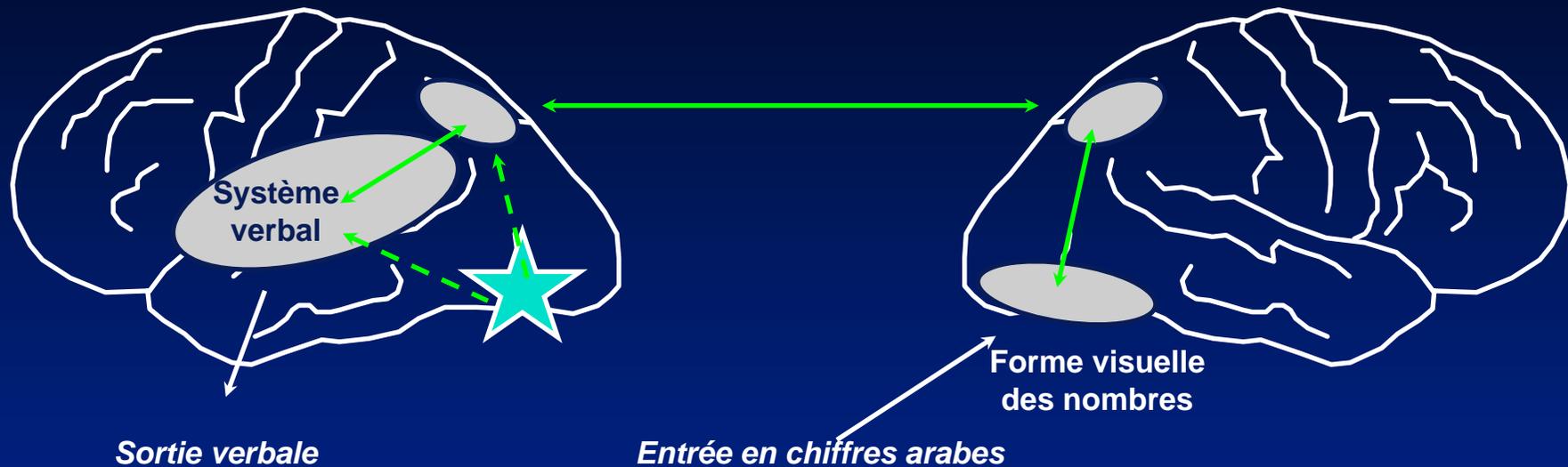


# Soustraction



# Le traitement de nombres dans l'alexie pure

(Cohen & Dehaene, 2000)



Patiente V.O.L. (Cohen & Dehaene, *Cog. Neuropsychol.* 2000)

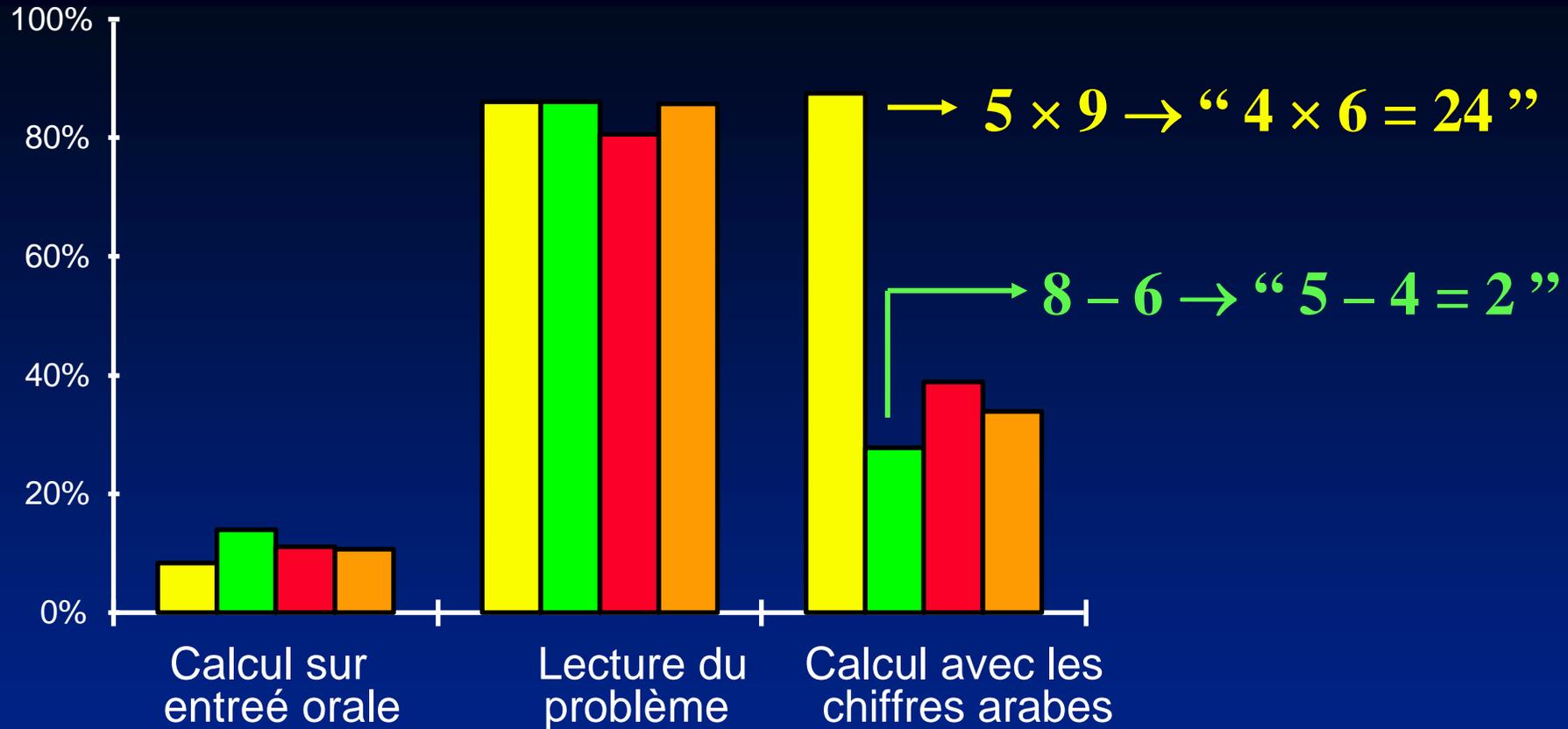
- Lecture de mots : impossible
- Lecture de chiffres : 41% errors
- Lecture de nombres à deux chiffres : 89% d'erreurs
- Comparaison de nombres à deux chiffres: 1% d'erreurs
- Calcul mental?

## Quelques exemples de soustractions dans l'alexie pure

stimulus	Réponse de la patiente	
	Lecture du problème	Énoncé du résultat
4 – 2	4 – 3	2
8 – 7	6 – 4	1
9 – 2	4 – 3	7
5 – 3	4 – 3	2
7 – 1	4 – 3	6

% errors

## Dissociation entre les opérations



- multiplication
- soustraction
- addition
- division

Conclusion: différentes opérations reposent sur des codes distincts:

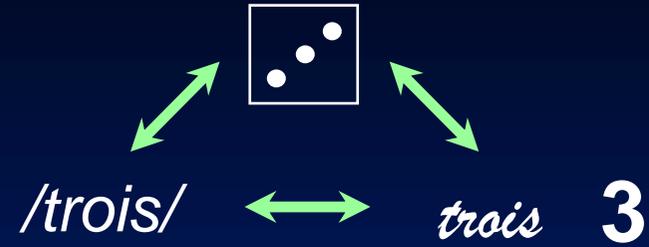
- L'apprentissage des symboles verbaux donne accès à des inventions culturelles telles que la table de multiplication.
- Toutefois, certaines opérations comme la comparaison, l'approximation, la soustraction continuent d'exiger une manipulation interne des quantités.

Comment le code des quantités permet-il une soustraction exacte?

# Le modèle du "triple code" dans sa version 'neurologisée'

(Dehaene & Cohen, 1995)

