



L'apprentissage et la mise en œuvre des faits arithmétiques

Pr. Michel Fayol

Université Blaise Pascal & CNRS

Collège de France Mars 2008

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr

Trois types de connaissances arithmétiques

Ashcraft, 1992, Delazer, 2000, Geary, 1994

- **Connaissances conceptuelles** relatives aux opérations et principes;
- **Connaissances procédurales** : e.g., algorithmes de calcul, comptage, routines; généralisables;
- **Connaissances déclaratives** : e.g. faits arithmétiques; instances ou chunks associant des opérands et des résultats; récupération directe en mémoire;

Connaissances procédurales ou déclaratives

Anderson, 1983, 1993, 1995

- **Connaissances déclaratives** : $2 \times 7 = 14$; $3 + 5 = 8$; encodent des connaissances **spécifiques**; stockées dans un réseau et retrouvées par diffusion de l'activation allant des opérandes vers le ou les associés; étayé par plusieurs résultats : amorçage, effet de distance, effet de parité, **effets d'interférence**;
- Connaissances procédurales:

Connaissances procédurales ou déclaratives

Anderson, 1983, 1993, 1995

- **Connaissances déclaratives** : $2 \times 7 = 14$; $3 + 5 = 8$; encodent des connaissances **spécifiques**; stockées dans un réseau et retrouvées par diffusion de l'activation allant des opérandes vers le ou les associés; étayé par plusieurs résultats : amorçage, effet de distance, effet de parité, effets d'interférence;
- **Connaissances procédurales**: sous forme de paires condition(s) \rightarrow action(s); quatre propriétés: modulaires, abstraites (i.e. générales), dirigées par but, asymétrie entre condition(s) et action(s); pas de sensibilité aux interférences;

Opérations et connaissances

- Quatre opérations :
 - **Multiplication** : connaissances déclaratives, faits arithmétiques ($3 \times 6 = 18$); mais aussi procédures diverses;
 - **Additions** : connaissances déclaratives, faits arithmétiques ($3 + 4 = 7$); connaissance procédurale : comptage (3 4 5 6 7);
 - **Soustractions** : connaissance procédurale (7 - 4 soit 5 6 7 soit 7 6 5); connaissance déclarative?
 - **Divisions**: connaissance procédurale s'appuyant sur les connaissances déclaratives de la multiplication;

Opérations et connaissances

- Quatre opérations :
 - Dissociations entre multiplications, additions et soustractions: indépendance des opérations?
 - Dissociations entre connaissances déclaratives et connaissance procédurale?
 - Résultats expérimentaux chez l'adulte;
 - Apprentissage?

Apprentissage

Ashcraft, 1992; Geary, 1994

- Conception dominante:
 - **Initialement** (5 ans à 8 ans?) : addition et soustraction; dominante procédurale: le comptage (Groen & Parkman, 1972); toutefois quelques récupérations (Siegler & Shrager, 1984);
 - **Adultes** : récupération dominante mais non exclusive (70% pour additions; 80% pour multiplications; LeFevre et al., 1996a, 1996b); problèmes de pratique (Geary et al., 1997)
 - **Transition** vers CE2 (3rd grade)? Changement de dominante? Pourquoi? Comment?

Trois questions

- Etayer la **plausibilité d'une transition procédural - déclaratif** chez l'enfant (Barrouillet & Fayol, 1998);
- Montrer que **l'addition conserve toujours un caractère procédural**, même si la récupération l'emporte (Roussel, Fayol & Barrouillet, 2001);
- Rechercher **une explication plausible à l'absence de récupération systématique** chez les enfants et les adultes (Thevenot, Fayol, & Barrouillet, 2001, 2004; Thevenot, Fanget, & Fayol, 2007);

Une transition procédural- déclaratif?

Le paradigme alphanumérique

L'automatisme comme récupération

Logan & Klapp, 1991;

Barrouillet & Fayol, 1998

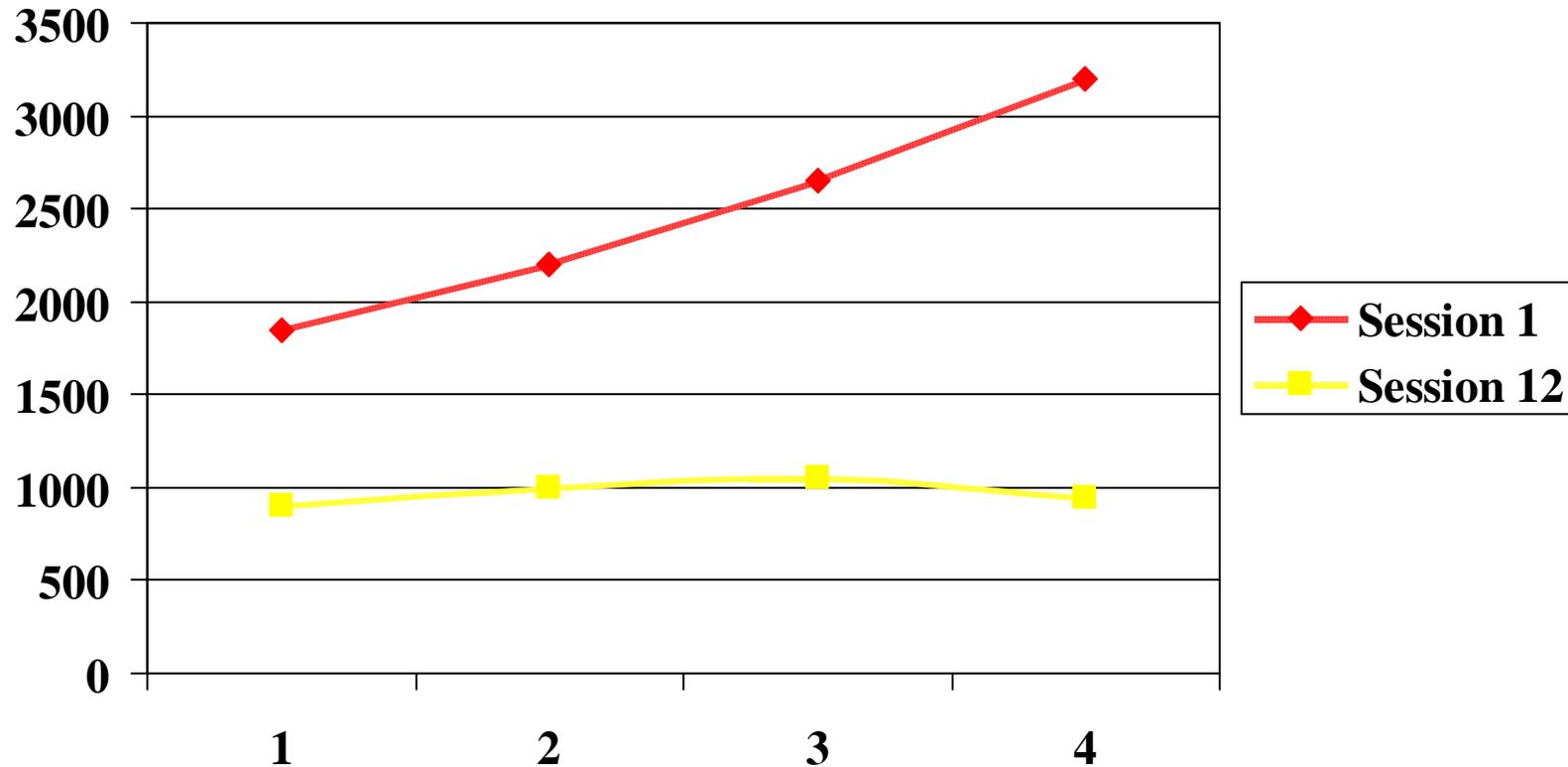
Alpharithmétique

Klapp & Logan, 1991

Faits	Lettre	Ajout	Réponse
1	B	2, 3, 4	D, E, F
	N	2, 3, 4	P, Q, R
2	H	2, 3, 4	J, K, L
	T	2, 3, 4	V, W, X