## REPRESENTATION des GRANDEURS

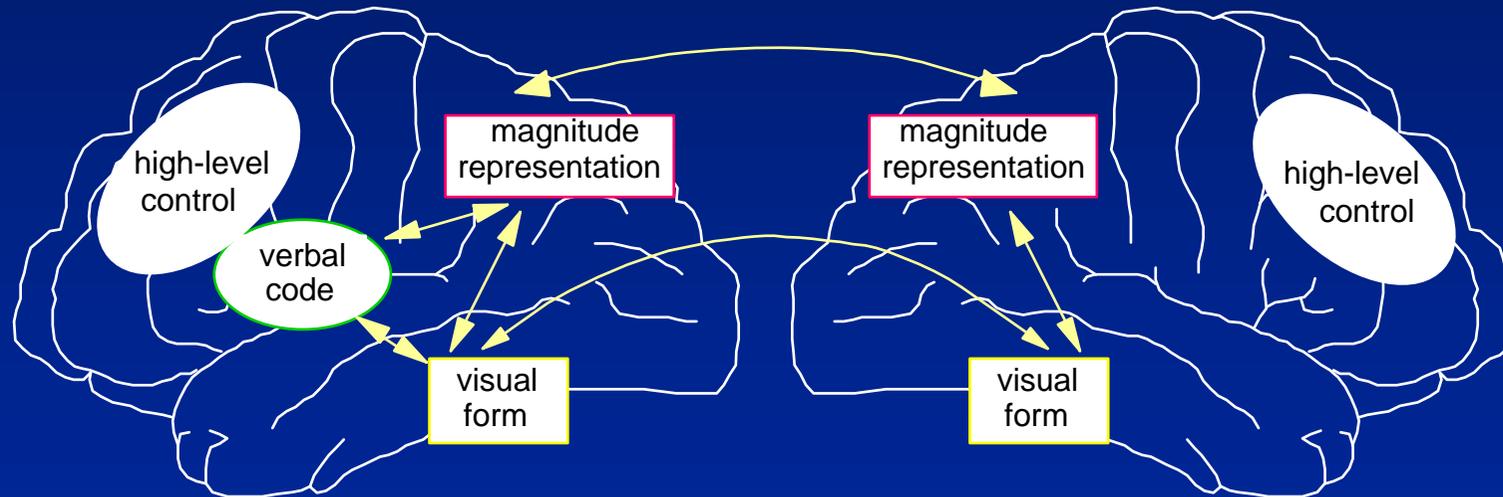


CODE VERBAL

FORME VISUELLE

Hémisphère gauche

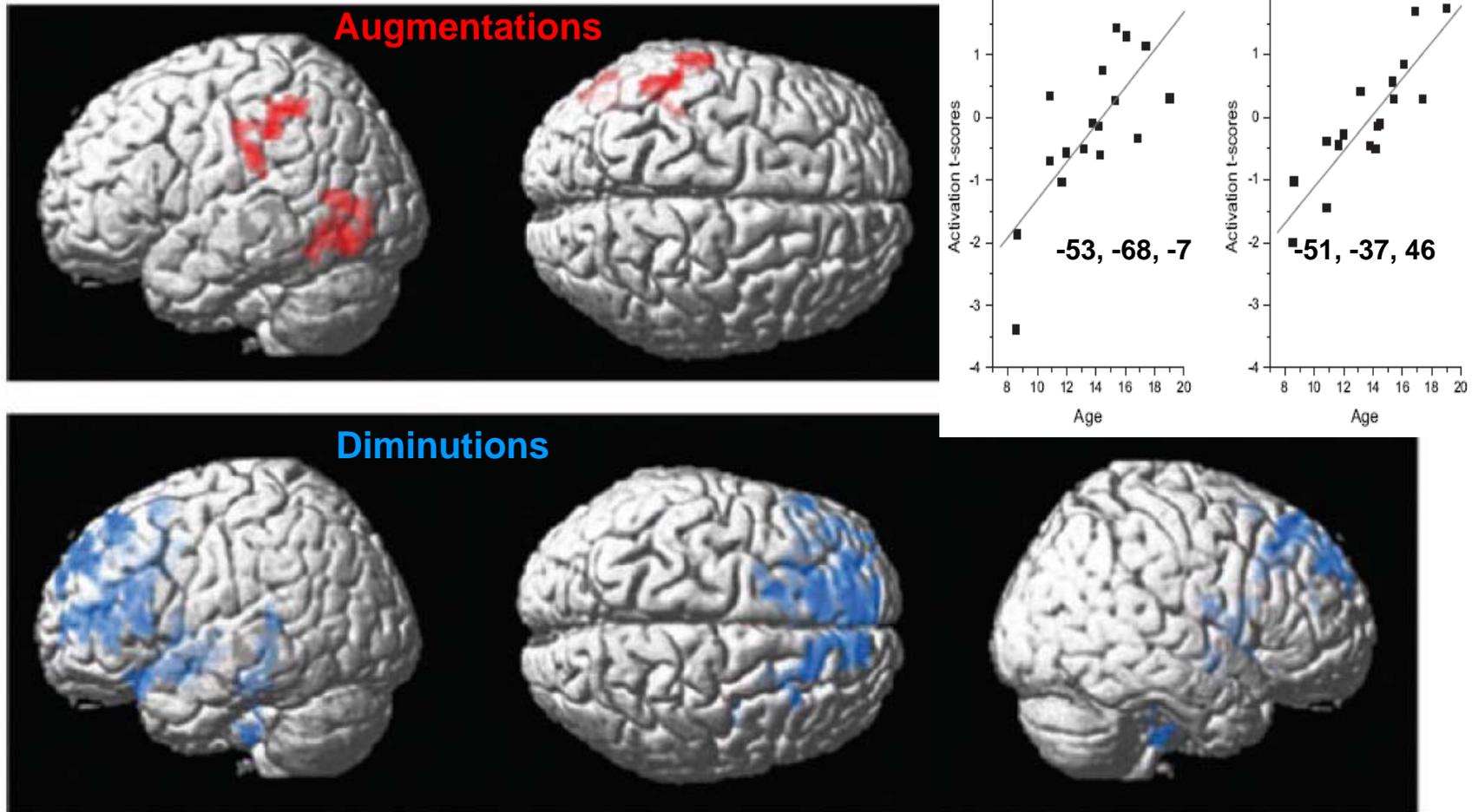
Hémisphère droit



Dehaene, S. (1992). *Cognition*, 44, 1-42.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). *Mathematical Cognition*, 1, 83-120.

# Changements d'activation évoquée par le calcul mental au cours du développement: Déplacement vers un réseau temporo-pariétal gauche

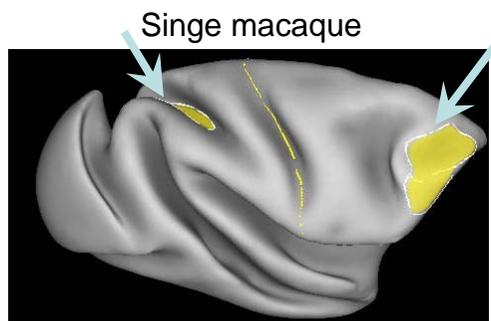
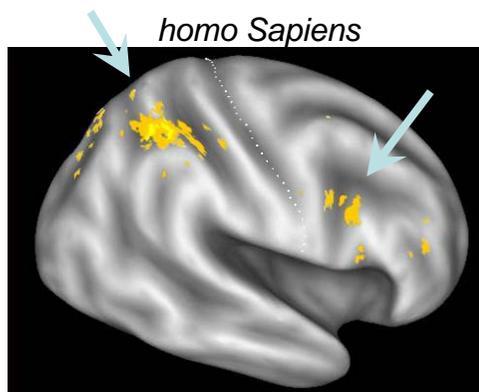
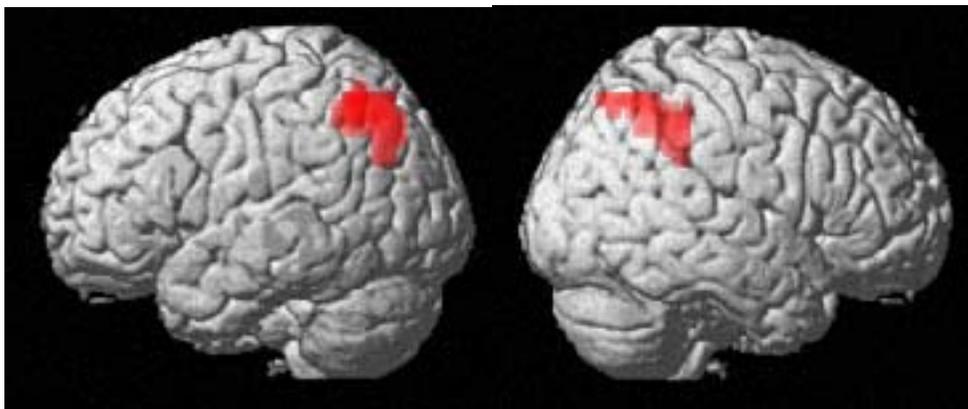


Rivera, S. M., Reiss, A. L., Eckert, M. A., & Menon, V. (2005). Developmental Changes in Mental Arithmetic: Evidence for Increased Functional Specialization in the Left Inferior Parietal Cortex. *Cereb Cortex*, 15(11), 1779-1790.

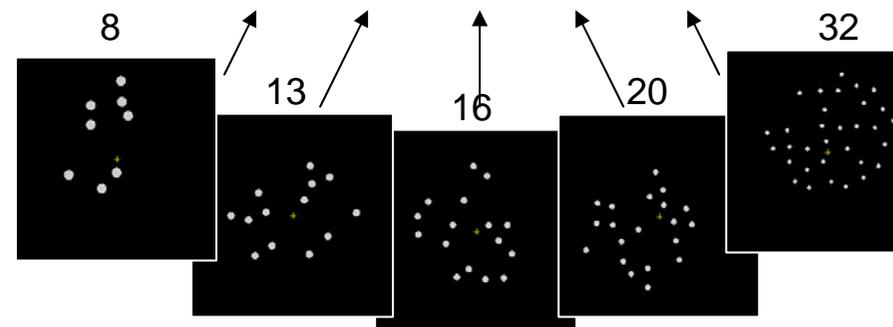
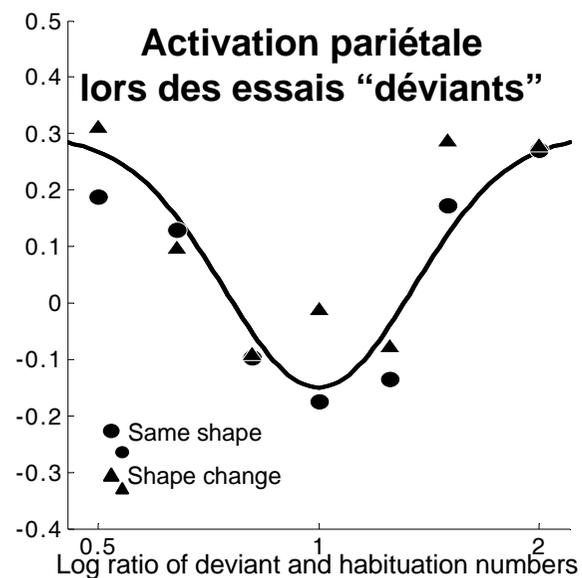
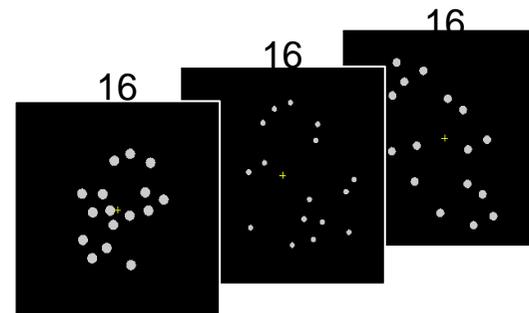
# Plausibilité d'un codage log-gaussien des nombres dans le sillon intrapariétal humain (hIPS)

Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan & Dehaene, Neuron 2004

Régions qui répondent à un  
changement de nombre



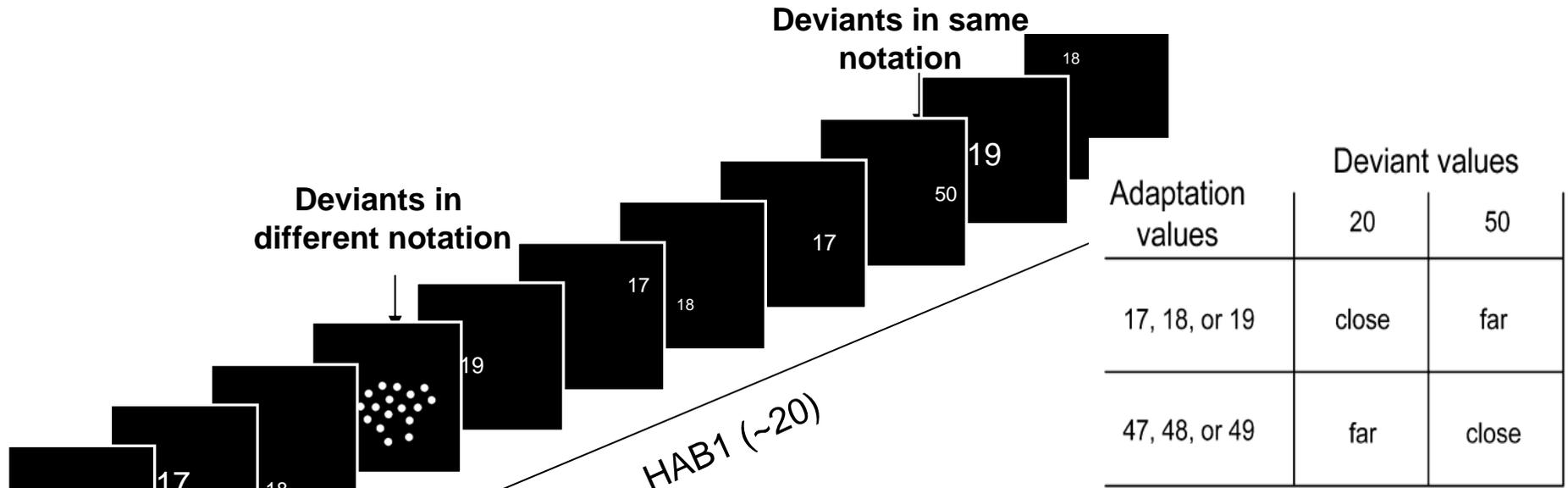
Adaptation à un nombre  
fixé dans un bloc donné



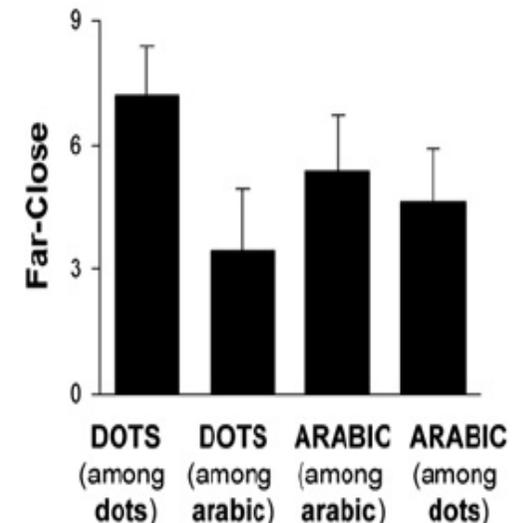
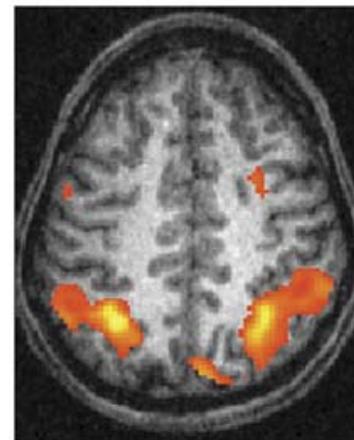
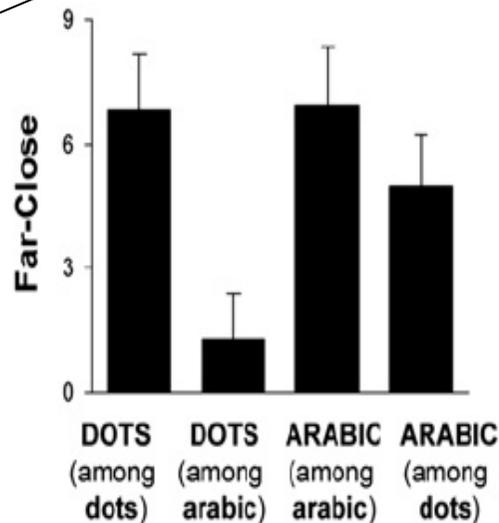
# Adaptation inter-notations en IRM fonctionnelle

Piazza, Pinel and Dehaene, Neuron 2007

- Les mêmes neurones codent-ils pour le symbole '20' et pour la quantité '20 points'?

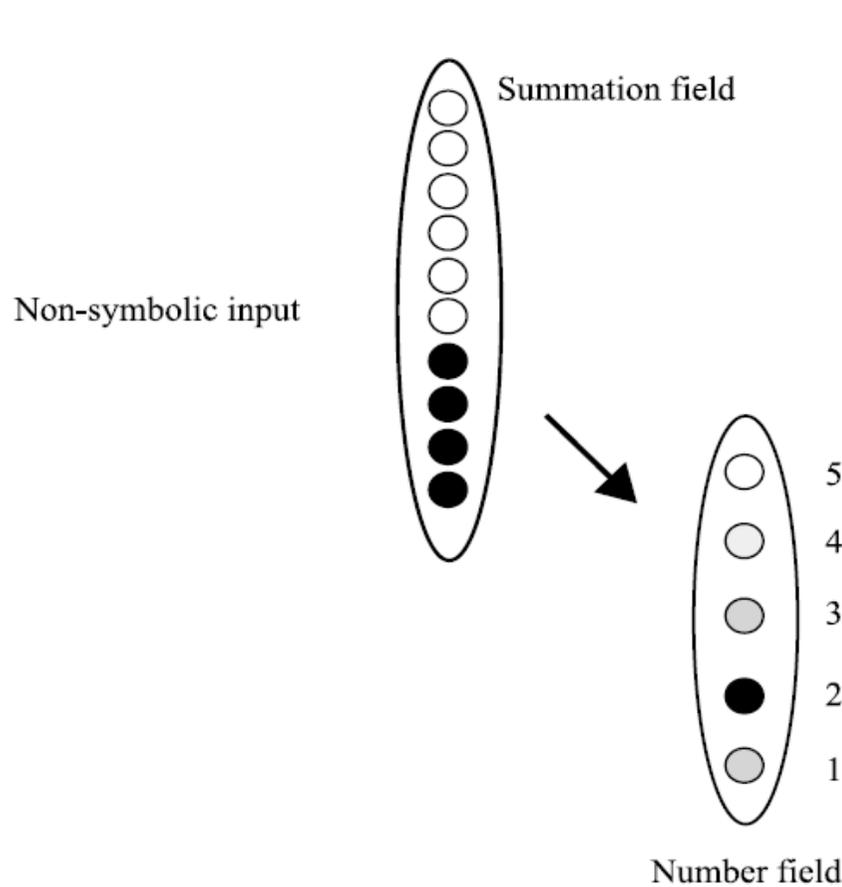


Le cortex intrapariétal montre un effet d'adaptation numérique, dépendant de la distance, mais indépendant de la notation numérique.



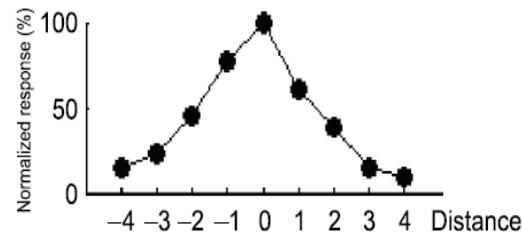
# Un modèle connexionniste de l'apprentissage d'un code numérique

Le réseau apprend, de façon non-supervisée, à représenter optimalement ses entrées dans un code neural compact.

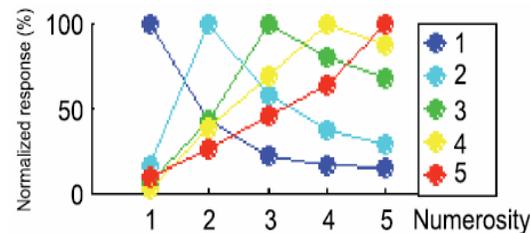


1. Entrée 'non-symbolique'  
(simulant plus ou moins les neurones  
'monotones' observés depuis par  
Roitman et al. dans l'aire LIP)

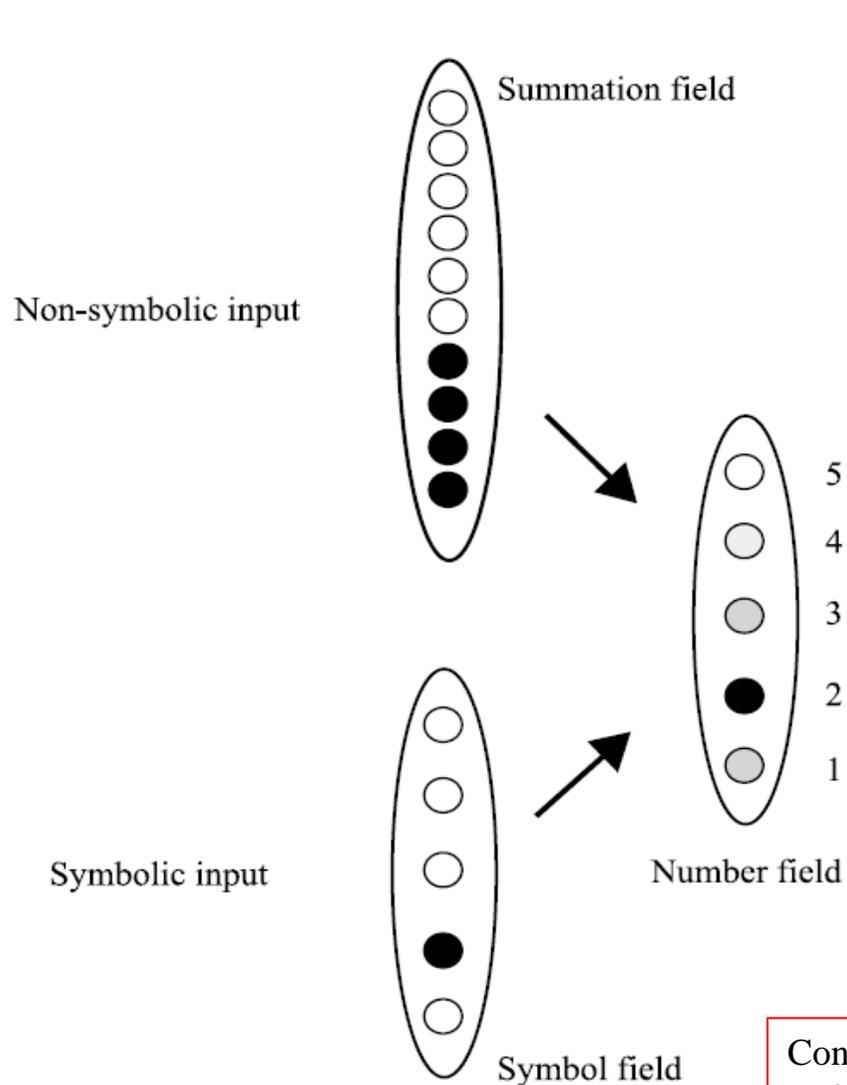
Effet de distance



Courbes d'accord  
Log-Gaussiennes



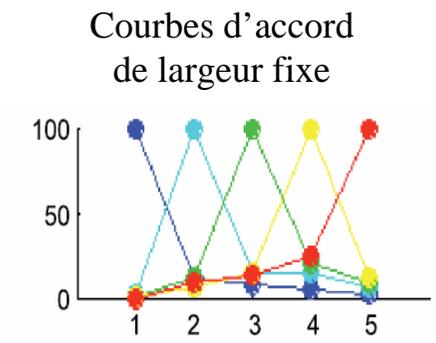
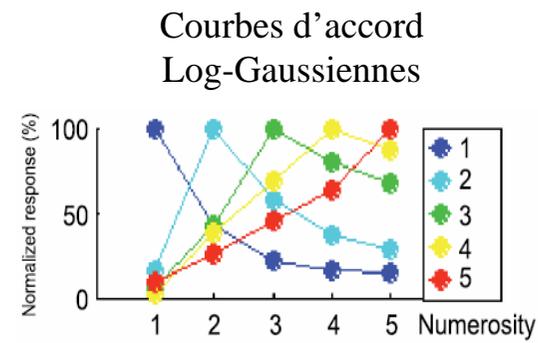
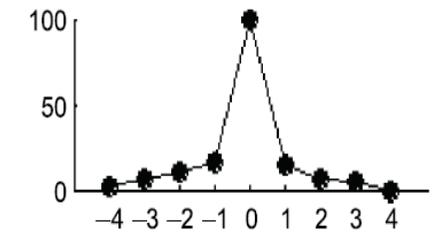
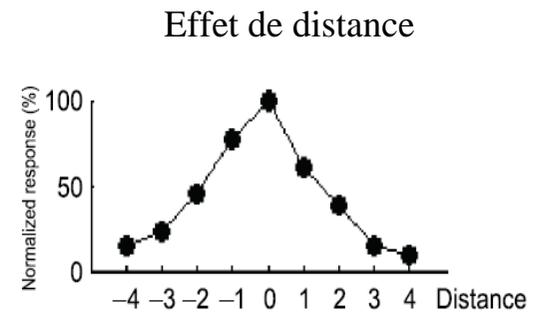
# Les changements induits dans le modèle par l'acquisition de symboles



1. Entrée 'non-symbolique'  
(simulant plus ou moins les neurones  
'monotones' observés depuis par  
Roitman et al. dans l'aire LIP)

2. Entrée 'symbolique'  
(simulant un code par  
symboles arbitraires)

L'effet de distance devient  
très aigu, avec une  
composante 'tout-ou-rien'  
plus un petit effet linéaire



Conclusion: les *mêmes neurones* pourraient coder les quantités selon un code Log-gaussien approximatif et les symboles selon un code précis.