Alpharithmétique

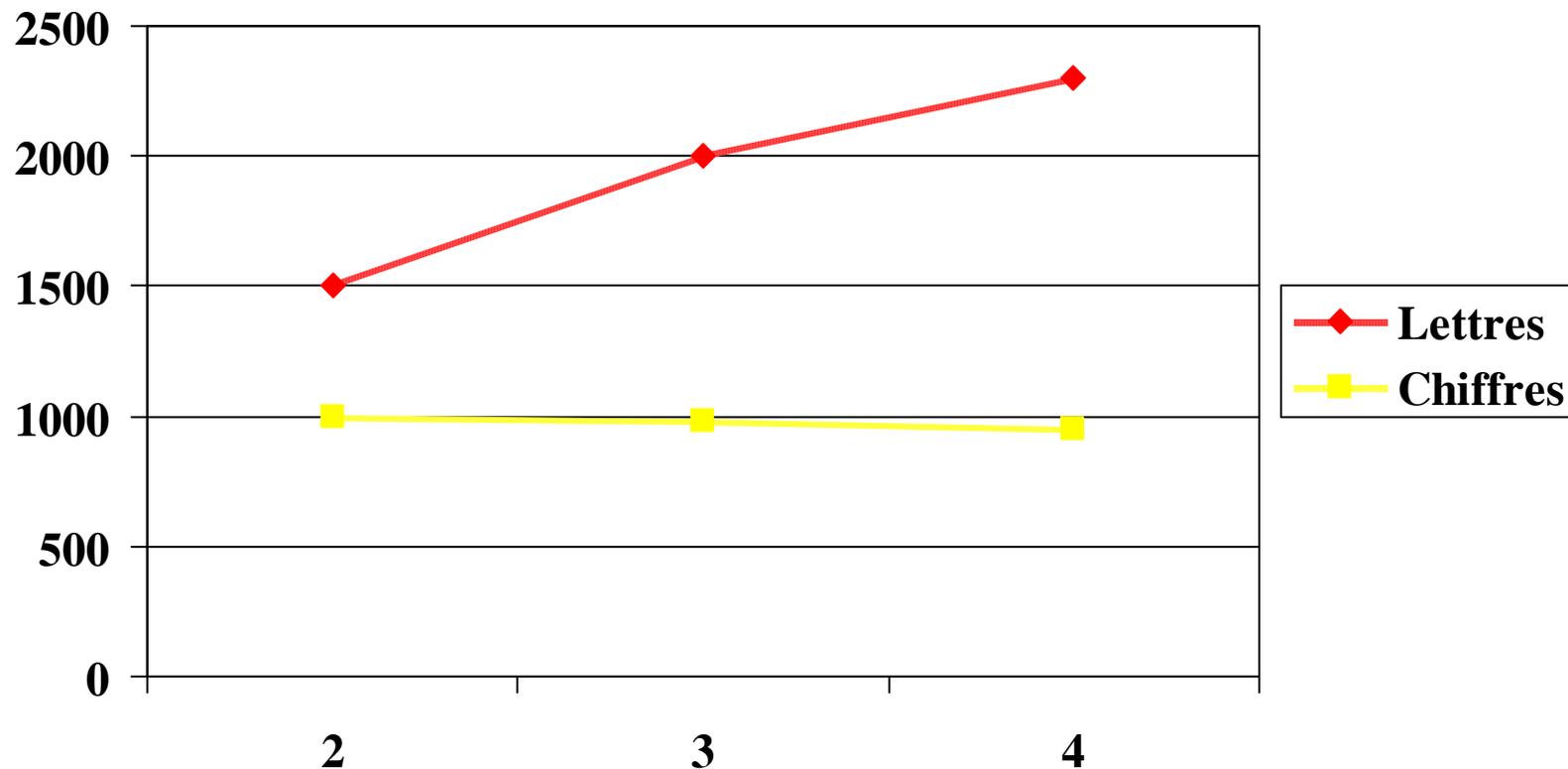
Logan & al. 1991



TR pour les Sessions 1 et 12 en fonction du chiffre à ajouter (réponses exactes) aux items lettres.

Alpharithmétique

Klapp & Logan, 1991



TR en fonction de l'ajout (2, 3, 4) et de la nature (lettre vs chiffre) de l'item.

Alpharithmétique

Klapp & Logan, 1991

Niveau d'entraînement	Enoncé des mois	Contrôle
Novices	33,5%	14%
Automatique	16,4%	5,4%
Surentraînés	6,3%	1,5%

Pourcentages d'erreurs aux vérifications.

Alpharithmétique

Klapp & Logan, 1991

- La pratique induit un **passage de l'utilisation d'une procédure** lente et coûteuse **à la récupération en mémoire**, rapide et peu coûteuse; automatisaion;
- Néanmoins, **la poursuite de la pratique entraîne une diminution du coût** de récupération;
- Les résultats sont les mêmes que l'on entraîne via une procédure ou qu'on induise un apprentissage par cœur des associations;