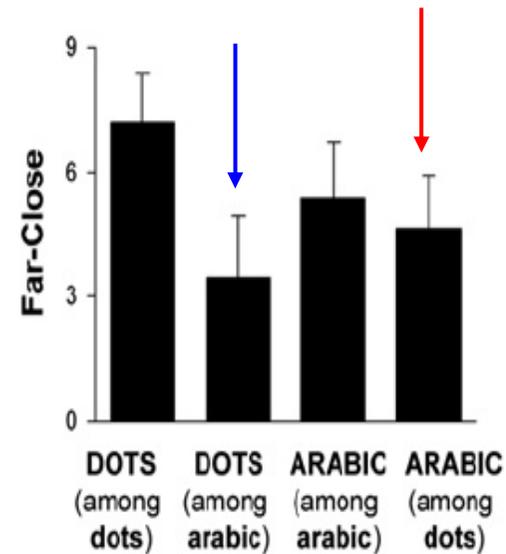
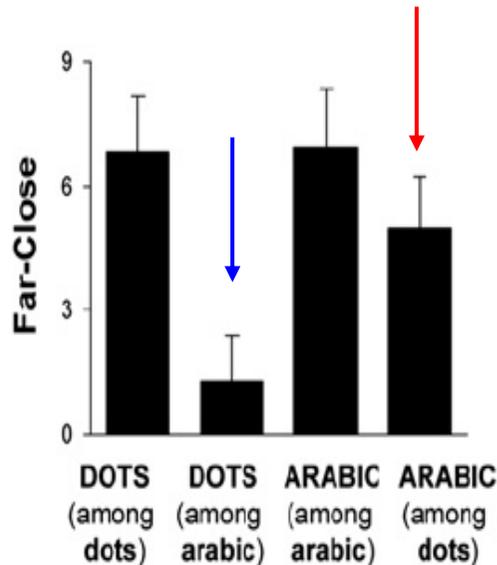
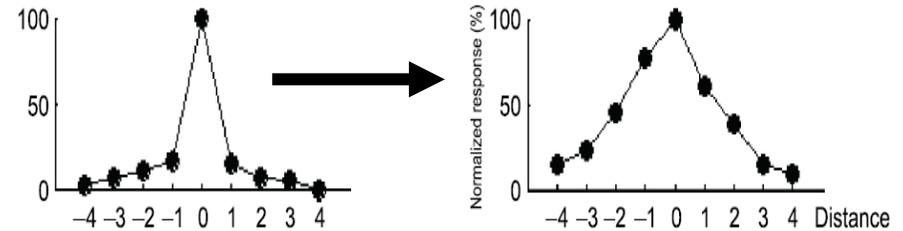
# Le code postulé par Verguts et Fias pourrait expliquer l'asymétrie d'adaptation numérique

La région pariétale gauche serait particulièrement affectée par l'apprentissage des symboles

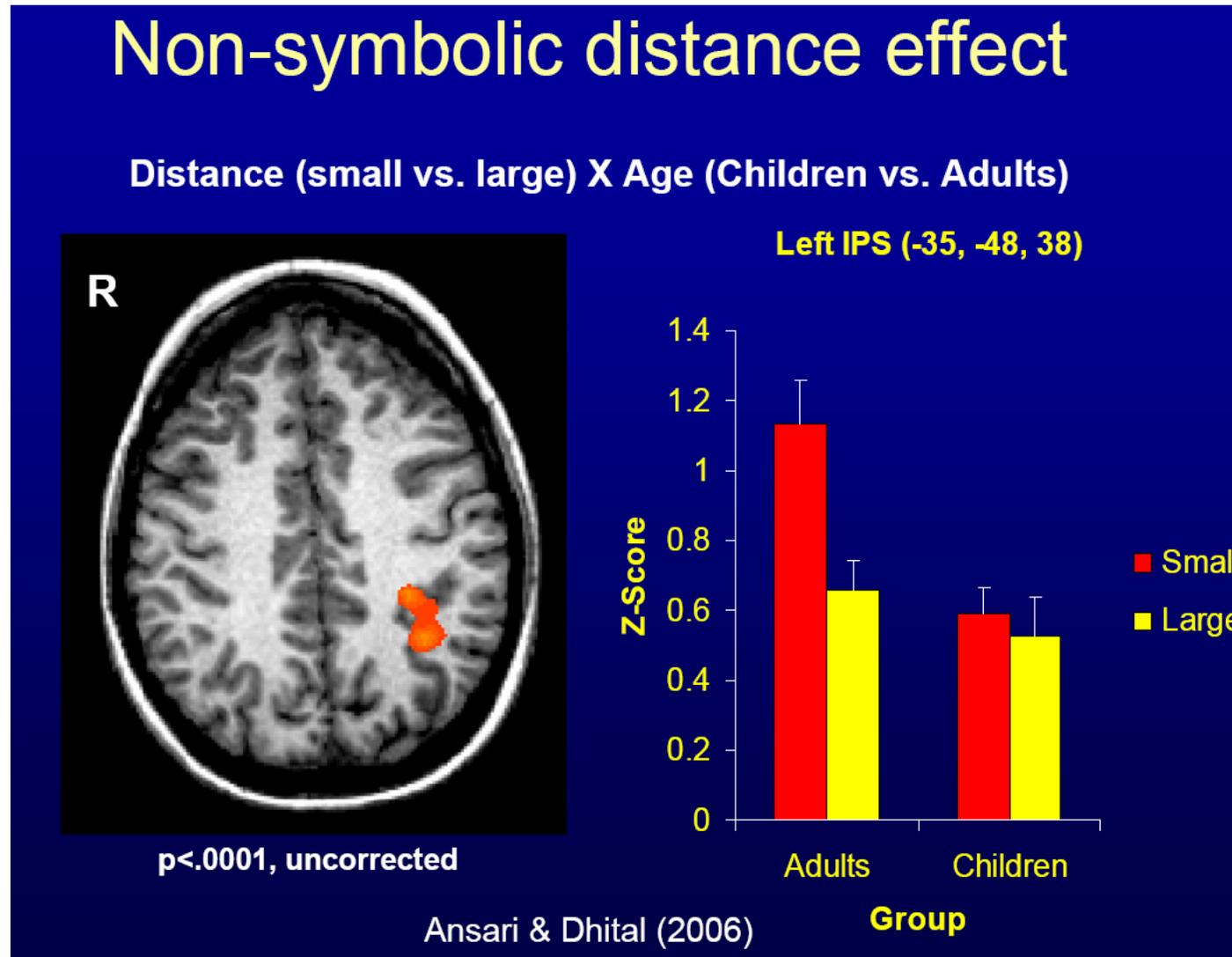
Adaptation à une quantité, puis présentation du même nombre sous forme symbolique  
→ Réponse d'IRM totalement réduite pour les nombres proches, pas pour les nombres loins



Adaptation à un symbole, puis présentation de la quantité:  
→ Réponse d'IRM peu réduite  
→ Peu de différence entre les nombres proches ou loin



L'effet de distance s'accroît dans la région pariétale gauche



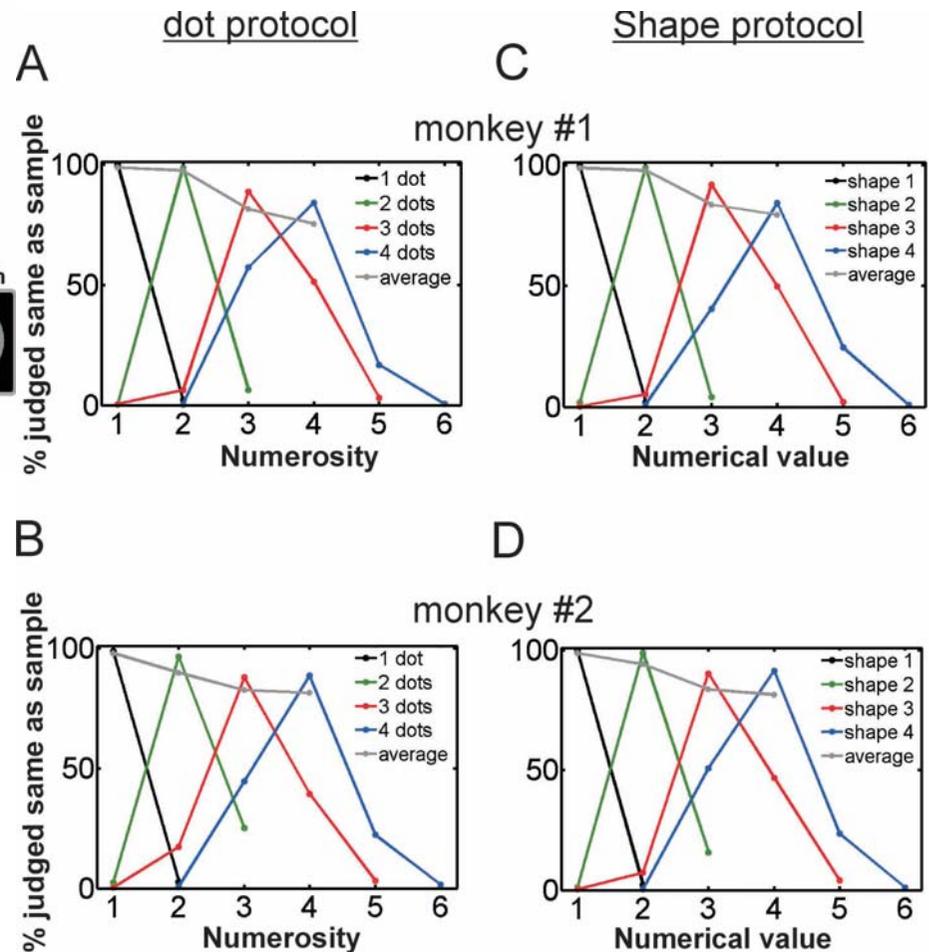
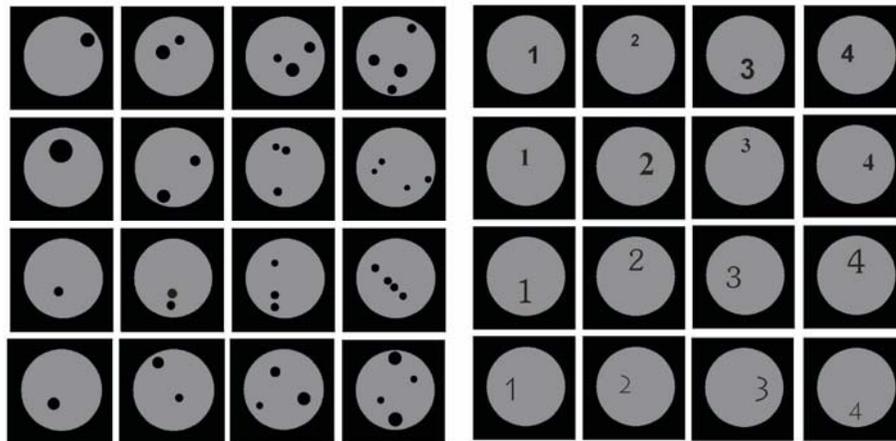
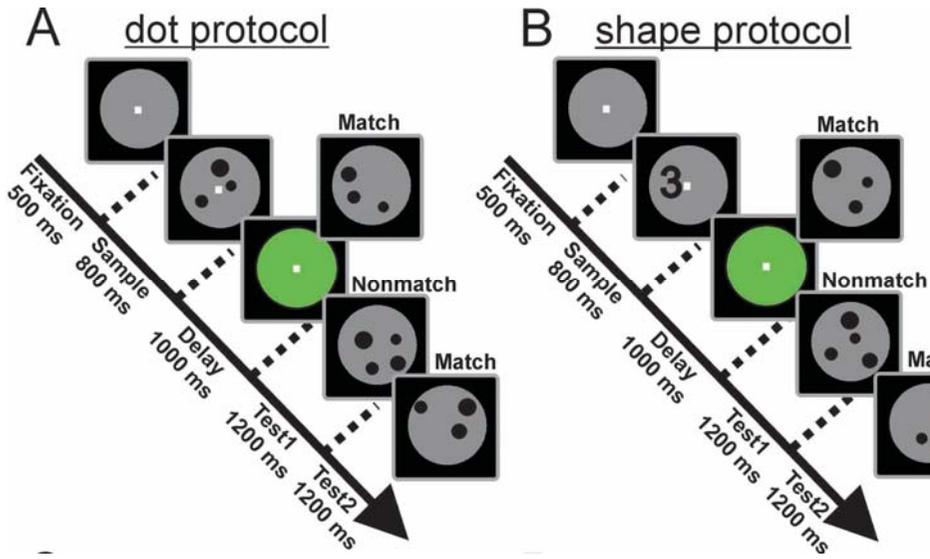
Ansari, D., & Dhital, B. (2006). Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing: an event-related functional magnetic resonance imaging study. *J Cogn Neurosci*, 18(11), 1820-1828.

# Acquisition de 'symboles' numériques chez le singe macaque

(Diester and Nieder, PLOS Biology 2007)

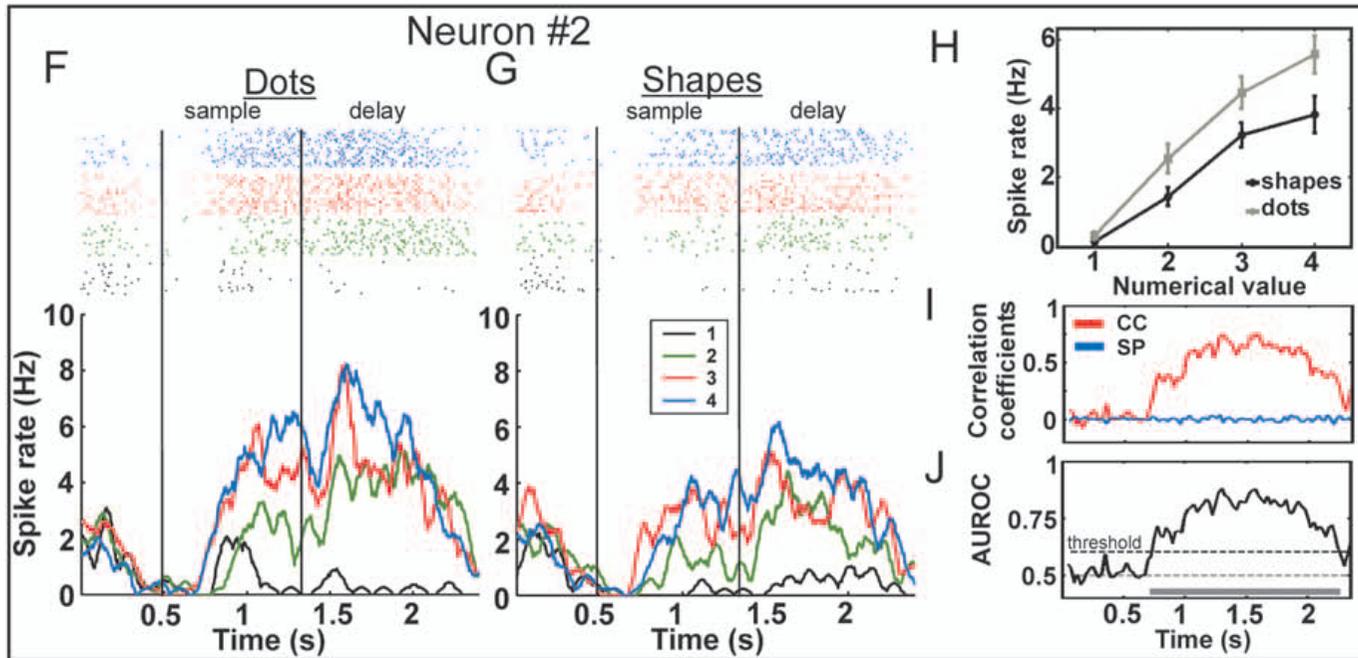
Deux singes macaque ont appris une version symbolique de la tâche d'appariement numérique différé de Nieder et Miller (2002)

Le comportement montre que les singes sont capables d'établir un lien entre les symboles et les quantités numériques correspondantes.



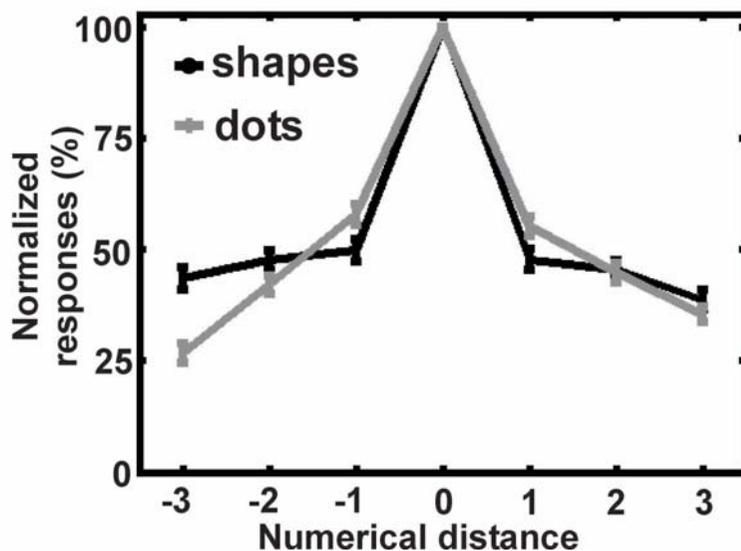
# Acquisition de 'symboles' numériques chez le singe macaque

(Diester and Nieder, PLOS Biology 2007)



Résultats:

Dans le cortex préfrontal, on trouve de nombreux neurones qui répondent avec la même préférence aux numérosités et aux symboles numériques.

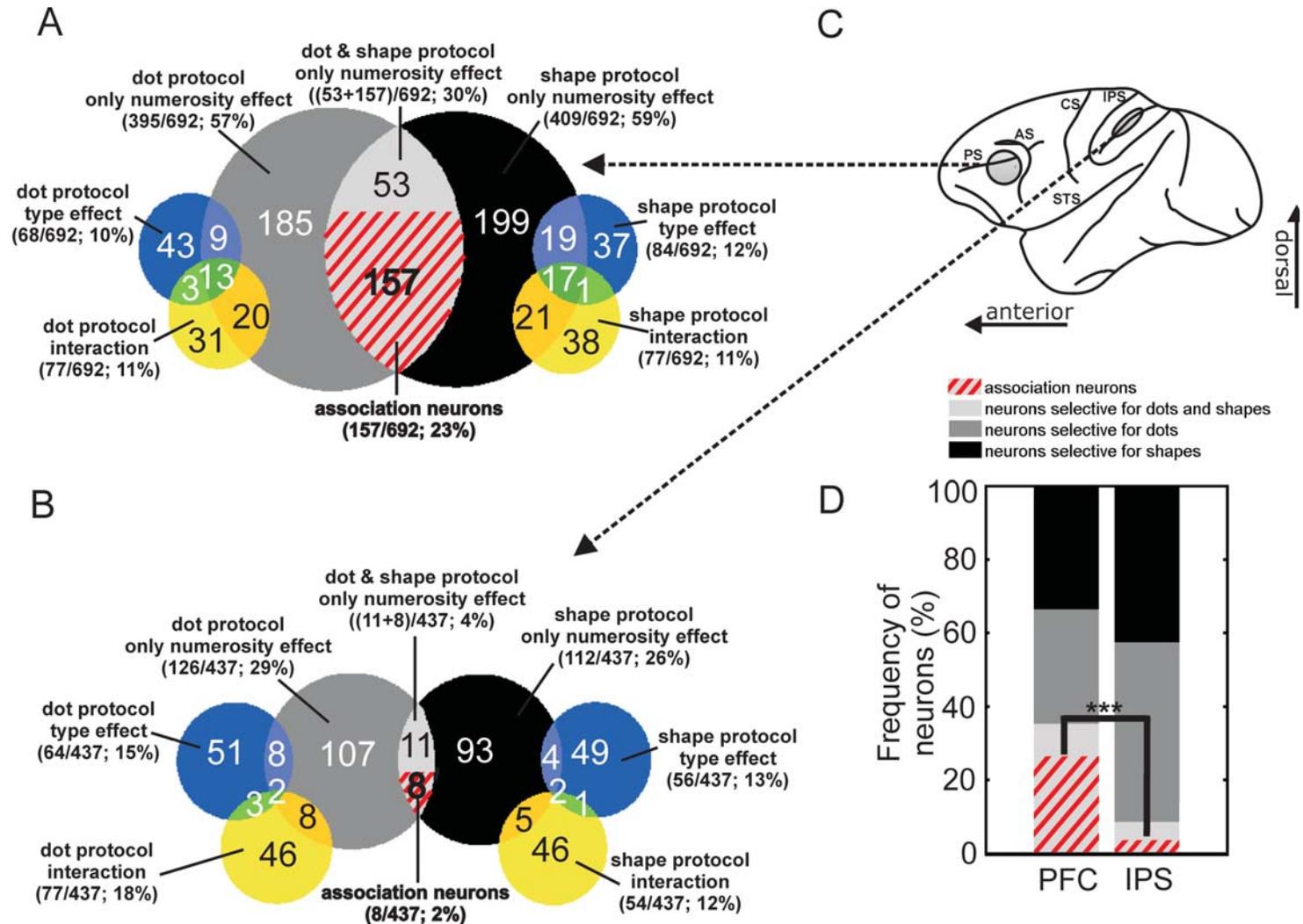


Les courbes d'accord sont plus précises pour les symboles que pour les numérosités, conformément au modèle de Verguts et Fias.

# Acquisition de 'symboles' numériques chez le singe macaque

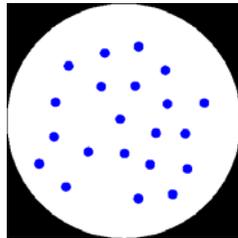
(Diester and Nieder, PLOS Biology 2007)

Les neurones d'association qui codent pour le nombre indépendamment du format de présentation, sont nombreux dans le cortex préfrontal, mais très rares dans le cortex pariétal.