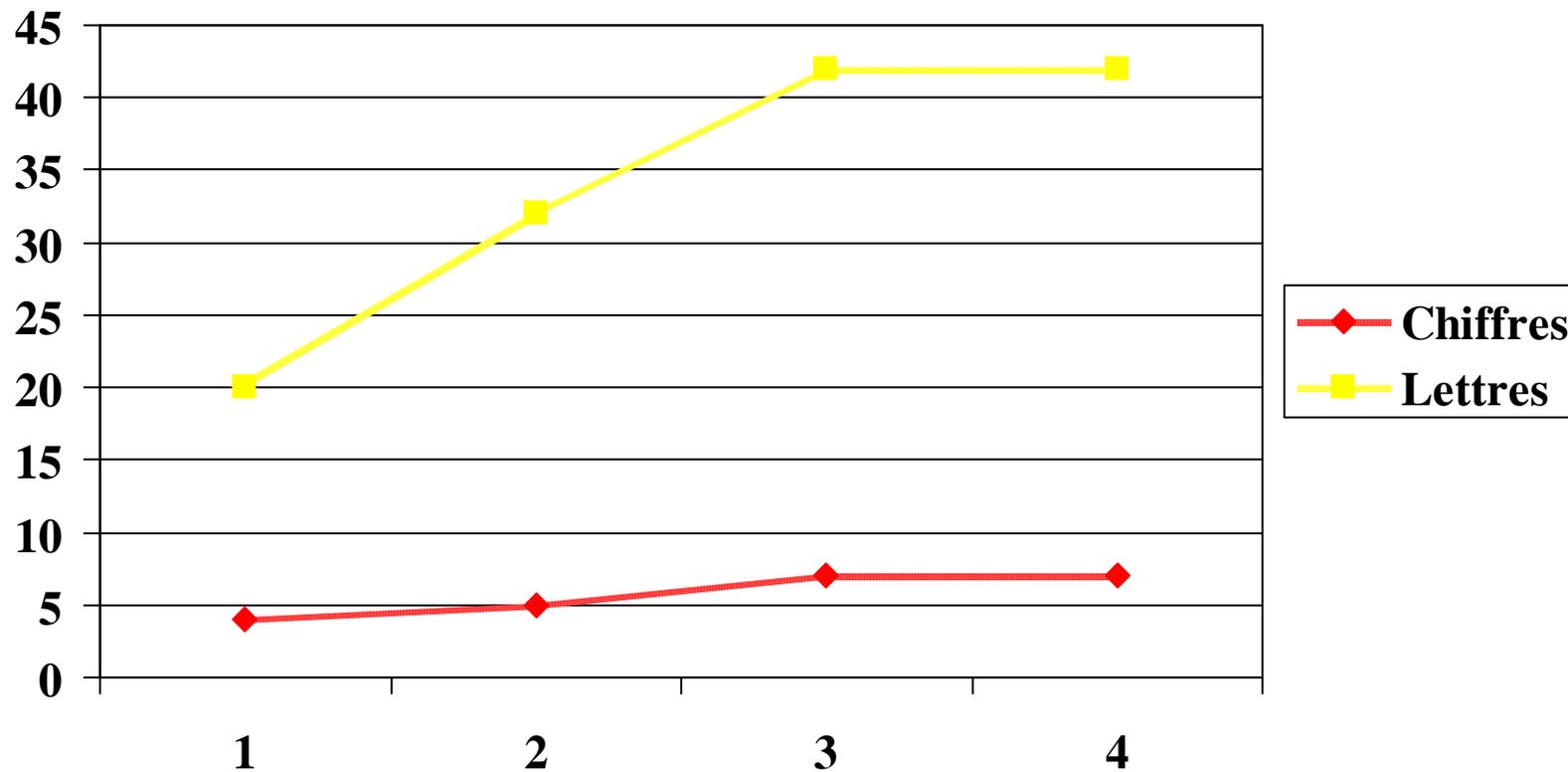
Alpharithmétique

Barrouillet & Fayol, 1998

Série initiale	Ajouts	Série attendue
C	+1 +2 +4	D E G
LT	-1 -3	KS IQ
AHT	+3	CJV
CKQH	-2	AIOG

Alpharithmétique

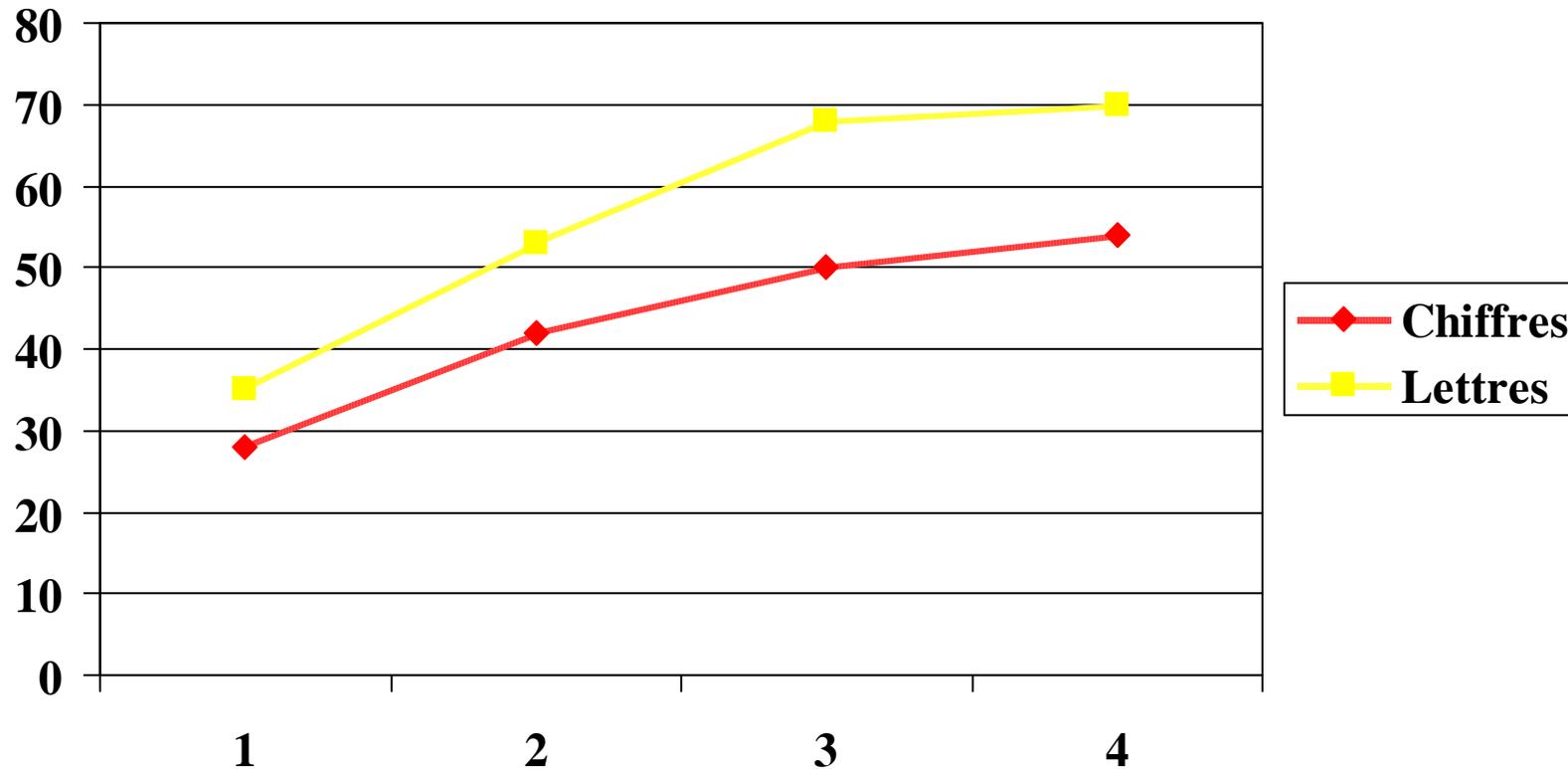
Barrouillet & Fayol, 1998



Pourcentages d'erreurs de production en classe de Première

Alpharithmétique

Barrouillet & Fayol, 1998

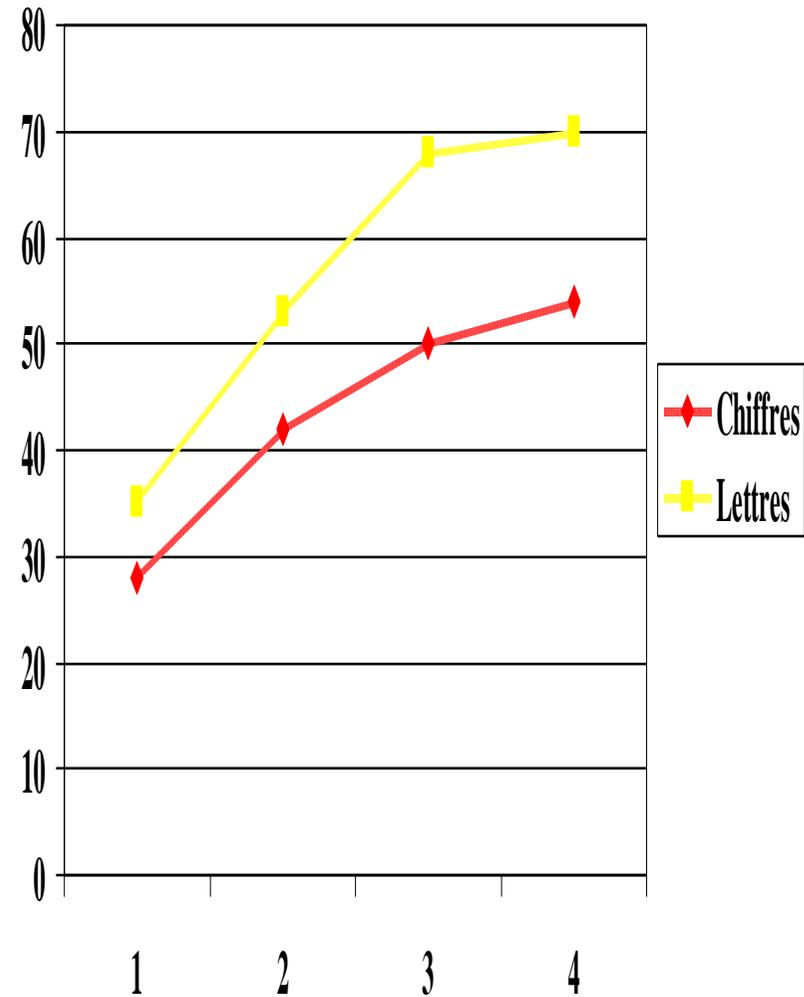
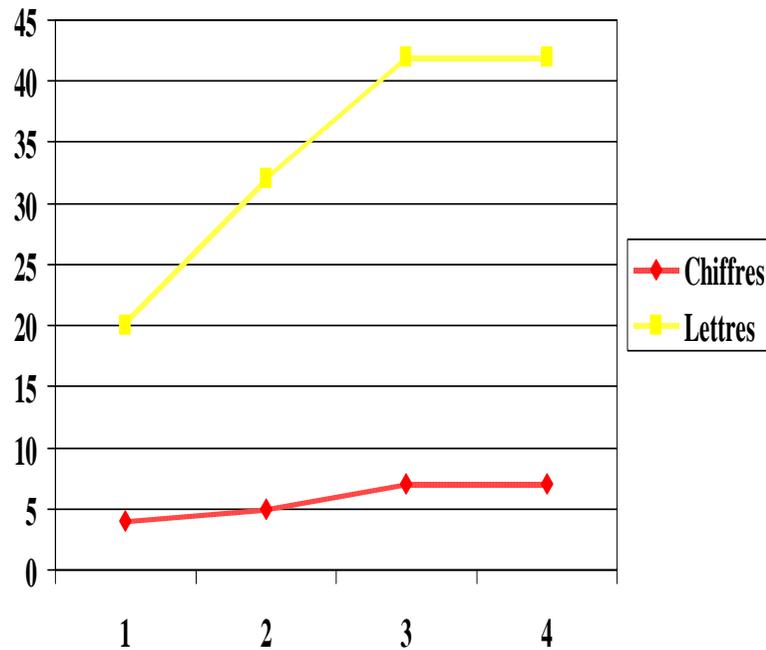


Pourcentages d'erreurs aux items chiffres et lettres en CE1
(deuxième primaire)

Alpharithmétique

Barrouillet & Fayol, 1998

Comparaison des pourcentages d'erreurs en Première (gauche) et en CE1 (droite) aux chiffres et aux lettres.



Alpharithmétique: conclusions

Barrouillet & Fayol, 1998

- Chez les jeunes enfants (CE1), les chiffres et les lettres donnent lieu au même patron de performance : les erreurs augmentent avec le nombre de pas (+ ou - 1, 2, ...) et le nombre d'éléments à transformer;
- Chez les adultes, seules les lettres font apparaître ce patron, pas les chiffres;
- Les enfants traitent les additions et soustractions de manière procédurale; évolution vers la récupération liée à la pratique;

L'amorçage par le signe

L'addition reste-t-elle toujours procédurale,
au moins potentiellement?

Roussel, Fayol & Barrouillet, 2001

Fayol et al., en préparation

Rappel sur l'opposition procédural/déclaratif

- Les **connaissances déclaratives** sont des chunks (ou instances) qui encodent des **contenus spécifiques** (3, 4, 12, 7) et qui ne peuvent être activées que par ceux-ci; leur récupération est sujette aux **interférences** entre items car beaucoup d'items sont activés par un petit nombre d'éléments (i.e. les dix chiffres de 0 à 9);

Rappel sur l'opposition procédural/déclaratif

- Les **connaissances déclaratives** sont des chunks (ou instances) qui encodent des **contenus spécifiques** (3, 4, 12, 7) et qui ne peuvent être activées que par ceux-ci; leur récupération est sujette aux **interférences** entre items car beaucoup d'items sont activés par un petit nombre d'éléments (i.e. les dix chiffres de 0 à 9);
- Les **connaissances procédurales** sont des règles de production générales (i.e. elles contiennent des variables), abstraites, activées par des buts, largement insensibles aux interférences; elles sont **amorçables** (Sohn & Carlson, 1998);

Hypothèse procédural/déclaratif

- La présentation du **signe (+ vs x) avant l'apparition des opérandes** devrait amorcer la résolution des additions car elle repose (aussi) sur une procédure mais pas la résolution des multiplications, qui dépend des contenus spécifiques encodés;