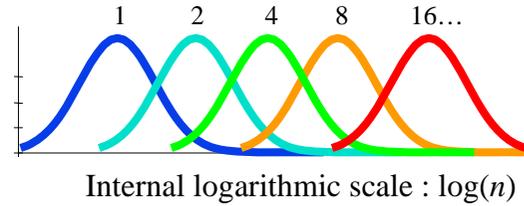
Un modèle complet de la chaîne de décision numérique (voir le cours n° 4)

Stimulus de numérosité  $n$

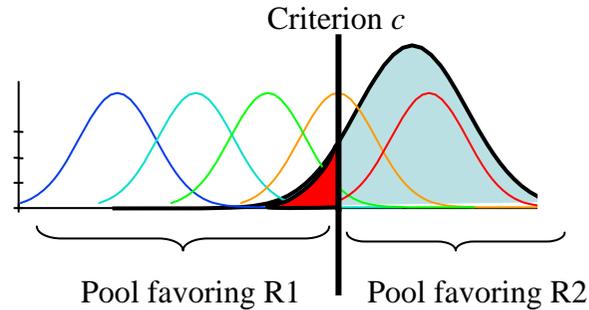


Décision numérique simple

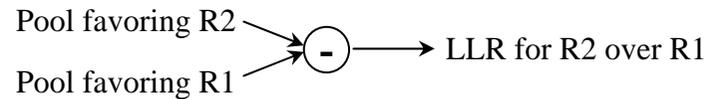
**1. Coding by Log-Gaussian numerosity detectors**



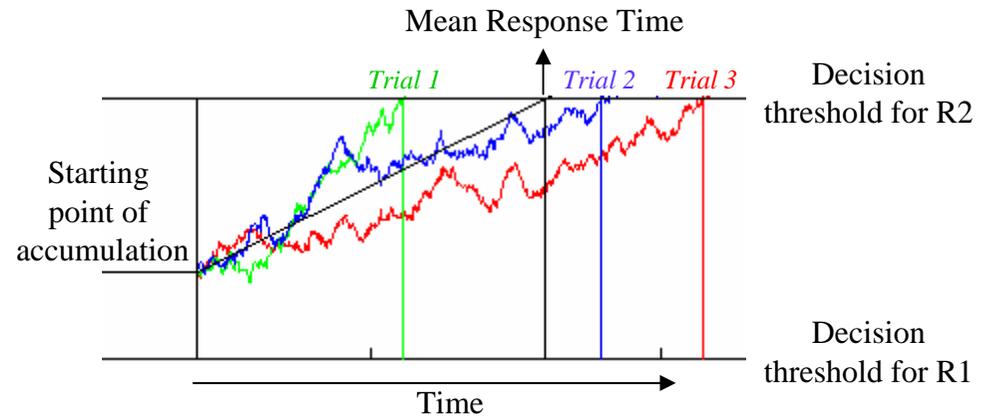
**2. Application of a criterion and formation of two pools of units**



**3. Computation of log-likelihood ratio by differencing**

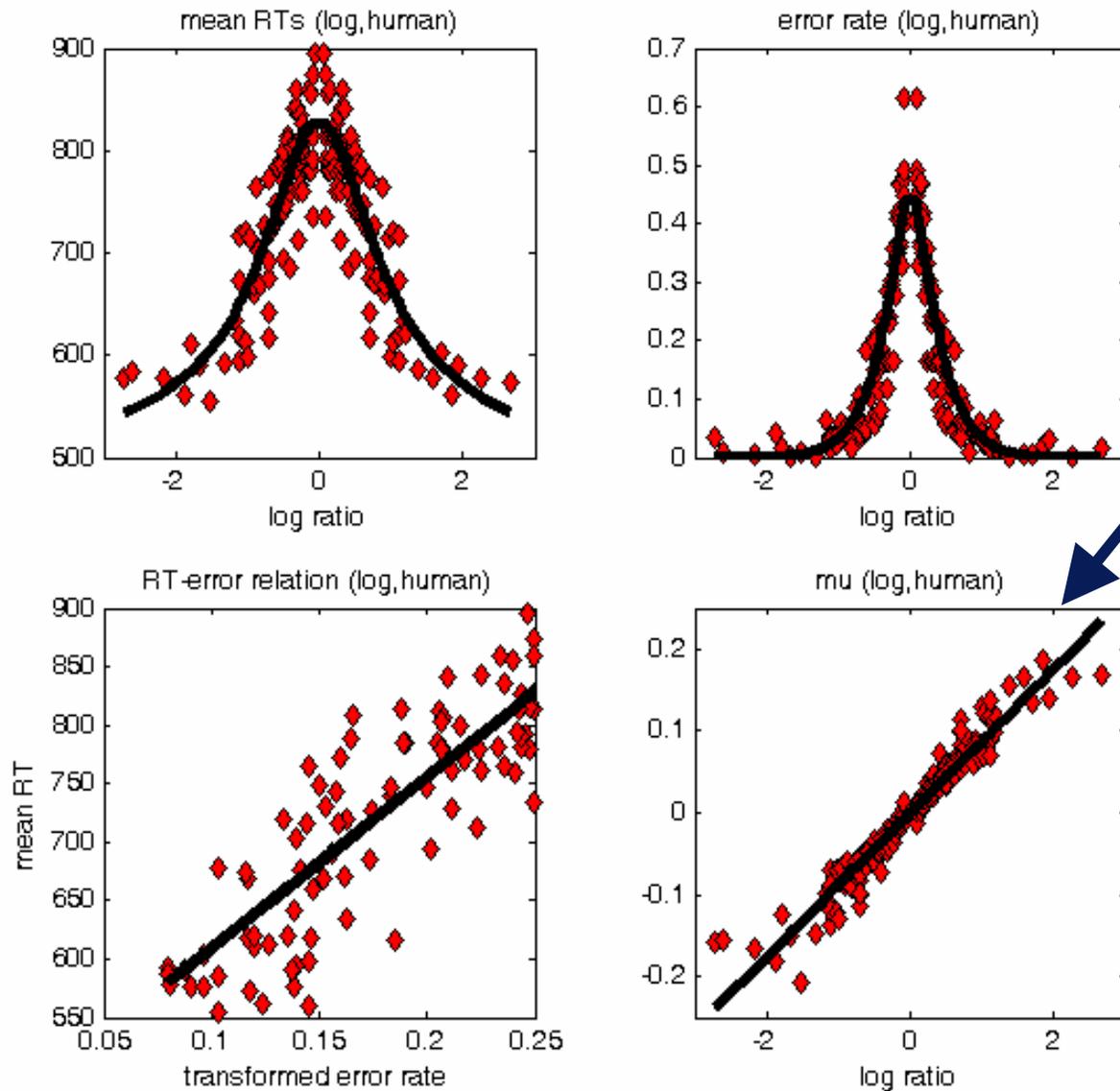


**4. Accumulation of LLR, forming a random-walk process**



# Exemple: comparaison de deux numérosités chez le singe et l'homme

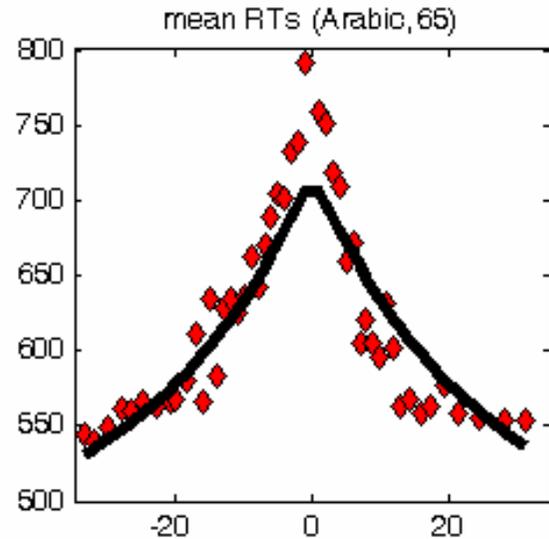
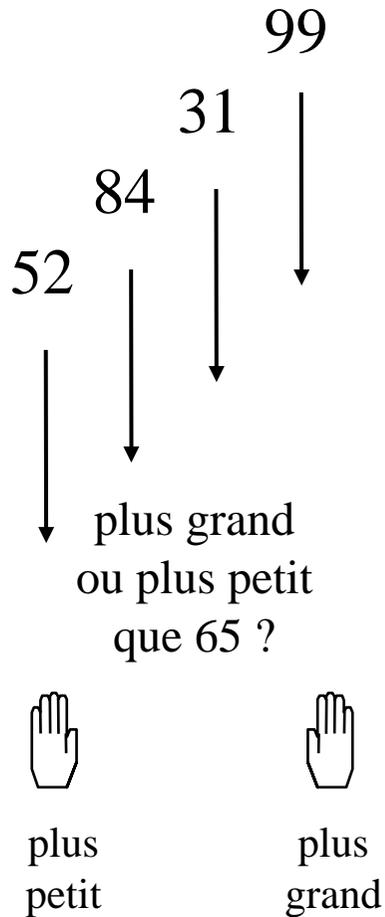
Cantlon, J. F., & Brannon, E. M. (2006). Shared system for ordering small and large numbers in monkeys and humans. *Psychol Sci*, 17(5), 401-406.



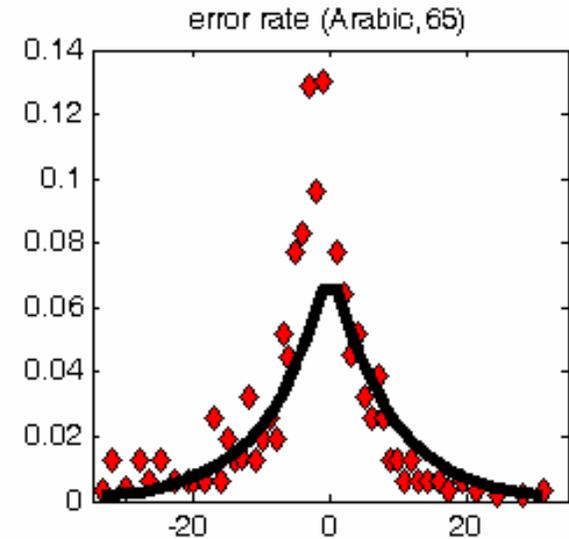
La théorie de la marche aléatoire permet de recouvrer cette variable cruciale, le pas moyen de la marche aléatoire ou **quantité moyenne d'information accumulée par unité de temps**

On voit que, conformément à la théorie log-gaussienne, cette quantité est proportionnelle au log du rapport des nombres à comparer (autrement dit, à la distance sur une échelle logarithmique)