Hypothèse procédural/déclaratif

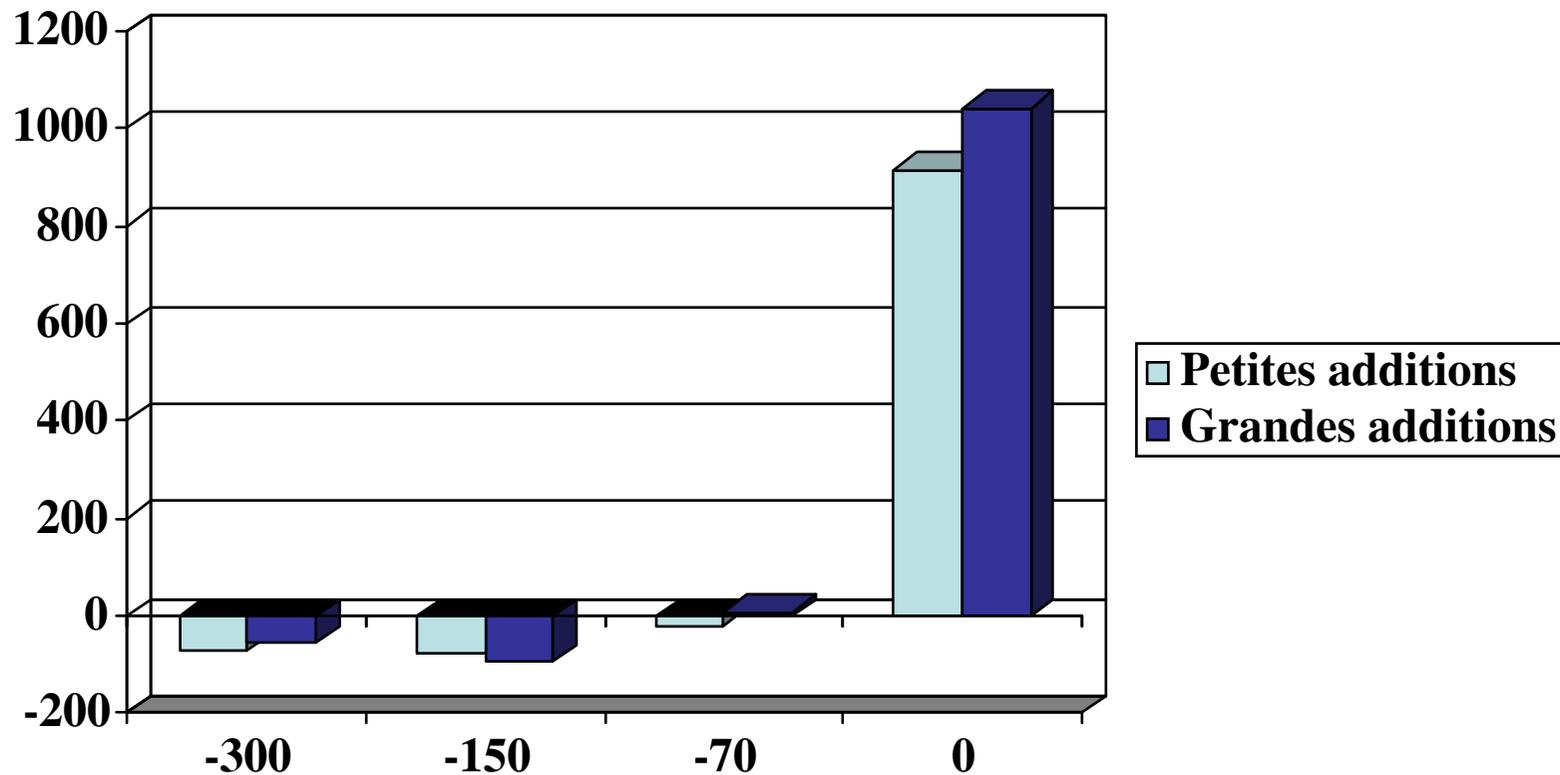
- La présentation du **signe (+ vs x) avant l'apparition des opérandes** devrait amorcer la résolution des additions car elle repose (aussi) sur une procédure mais pas la résolution des multiplications, qui dépend des contenus spécifiques encodés;
- **Prédictions :**
 - TR réduits pour + (et -) mais pas pour x;
 - Effets classiques : effet de taille plus important pour addition que pour multiplication; interférences plus importantes avec les multiplications;

Trois expériences

- Tâche de jugement (vrai vs faux) d'opérations (2 x 7 = 9?);
- Opérations petites (2 7, 3 6, 5 3, 8 2) vs grandes (4 9, 6 8, 9 7, 8 4);
- Résultat proposé (2 7) : vrai (14), faux interférent (9), faux non interférent (10);
- Signe (+ vs x) présenté soit avant (-300, -150, -70 ms) soit en même temps (0) soit après (+150, +240, +300, +500) ms (Exp. 1 et 2); -150, 0, +150 Exp. 3;

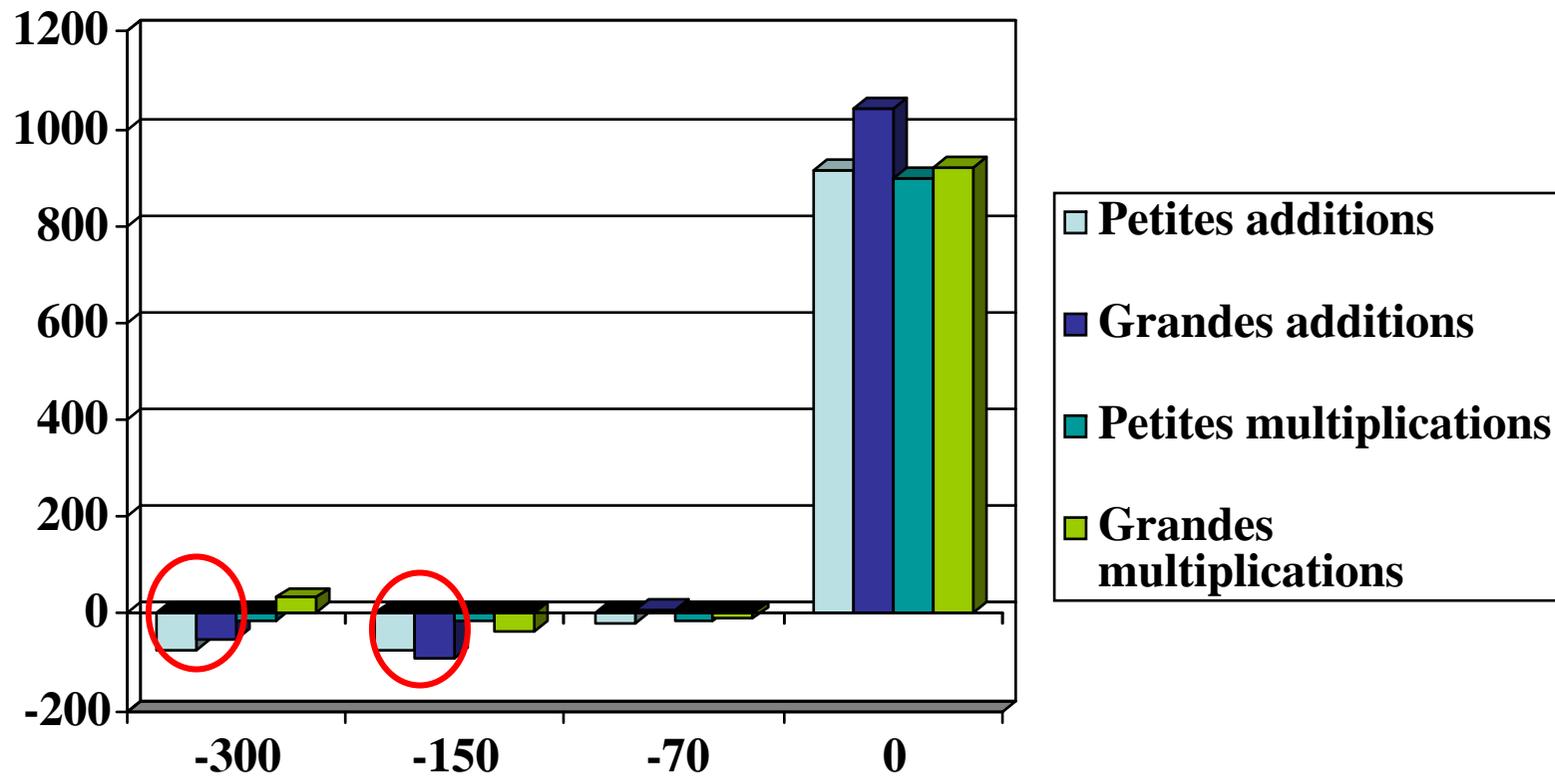
Gains associés à la présentation préalable du signe

Gains par rapport à la condition Oms



Gains associés à la présentation préalable du signe

Gains par rapport à la condition Oms



Amorçage par le signe: résultats

- Additions toujours vérifiées plus lentement que multiplications;
- Amorçage par le signe pour les seules additions, à -300 et -150 ms mais pas à -70 ms (temps nécessaire pour activer une procédure en MT; modèle ACT*); multiplications résolues par récupération directe en mémoire; additions « résolubles » par procédure;
- Effet de taille plus important pour additions que pour multiplications;
- Effet d'interférence pour les multiplications, pas pour les additions;

Amorçage par le signe: conclusion

- Tous les modèles d'apprentissage prévoient que les opérations $+$ et x sont résolues à 100% par récupération; les données empiriques ne vérifient pas cette prédiction (LeFevre et al., 1996a, 1996b);
- Tous les modèles (sauf Baroody, 1983) postulent que la récupération est toujours plus rapide que l'emploi de la procédure; en est-on certain? Comment procédez-vous pour résoudre $178 + 3$?
- Envisageable que les additions conservent toujours une dimension procédurale et que celle-ci soit souvent (?) aussi rapide et efficace que la récupération;
- Généralisation à la soustraction en production (Fayol & Berger, en cours);

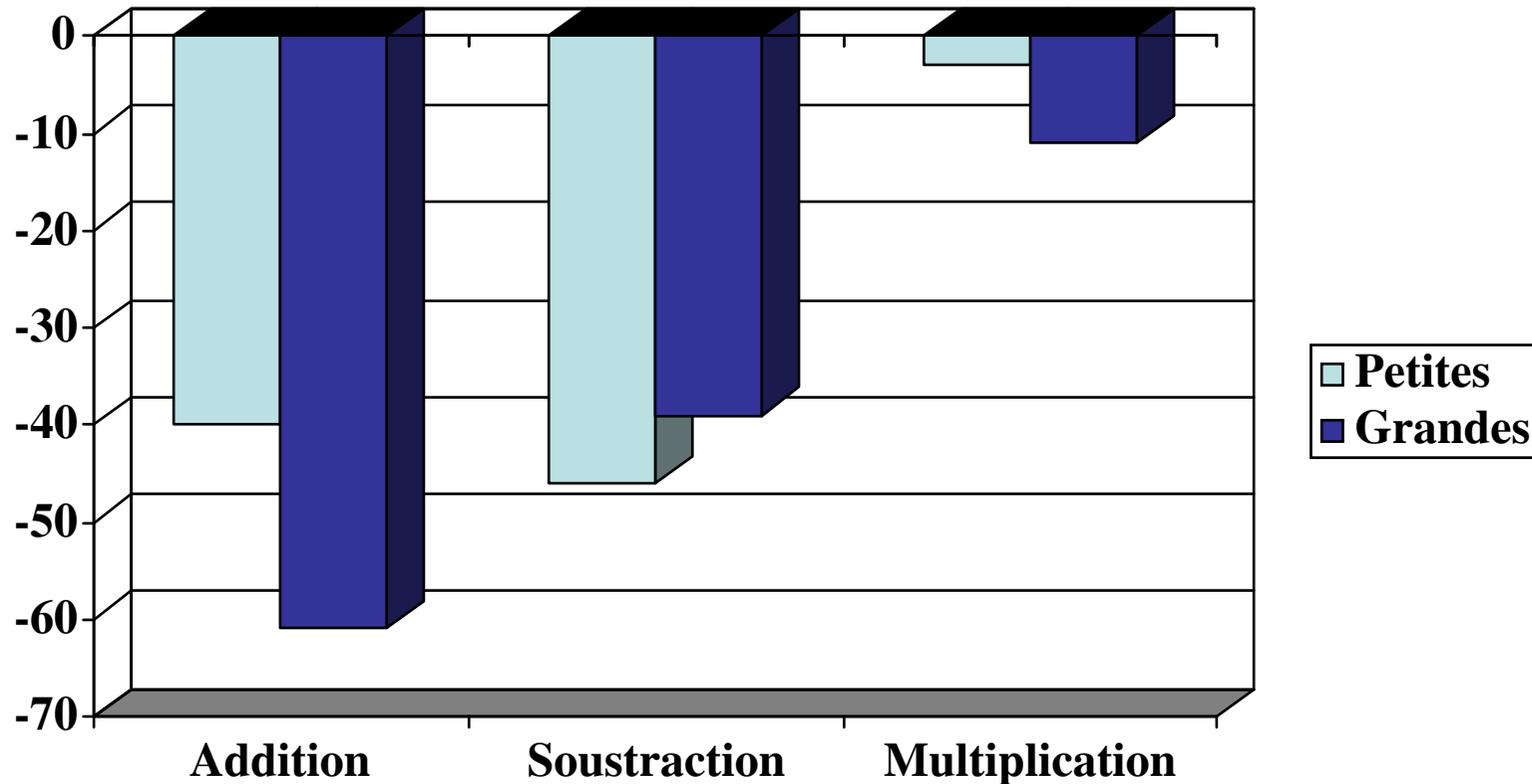
Extension à la soustraction

Fayol et al., en préparation

- Tâche de production (enregistrement des TR avec clé vocale);
- Adultes;
- Trois opérations : Additions; Soustractions; Multiplications;
- Deux tailles: petites et grandes;
- Trois SOA : -150, 0, +150 ms

Résultats

Gains par rapport à la condition Oms



Seules l'addition et la soustraction présentent un gain associé à la présentation anticipée du signe.

Pourquoi certains individus ne parviennent-ils pas à mémoriser les faits arithmétiques?

Deux hypothèses : encodage vs récupération des associations

Thevenot, Fayol, & Barrouillet, 2001

Thevenot, Fanget, & Fayol, 2007

Barrouillet, Fayol, & Lathulière, 1997

L'hypothèse d'encodage

Un nouveau paradigme

Thevenot, Barrouillet, & Fayol, 2001

Thevenot, Fanget, & Fayol, 2007

Difficulté du passage du procédural au déclaratif

- Tous les modèles postulent un passage systématique du traitement procédural (e.g. le comptage) à la mise en mémoire des faits (Logan, 1988; Siegler, 1996);
- Pourtant, de nombreux adultes ne récupèrent pas en mémoire tous les faits simples (e.g., $7 + 8$) (LeFevre et al, 1996);
- Pourquoi? Deux hypothèses **difficultés de mémorisation vs difficultés de récupération**

Difficulté de mémorisation : passage du procédural au déclaratif

- La mémorisation d'une association (chunk ou instance) entre deux opérandes et un résultat nécessite la présence des trois dans le même focus attentionnel (Logan, 1988; Logan et al., 1996); dépend donc des ressources d'attention disponibles;

Difficulté du passage du procédural au déclaratif

- La mémorisation d'une association (chunk ou instance) entre deux opérandes et un résultat nécessite la présence des trois dans le même focus attentionnel (Logan, 1988; Logan et al., 1996); dépend donc des ressources d'attention disponibles;
- La mise en œuvre d'un algorithme (e.g. le comptage) est lente et coûteuse, particulièrement chez les enfants (Siegler, 1996); en conséquence, le temps mis pour atteindre le résultat pourrait entraîner une diminution de l'activation des opérandes et des traces en mémoire (Towse & Hitch, 1995); une fois l'algorithme achevé, les opérandes ne seraient plus assez activés pour permettre la constitution d'un chunk en mémoire;

Regardez

$$37 + 28$$

Regardez

65 vrai ou faux?