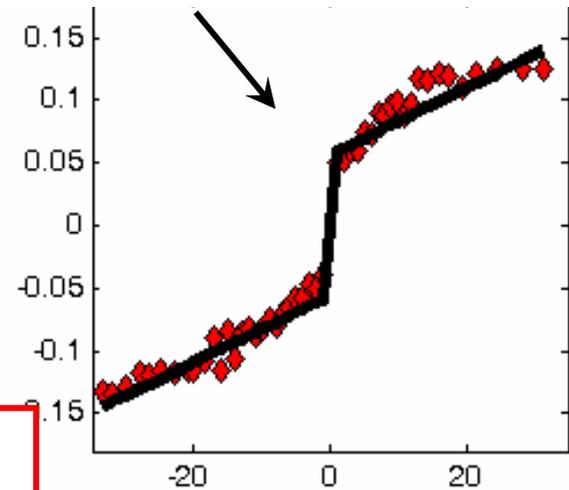
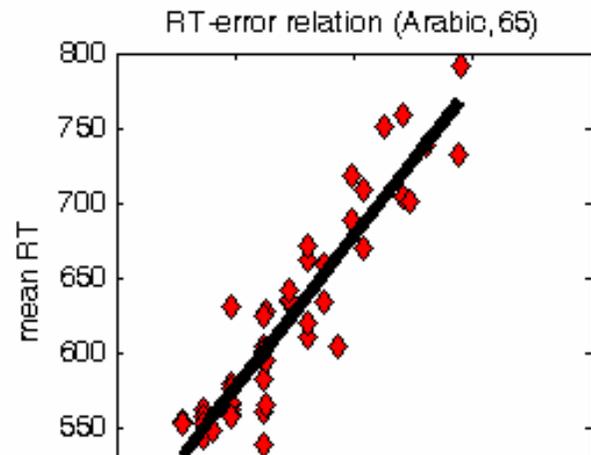
# Comparaison de nombres en notation arabe



Distance *linéaire* entre les nombres



Quantité d'information accumulée  
par unité de temps



Distance *linéaire* entre les nombres

**La quantité d'information accumulée semble**

- Linéaire avec la distance numérique
- avec une discontinuité qui suggère l'utilisation d'une représentation précise des nombres

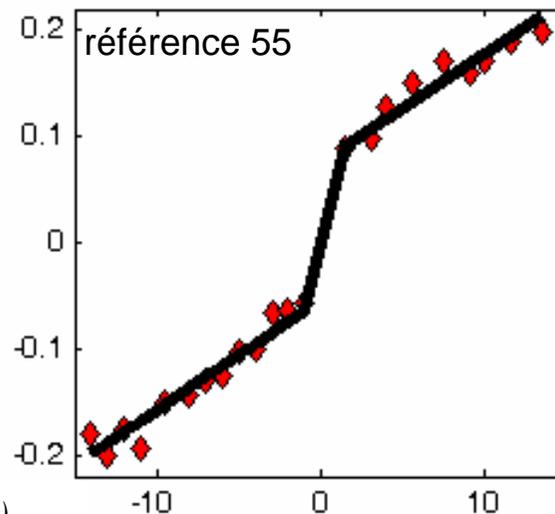
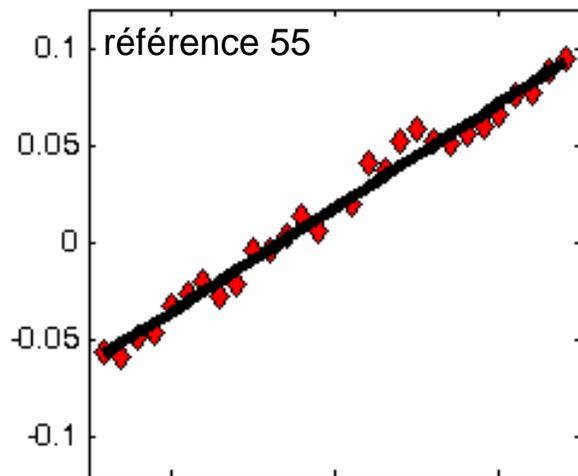
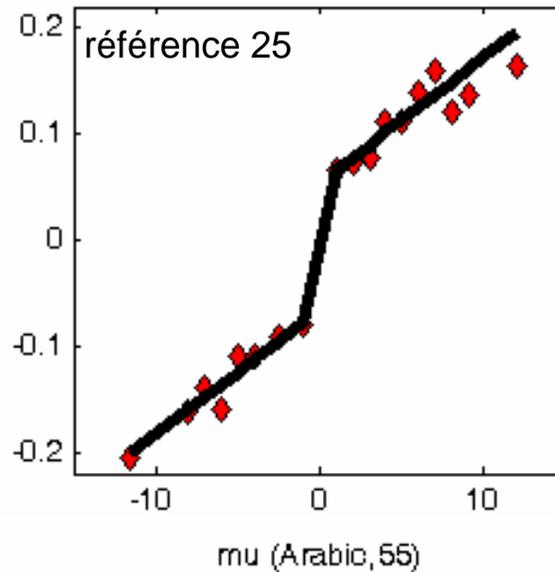
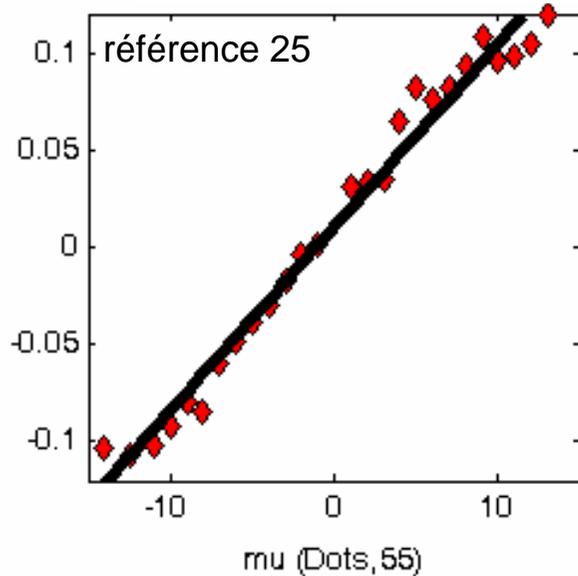
# Contraste direct entre comparaison symbolique et non-symbolique

10 adultes ont comparé des nombres en notation arabe et des numérosités avec une référence fixe, soit 25 or 55

## Comparaison non-symbolique

## Comparaison symbolique

Quantité d'information accumulée par unité de temps



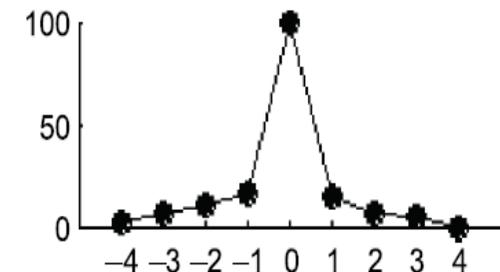
Distance entre les nombres (échelle *linéaire*)

## Conclusion

La représentation des quantités numériques est profondément différente suivant que l'on entre par la voie symbolique ou non-symbolique.

- Représentation précise, essentiellement exacte, et non pas approximative.
- Effet de distance linéaire et non logarithmique

Rappel du modèle de Verguts-Fias:

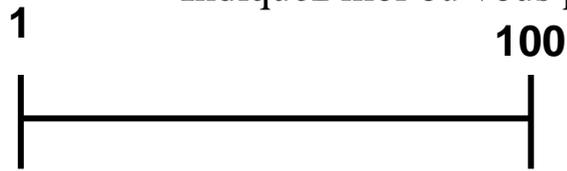


# La nature des liens entre nombre et espace change au cours du développement

(Siegler & Opfer, 2003; Siegler & Booth, 2004)

Tâche de mise en relation d'un nombre avec une position:

« Indiquez moi où vous placeriez le nombre  $n$  »



Un changement radical survient au cours de l'éducation: passage d'une représentation logarithmique à une représentation linéaire

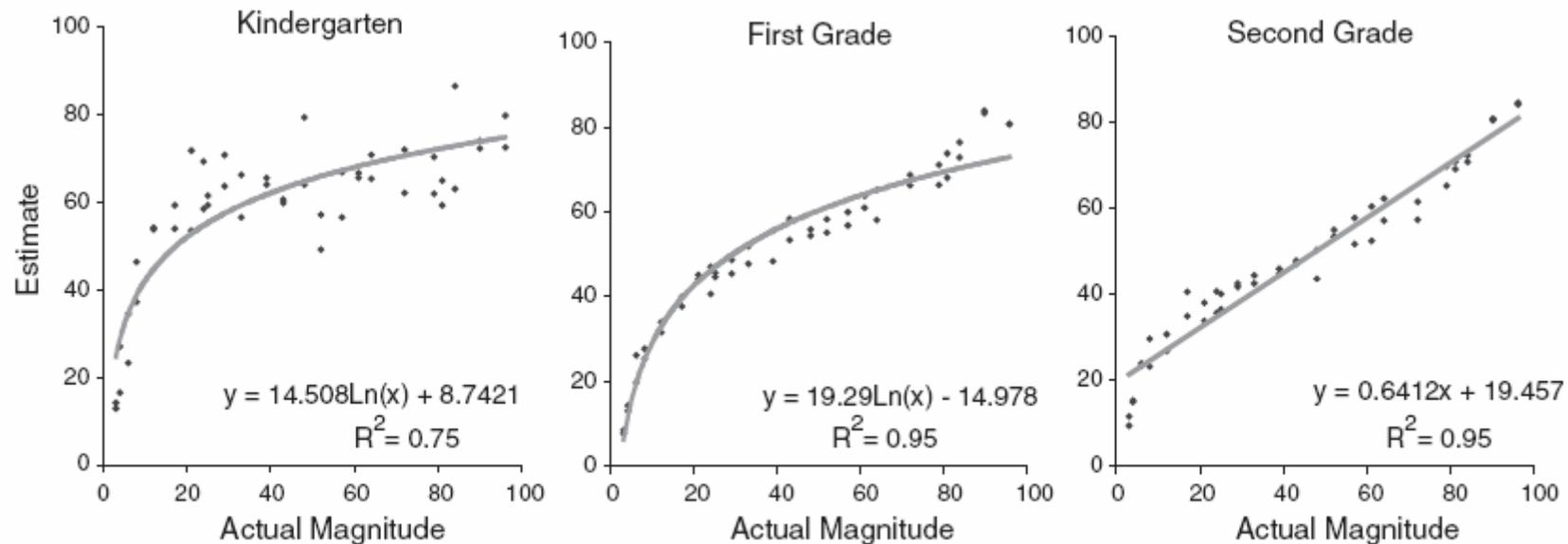
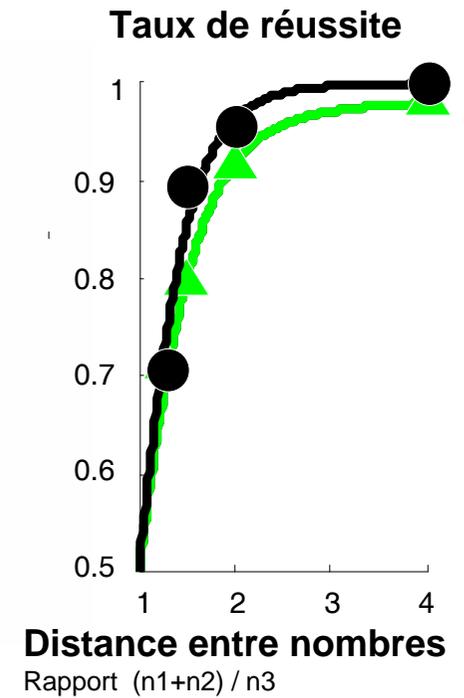
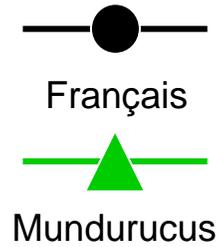
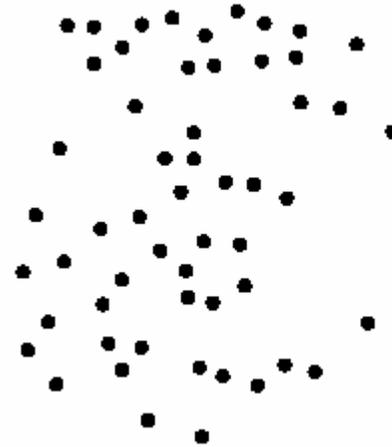


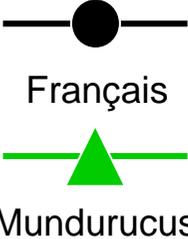
Figure 2. Progression from logarithmic pattern of median estimates among kindergartners (left panel) to linear pattern of estimates among second graders (right panel) in Experiment.