Regardez

Avez-vous vu 37?

Regardez

43 69

Regardez

52 est-il entre les deux nombres?

Regardez

Avez-vous vu 69?

Hypothèses

- La résolution d'opérations par application d'algorithmes dégrade les traces mémorielles des opérands: augmentation des erreurs et des durées de reconnaissance des opérands;
- La (simple) comparaison ne dégrade pas les traces: les erreurs sont plus rares et les durées de reconnaissance plus brèves;

Résultats

	Addition	Soustraction	Comparaison
Réponses correctes	.90	.94	.98
Reconnaisances correctes	.88	.92 A et S contre C	.98
TR	1859	1809 A et S contre C	1401

L'exécution d'un algorithme dégrade les traces mémorielles des opérandes et rend difficile la mémorisation des associations entre opérandes et résultats. D'autant plus que l'algorithme demande de temps : effet de taille.

Difficultés de remémoration

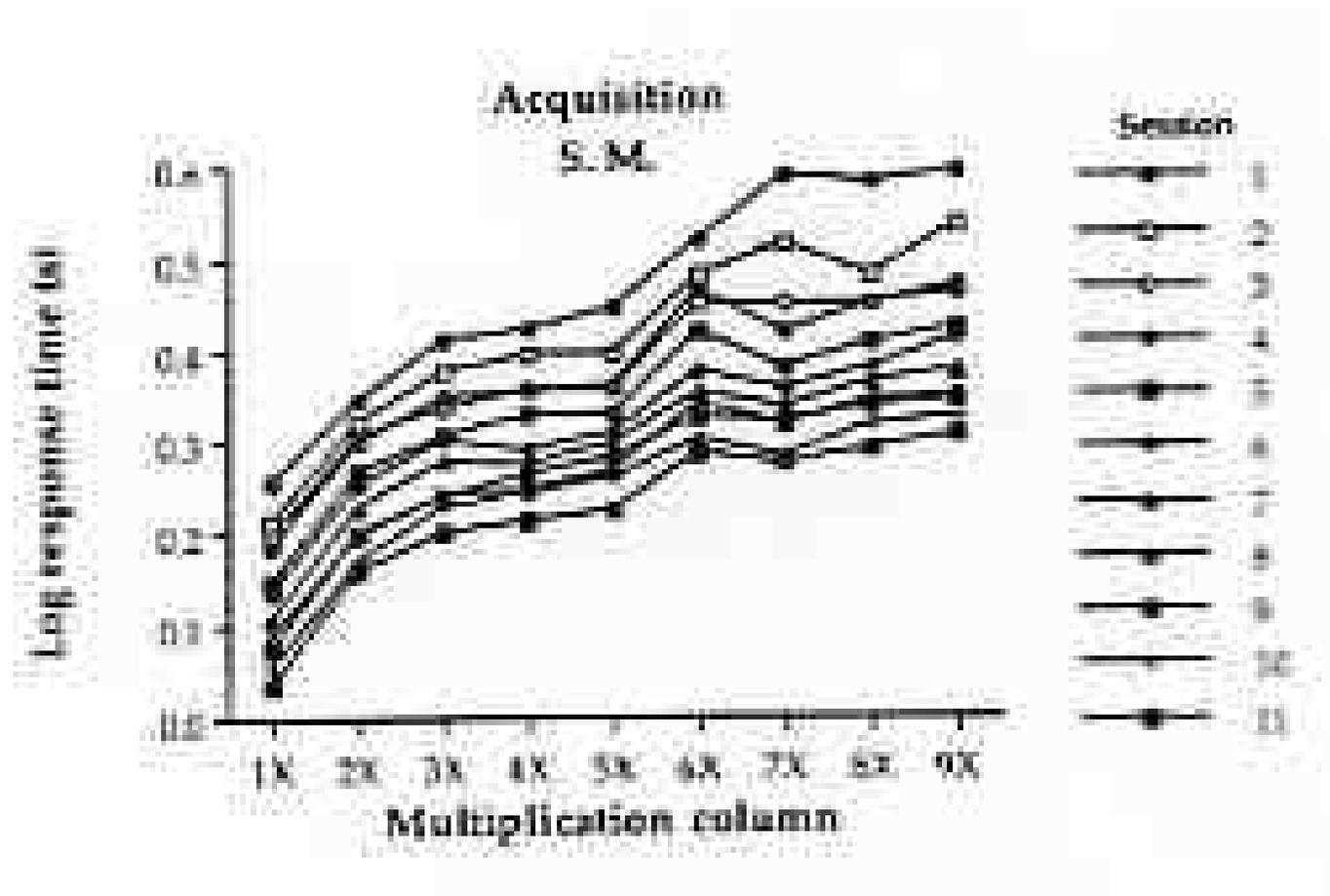
Les effets d'interférence

Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997

Effet de l'entraînement sur l'apprentissage des multiplications.

Effet d'interférence

Healy et al. 1995



Production de résultats aux multiplications simples

Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997

- Exp. 1: 20 élèves de 5ème SEGPA (13;8 ans) (Difficultés d'Apprentissage = DA) et 24 élèves de 4ème (13;6 ans) (Sans Difficulté = SD);
- Tous doivent résoudre en temps limité 64 multiplications $m \times n$ avec m et n entre 2 et 9;
- Temps limité déterminé par la durée de résolution d'opérations de types 3×1 , etc.;

Résultats

- Réussites 74% (DA) contre 92% (SD) :
85% des erreurs sont dans la Table de multiplications (mêmes proportions pour DA et SD); 68% de ces erreurs sont dans la table de l'un des 2 opérandes;
- Qu'est-ce qui prédit les erreurs?

Résultats

- Réussites 74% (DA) contre 92% (SD) : 85% des erreurs sont dans la Table de multiplications (mêmes proportions pour DA et SD); 68% de ces erreurs sont dans les tables de l'un des 2 opérandes;
- Qu'est-ce qui prédit les erreurs?
 - La taille des résultats (produit $m \times n$) : 43% de variance; plus le produit est grand, plus fréquentes sont les erreurs;
 - Le nombre de produits aboutissant au même résultat (4 x 6; 6 x 4; 3 x 8; 8 x 3) : 12 et 24 ont un taux élevé d'échec (e.g. : 8 x 3 70 et 88%; 3 x 8 65 et 92%; 4 x 6 60 et 88%; 6 x 4 55 et 96%); 5% de variance; seulement les DA;

Résultats : corrélations

Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997

	Campbell & Graham, 1995 Adultes	Wheeler (1941) 3ème primaire
Wheeler	.76	
DA B, F, & L	.75	.83

Les patrons de réussite sont très proches entre tous les participants, enfants et adultes.