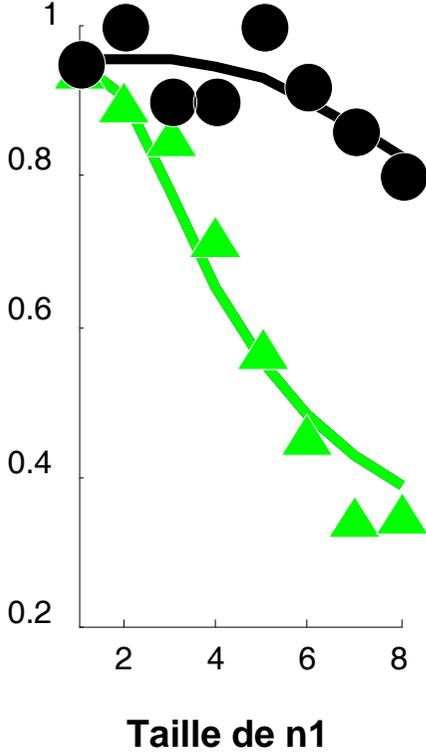
# Succès dans l'approximation d'une addition



# Echec en soustraction exacte

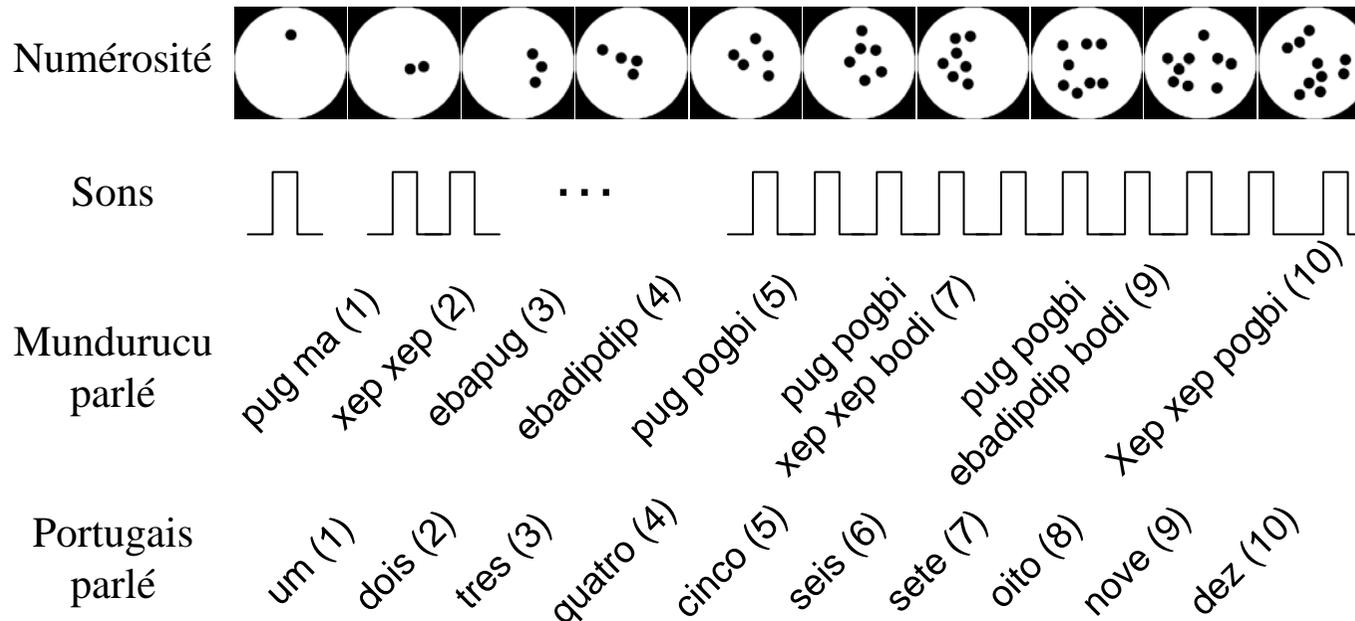
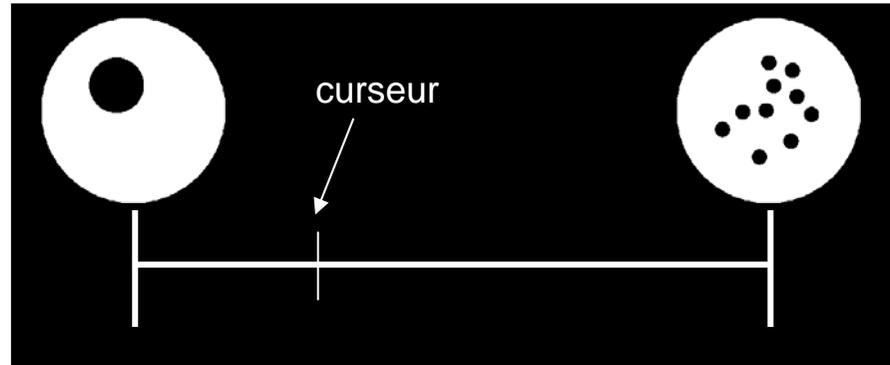


Taux de réussite



# Relations nombre-espace chez les Mundurucus

La tâche de mise en relation nombre-espace a été adaptée aux nombres entre 1 et 10, en évitant l'emploi de symboles écrits.

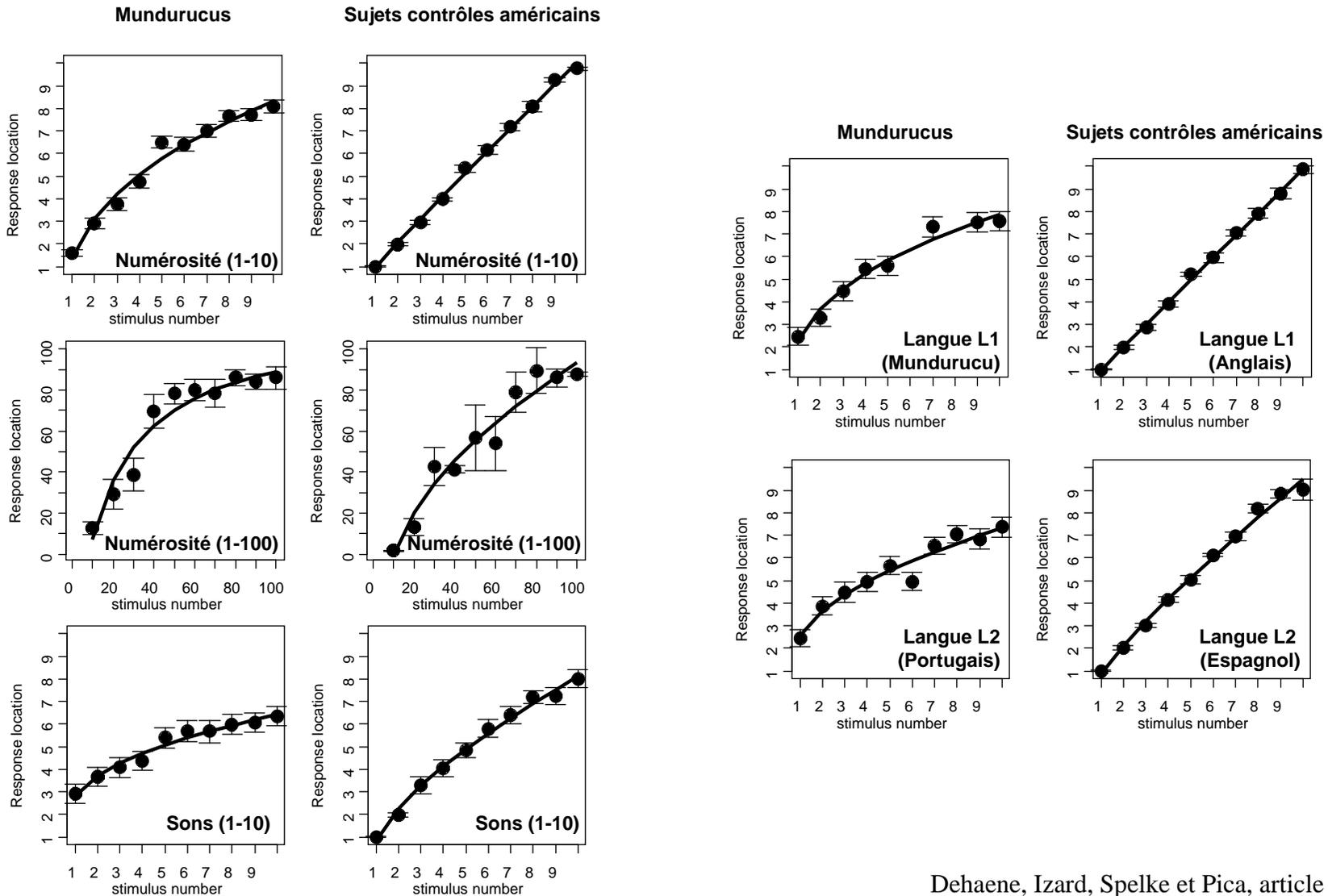


# Relations nombre-espace chez les Mundurucus

Les enfants et les adultes Mundurucus se comportent de façon logarithmique

-Pour les numérosités visuelles et auditives

-Et même pour les nombres présentés en Mundurucu et en Portugais



# Conclusions

L'apprentissage de symboles tels que les noms de nombres ou les chiffres arabes étend les compétences humaines d'au moins deux manières très différentes:

- Il donne accès à de nouveaux moyens de calcul : le comptage, l'addition et la soustraction exacte, la table de multiplication, les algorithmes de calcul à plusieurs chiffres
- La mise en connexion des symboles avec les quantités correspondantes modifie profondément la représentation mentale des quantités :
  - Elle devient précise, même pour les grands nombres
  - Nous concevons les nombres comme des points sur une échelle linéaire et non plus seulement comme des quantités approximatives discriminées en fonction de leur rapport, et donc reliées entre elles selon une loi logarithmique.
- La connexion (au sens littéral) de neurones codant pour des symboles arbitraires avec des neurones pré-existants codant pour la quantité fournit un embryon de solution extrêmement simple au problème de l'enracinement des symboles (*symbol grounding problem*).

## Références:

Dehaene, S. (2007). Symbols and quantities in parietal cortex : Elements of a mathematical theory of number representation and manipulation. *Attention & Performance XXII*, pp 527-574.  
([www.unicog.org](http://www.unicog.org))

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nat Rev Neurosci*, 9(4), 278-291.