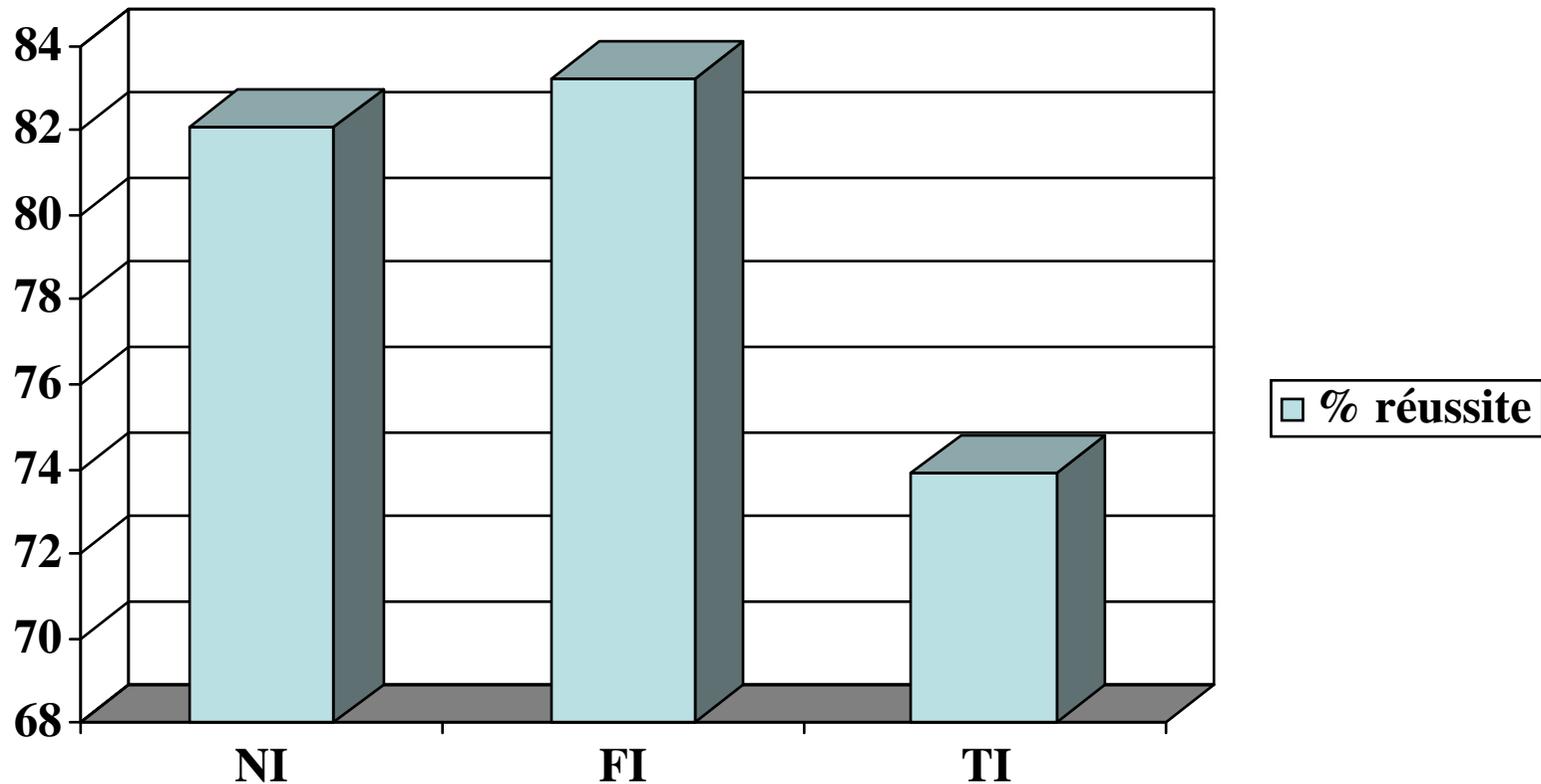
Tâche de jugement

Barrouillet, Fayol & Lathulière, 1997

- 24 élèves DA de 13;9 ans;
- 33 problèmes (e.g. 3×4) associés chacun à quatre résultats; doivent choisir le résultat exact en 7 sec.:
 - Exact : 12;
 - Non interférent (NI) : pas dans les Tables (13);
 - Faiblement interférent (FI) : autres Tables que celles des deux opérandes (14);
 - Très interférent (TI) : dans les Tables d'un des deux interférents (9, 15, 16);

Résultats

Epreuve de choix



La difficulté se situe au niveau de la sélection de la bonne réponse parmi les compétiteurs.

En résumé

- La question des modes de résolution n'est pas tranchée : procédure vs récupération;
- Les performances lors de l'utilisation des faits peuvent être faibles pour au moins deux raisons:
 - Des difficultés d'encodage, liées par exemple à des ressources trop faibles en attention ou en mémoire;
 - Des difficultés de récupération, en particulier;
 - Des difficultés de consolidation, non étudiées jusqu'alors;

Pour conclure

A suivre...

La question de l'apprentissage;
Celle du coût de résolution et des
procédures

Des types différents d'opérations

- Les données de la littérature suggèrent que les opérations impliquant 0 et 1 sont résolues par des procédures (i.e., des règles);
- Que les doubles (e.g., $3 + 3$) sont systématiquement récupérés en mémoire;
- Que les petites opérations (m et $n < 5$) sont systématiquement récupérées;
- Que les grandes opérations sont plus rarement récupérées et donnent lieu à l'emploi de procédures diverses;

Comment ces types d'opérations réagissent-ils à l'entraînement?

- Deux classes de CE2 : 18 élèves entraînés (E), 9 témoins suivant un enseignement usuel (SE);
- Entraînement durant 7 sessions de 6 jours chacune : 54 opérations (+, -, x) entraînées systématiquement par groupes de 9 (+, -, x) chaque jour;
- Pré-test (mars); post-test1 (juin); post-test2 (octobre);

Comment ces types d'opérations réagissent-ils à l'entraînement?

- Pré-test :
 - Mesure de l'empan de lettres en mémoire à court terme;
 - Présentation de 30 opérations (5 avec 0; 5 avec 1; 5 doubles; 5 petites; 10 grandes);
 - Procédures : série de lettres (= empan de chaque enfant) puis opération puis réponse puis rappel des lettres;
 - **VD : Distance à l'empan (DE) = Nombre de lettres de l'empan - Nombre de lettres rappelées;**
 - Plus une opération est difficile et plus la MCT est sollicitée, moins elle peut retenir d'éléments secondaires (par rapport à la résolution), et donc plus la distance à l'empan augmente;

Comment ces types d'opérations réagissent-ils à l'entraînement?

- Résultats:
- Réussites : TB avec 0 dès juin; excellentes (100%) avec Un; TB avec Doubles pour + et - mais environ 20% d'erreurs avec x; TB avec petites (3% erreurs); Grandes : 5 à 6% d'erreurs avec + et -; environ 30% avec x;
- DE sur les opérations réussies:
 - La DE diminue avec l'entraînement pour les opérations avec 0 et Un et avec les Doubles et les Petites;
 - Homogénéisation des performances avec l'entraînement; pas vrai dans le Groupe;
 - Trop d'erreurs avec les Grandes pour étudier les variations de DE;
 - DE plus faible avec + qu'avec - et x (ne diffèrent pas); avec Un < 0 et Doubles < Petites;

Recherche d'indicateurs permettant de ...

- Mieux comprendre les difficultés et leurs origines : encodage, consolidation, récupération, interférence;
- Mieux concevoir les interventions en les adaptant aux difficultés spécifiques;

Merci pour votre attention

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr