

Interpréteurs abstraits mécanisés

David Pichardie



Comment vérifier un logiciel ?

Comment vérifier un logiciel ?

La complexité croissante des logiciels nécessite des techniques de validation toujours plus efficaces

Comment vérifier un logiciel ?

La complexité croissante des logiciels nécessite des techniques de validation toujours plus efficaces

- Vérification manuelle
 - ➔ ne passe pas à l'échelle

Comment vérifier un logiciel ?

La complexité croissante des logiciels nécessite des techniques de validation toujours plus efficaces

- Vérification manuelle
 - ➔ ne passe pas à l'échelle
- Recherche automatique d'erreurs
 - ➔ peut oublier des erreurs

Comment vérifier un logiciel ?

La complexité croissante des logiciels nécessite des techniques de validation toujours plus efficaces

- Vérification manuelle
 - ➔ ne passe pas à l'échelle
- Recherche automatique d'erreurs
 - ➔ peut oublier des erreurs
- Vérification automatique exhaustive
 - ➔ trouve toutes les erreurs, mais peut lancer des fausses alarmes
exemple : l'analyseur Astrée

<http://www.astree.ens.fr/>



logiciel de commande de vol
~1M lignes de code C
0 alarmes

Comment vérifier un logiciel ?

La complexité croissante des logiciels nécessite des techniques de validation toujours plus efficaces

- Vérification manuelle
 - ➔ ne passe pas à l'échelle
- Recherche automatique d'erreurs
 - ➔ peut oublier des erreurs
- Vérification automatique exhaustive
 - ➔ trouve toutes les erreurs, mais peut lancer des fausses alarmes
exemple : l'analyseur Astrée

<http://www.astree.ens.fr/>



logiciel de commande de vol
~1M lignes de code C
0 alarmes



WHO WATCHES THE WATCHMEN? 😊

Comment vérifier un logiciel ?

La complexité croissante des logiciels nécessite des techniques de validation toujours plus efficaces

- Vérification manuelle
 - ➔ ne passe pas à l'échelle
- Recherche automatique d'erreurs
 - ➔ peut oublier des erreurs
- Vérification automatique exhaustive
 - ➔ trouve toutes les erreurs, mais peut lancer des fausses alarmes
exemple : l'analyseur Astrée
- Vérification formelle vérifiée
 - ➔ le vérificateur est accompagné d'une preuve de sa propre correction
 - ➔ la preuve est vérifiée dans un assistant de preuve

<http://www.astree.ens.fr/>



logiciel de commande de vol
~1M lignes de code C
0 alarmes

Comment vérifier le vérificateur ?

Comment vérifier le vérificateur ?

Une idée simple

Comment vérifier le vérificateur ?

Une idée simple

Programmer et prouver le vérificateur dans le même langage !

Comment vérifier le vérificateur ?

Une idée simple

Programmer et prouver le vérificateur dans le même langage !

Quel langage ?

Comment vérifier le vérificateur ?

Une idée simple

Programmer et prouver le vérificateur dans le même langage !

Quel langage ?



Coq : un animal à deux visages...

Premier visage

- un assistant de preuve qui permet de prouver de façon interactive des preuves mathématiques

Deuxième visage

- un langage de programmation fonctionnelle avec un système de type très riche

```
tri :  $\forall l: \text{list int}, \{ l': \text{list int} \mid \text{Triée } l \wedge \text{Permutation } l \ l' \}$ 
```

- et un mécanisme d'extraction vers OCaml

```
tri : int list  $\rightarrow$  int list
```

Méthodologie

Méthodologie

Systeme formel
(ici Coq)

Méthodologie

Nous programmons l'analyseur en Coq

Definition analyzer (p:program) := ...

Analyseur
statique

Système formel
(ici Coq)

Méthodologie

Nous programmons l'analyseur en Coq

Definition `analyser (p:program) := ...`

Nous énonçons son théorème de correction vis-à-vis de la sémantique formelle du langage analysé

Theorem `analyser_is_sound :`
`∀ p, analyser p = Yes → Sound(p)`

Analyseur
statique

Sémantique du
langage

Système formel
(ici Coq)

Méthodologie

Nous programmons l'analyseur en Coq

Definition analyzer (p:program) := ...

Nous énonçons son théorème de correction vis-à-vis de la sémantique formelle du langage analysé

Theorem analyser_is_sound :
 $\forall p, \text{analyser } p = \text{Yes} \rightarrow \text{Sound}(p)$

Nous prouvons ce théorème de manière interactive

Proof. ... (* few days later *) ... **Qed.**

Analyseur
statique

Sémantique du
langage

Preuve de correction

Système formel
(ici Coq)

Méthodologie

Nous programmons l'analyseur en Coq

Definition `analyser (p:program) := ...`

Nous énonçons son théorème de correction vis-à-vis de la sémantique formelle du langage analysé

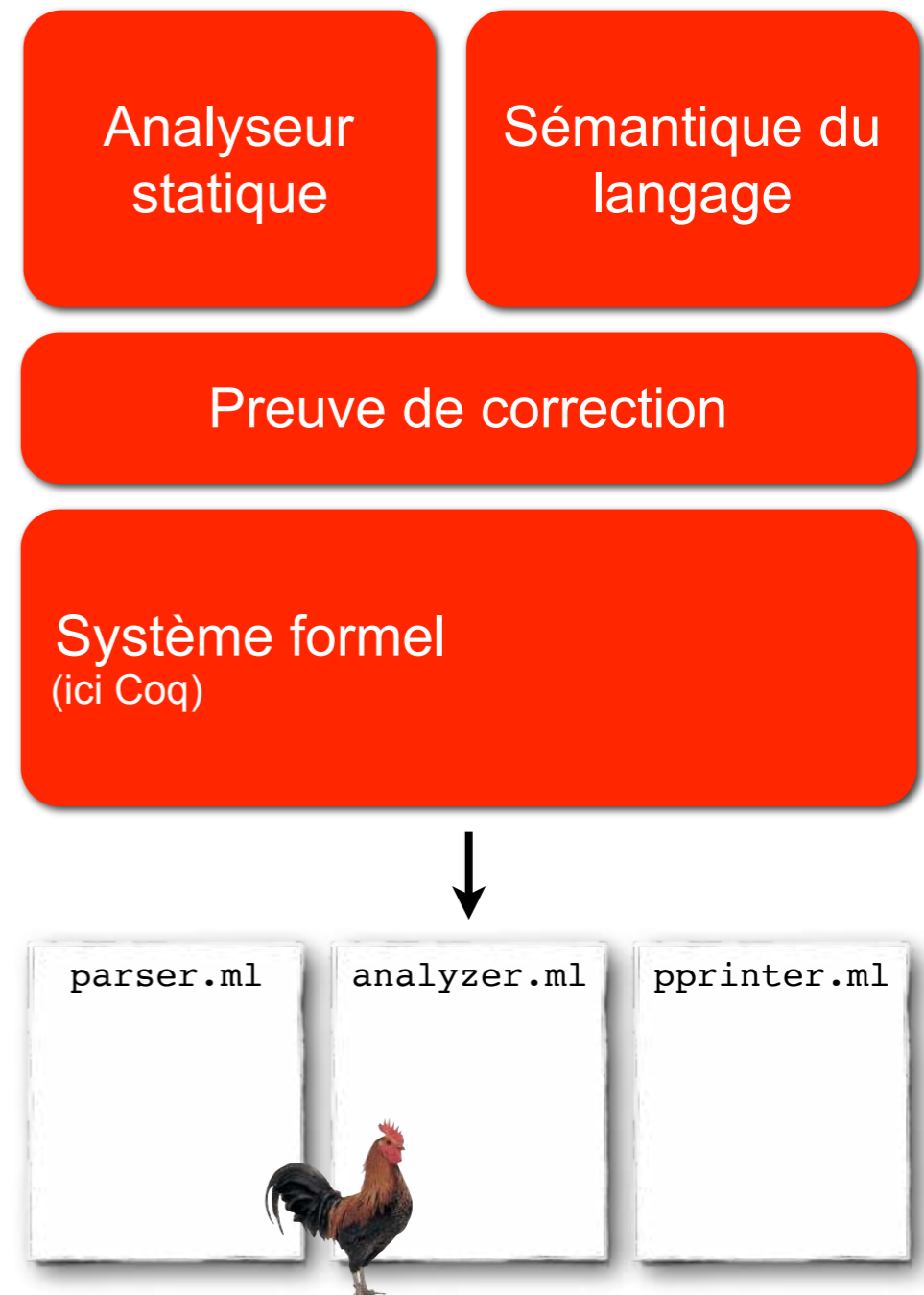
Theorem `analyser_is_sound :`
`∀ p, analyser p = Yes → Sound(p)`

Nous prouvons ce théorème de manière interactive

Proof. ... (* few days later *) ... **Qed.**

Nous extrayons une implémentation OCaml de l'analyseur

Extraction `analyser.`



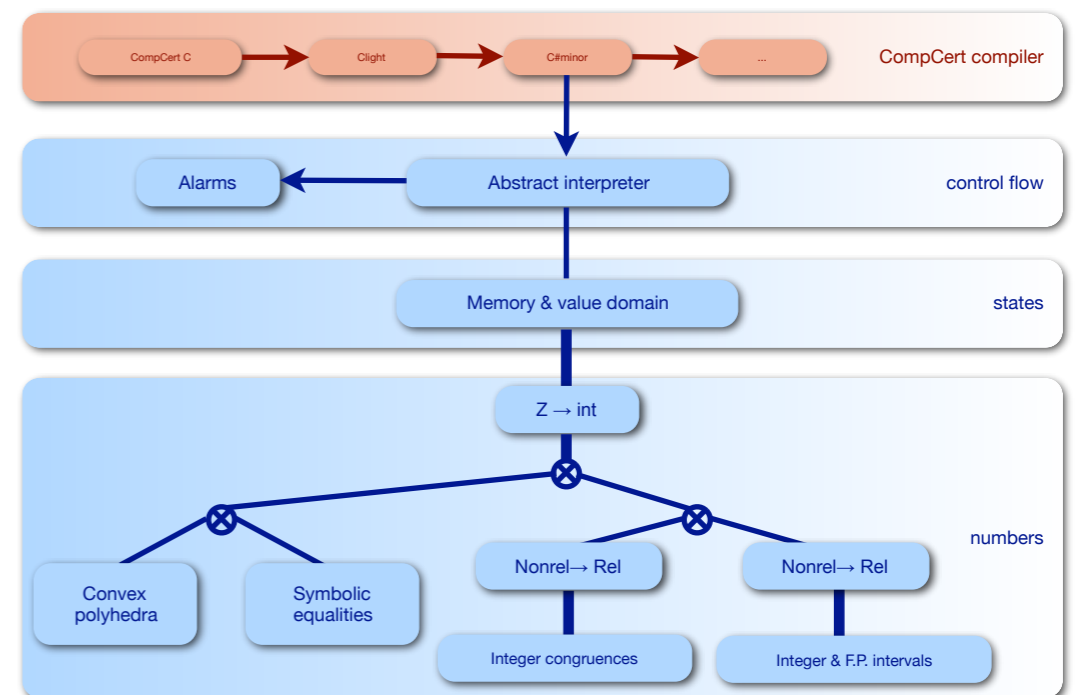
Plan de ce séminaire

Un interpréteur abstrait dénotationnel vérifié

```
Fixpoint AbSem (i:instr) (l2:pp): t -> array t :=
  match i with
  | Skip l1 => fun Pre => ⊥# +[l1→Pre]# +[l2→Pre]#
  | Assign l1 x e => fun Pre => ⊥# +[l1→Env]# +[l2→AbEnv.assign Env x e]#
  | Assert l1 t => fun Pre => ⊥# +[p→Env]# +[l→AbEnv.assume t Env]#
  | If l1 t i1 i2 => fun Pre =>
    let C1 := AbSem i1 l2 (AbEnv.assert t Env) in
    let C2 := AbSem i2 l2 (AbEnv.assert (Not t) Env) in
    (C1 ⊔# C2) +[l1→Env]#
  | While l1 t i => fun Pre =>
    let I := approx_lfp
      (fun X => Env ⊔# (get (AbSem i l1 (AbEnv.assume t X)) l1)) in
    (AbSem i l1 (AbEnv.assume t I)) +[l1→I]# +[l2→AbEnv.assume (Not t) I]#
  | Seq i1 i2 => fun Pre =>
    let C := (AbSem i1 (first i2) Pre) in
    C ⊔# (AbSem i2 l2 (get C (first i2)))
  end.
```

David Cachera and David Pichardie. A certified denotational abstract interpreter. In *Proc. of International Conference on Interactive Theorem Proving (ITP-10)*, volume 6172 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 9--24. Springer-Verlag, 2010

Un interpréteur abstrait C vérifié : Verasco



Jacques-Henri Jourdan, Vincent Laporte, Sandrine Blazy, Xavier Leroy, and David Pichardie. A formally-verified C static analyzer. In 42nd symposium Principles of Programming Languages, pages 247--259. ACM Press, 2015

Un (autre) interpréteur abstrait mécanisé

Objectifs

- formaliser un analyseur statique en suivant la méthodologie interprétation abstraite

Notre formalisation s'appuie sur les notions de

- treillis complets
- sémantique collectrice
- le slogan « correcte par construction de l'interprétation abstraite »

Mais laisse de côté des éléments méthodologies forts

- notamment le calcul symbolique des fonctions abstraites par raffinement successifs

Syntaxe du langage

```
Inductive instr :=  
  Assign      (x:var) (e:expr)  
| Skip  
| Assert      (t:test)  
| If          (t:test) (b1 b2:instr)  
| While       (t:test) (b:instr)  
| Seq (i1 i2:instr).
```

Syntaxe du langage

```
Inductive instr :=  
  Assign (p:pp) (x:var) (e:expr)  
| Skip (p:pp)  
| Assert (p:pp) (t:test)  
| If (p:pp) (t:test) (b1 b2:instr)  
| While (p:pp) (t:test) (b:instr)  
| Seq (i1 i2:instr).
```

on ajoute des labels pour accrocher
des informations

Syntaxe du langage

Definition `var` := Word.

Definition `pp` := Word.

Inductive `op` := Add | Sub | Mult.

Inductive `expr` :=

 Const (`n`:Z)
| Unknown
| Var (`x`:var)
| Numop (`o`:op) (`e1 e2`:expr).

Inductive `comp` := Eq | Lt.

Inductive `test` :=

 Numcomp (`c`:comp) (`e1 e2`:expr)
| Not (`t`:test)
| And (`t1 t2`:test)
| Or (`t1 t2`:test).

Inductive `instr` :=

 Assign (`p`:pp) (`x`:var) (`e`:expr)
| Skip (`p`:pp)
| Assert (`p`:pp) (`t`:test)
| If (`p`:pp) (`t`:test) (`b1 b2`:instr)
| While (`p`:pp) (`t`:test) (`b`:instr)
| Seq (`i1 i2`:instr).

Record `program` := Prog {
 `p_instr`:instr;
 `p_end`: pp;
 `vars`: list var
}.

Syntaxe du langage

Definition `var` := Word.

Definition `pp` := Word.

Inductive `op` := Add | Sub | Mult.

Inductive `expr` :=

 Const (`n`:Z)
| Unknown
| Var (`x`:var)
| Numop (`o`:op) (`e1 e2`:expr).

Inductive `comp` := Eq | Lt.

Inductive `test` :=

 Numcomp (`c`:comp) (`e1 e2`:expr)
| Not (`t`:test)
| And (`t1 t2`:test)
| Or (`t1 t2`:test).

Inductive `instr` :=

 Assign (`p`:pp) (`x`:var) (`e`:expr)
| Skip (`p`:pp)
| Assert (`p`:pp) (`t`:test)
| If (`p`:pp) (`t`:test) (`b1 b2`:instr)
| While (`p`:pp) (`t`:test) (`b`:instr)
| Seq (`i1 i2`:instr).

Record `program` := P instruction principale
 `p_instr`:instr;
 `p_end`: pp;
 `vars`: list var
}.

Syntaxe du langage

Definition `var` := Word.

Definition `pp` := Word.

Inductive `op` := Add | Sub | Mult.

Inductive `expr` :=

 Const (`n`:Z)
| Unknown
| Var (`x`:var)
| Numop (`o`:op) (`e1 e2`:expr).

Inductive `comp` := Eq | Lt.

Inductive `test` :=

 Numcomp (`c`:comp) (`e1 e2`:expr)
| Not (`t`:test)
| And (`t1 t2`:test)
| Or (`t1 t2`:test).

Inductive `instr` :=

 Assign (`p`:pp) (`x`:var) (`e`:expr)
| Skip (`p`:pp)
| Assert (`p`:pp) (`t`:test)
| If (`p`:pp) (`t`:test) (`b1 b2`:instr)
| While (`p`:pp) (`t`:test) (`b`:instr)
| Seq (`i1 i2`:instr).

Record `program` := P instruction principale
 `p_instr`:instr;
 `p_end`: pp;
 `vars`: list var
}.

dernier label

Syntaxe du langage

Definition `var` := Word.

Definition `pp` := Word.

Inductive `op` := Add | Sub | Mult.

Inductive `expr` :=

 Const (`n`:Z)
| Unknown
| Var (`x`:var)
| Numop (`o`:op) (`e1 e2`:expr).

Inductive `comp` := Eq | Lt.

Inductive `test` :=

 Numcomp (`c`:comp) (`e1 e2`:expr)
| Not (`t`:test)
| And (`t1 t2`:test)
| Or (`t1 t2`:test).

Inductive `instr` :=

 Assign (`p`:pp) (`x`:var) (`e`:expr)
| Skip (`p`:pp)
| Assert (`p`:pp) (`t`:test)
| If (`p`:pp) (`t`:test) (`b1 b2`:instr)
| While (`p`:pp) (`t`:test) (`b`:instr)
| Seq (`i1 i2`:instr).

Record `program` := P instruction principale
 `p_instr`:instr;
 `p_end`: pp;
 `vars`: list var
}.

instruction principale

dernier label

déclarations des variables

Syntaxe du langage

entiers 32 bits

Definition `var` := Word.

Definition `pp` := Word.

Inductive `op` := Add | Sub | Mult.

Inductive `expr` :=

 | Const (`n:Z`)
 | Unknown
 | Var (`x:var`)
 | Numop (`o:op`) (`e1 e2:expr`).

Inductive `comp` := Eq | Lt.

Inductive `test` :=

 | Numcomp (`c:comp`) (`e1 e2:expr`)
 | Not (`t:test`)
 | And (`t1 t2:test`)
 | Or (`t1 t2:test`).

Inductive `instr` :=

 | Assign (`p:pp`) (`x:var`) (`e:expr`)
 | Skip (`p:pp`)
 | Assert (`p:pp`) (`t:test`)
 | If (`p:pp`) (`t:test`) (`b1 b2:instr`)
 | While (`p:pp`) (`t:test`) (`b:instr`)
 | Seq (`i1 i2:instr`).

Record `program` := P instruction principale
 | `p_instr:instr`;
 | `p_end: pp`;
 | `vars: list var`
}.

dernier label

déclarations des variables

Sémantique du langage

Domaines sémantiques

Definition env := var → Z.

Inductive config := | Final (ρ:env) | Inter (i:instr) (ρ:env).

Sémantique opérationnelle

Inductive sos (p:program) : (instr * env) → config → Prop :=
| sos_affect : ∀ l x e n ρ1 ρ2,
 sem_expr p ρ1 e n →
 subst ρ1 x n ρ2 →
 In x (vars p) →
 sos p (Assign l x e, ρ1) (Final ρ2)
| ...

Etats accessibles à partir d'un environnement initial

Inductive reachable_sos (p:program) : pp*env → Prop := ...

Objectifs de cette formalisation

L'analyseur calcule une abstraction de la sémantique du programme

Definition `analyse : program -> abdom := [...]`

A chaque élément abstrait correspond une propriété sur `pp × env`

Definition `γ : abdom -> ℘(pp * env) := [...]`

L'analyseur doit calculer une sur-approximation des états accessibles

Theorem `analyse_correct : ∀ prog,
 reachable_sos prog ⊆ γ (analyse prog).`

Proof.

`[...]`

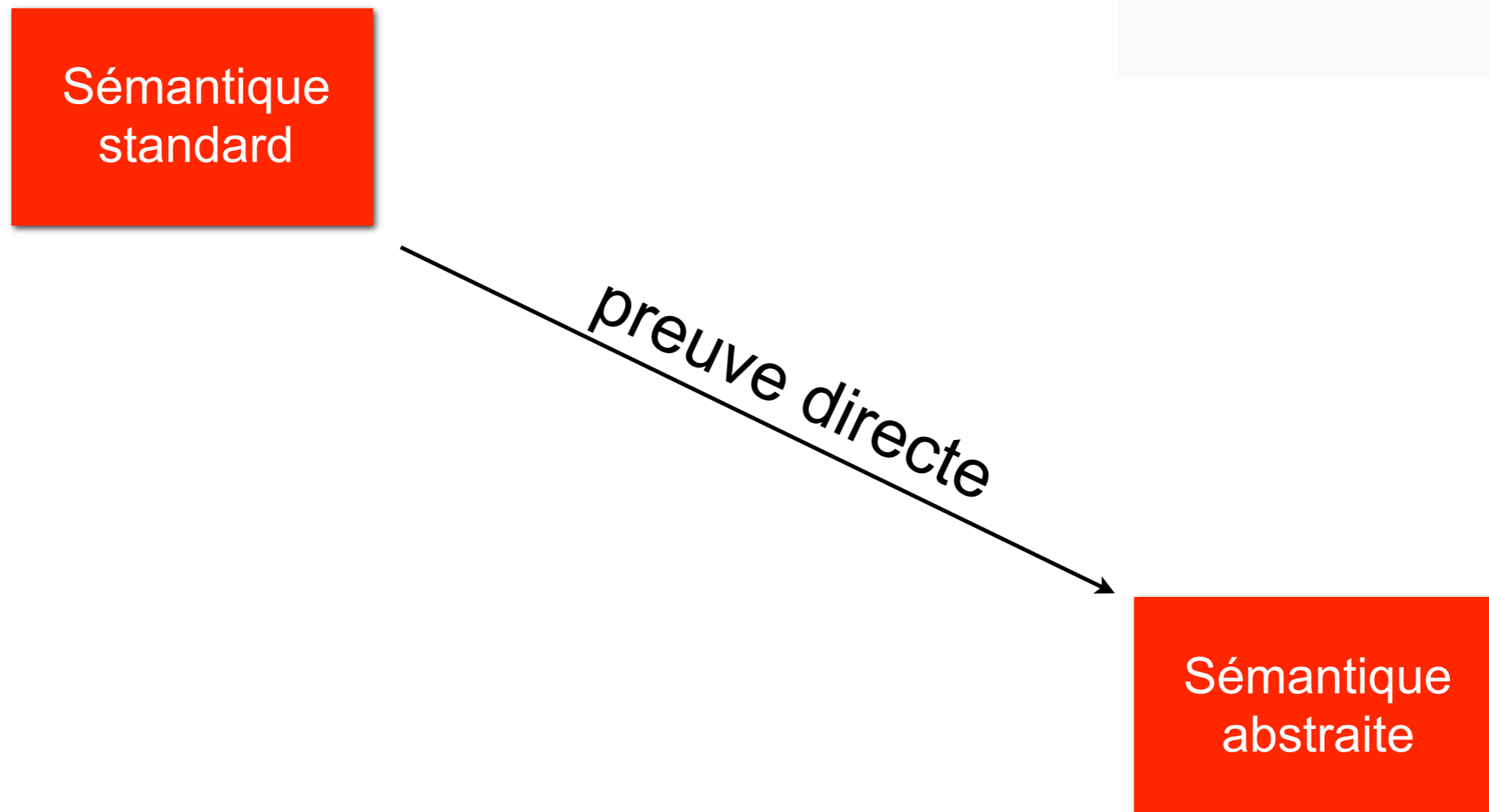
Qed.

Feuille de route

Sémantique
standard

Sémantique
abstraite

Feuille de route



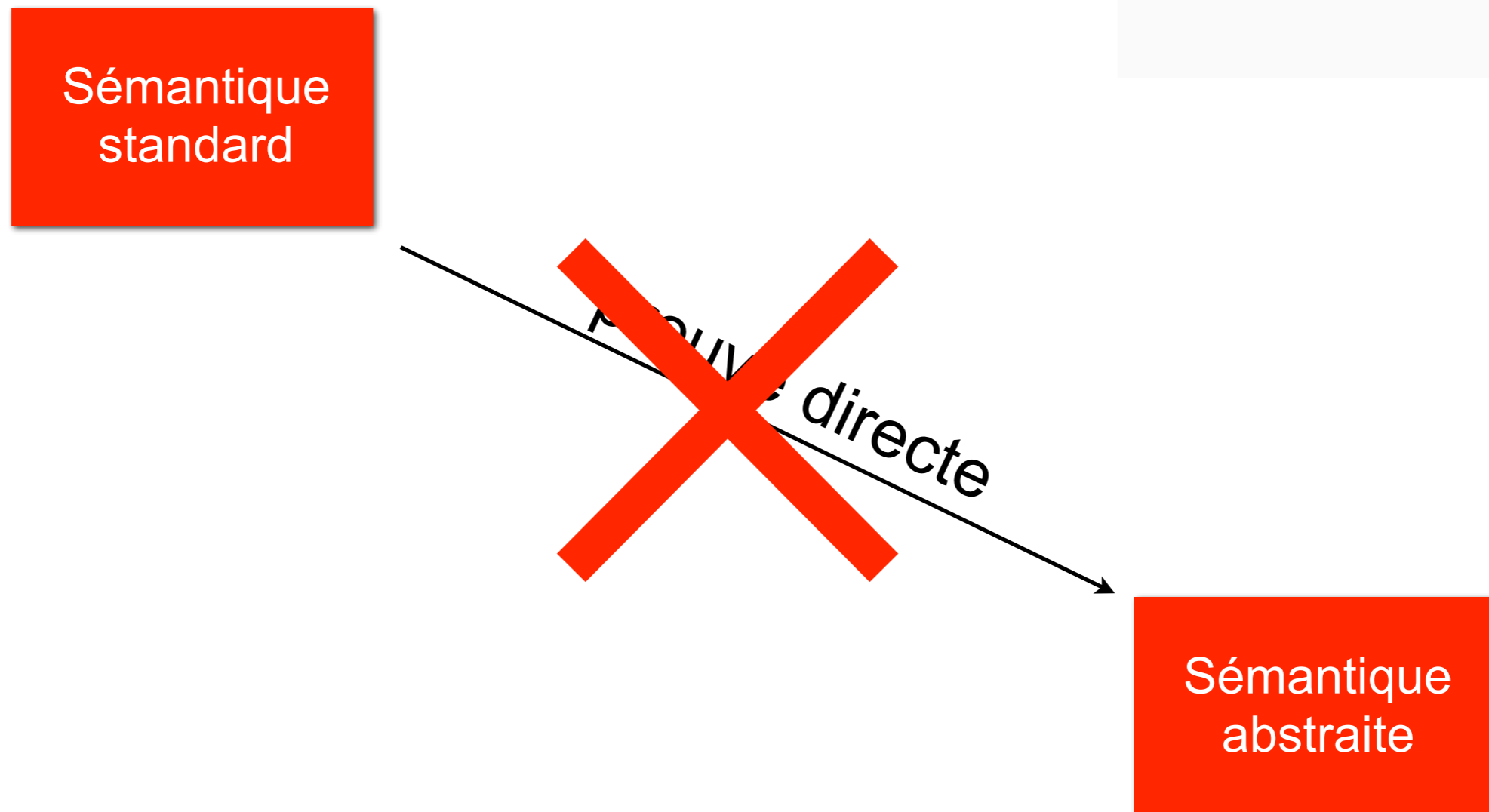
 COLLÈGE DE FRANCE
1530

Sémantiques mécanisées, cinquième cours

**Un art abstrait:
l'analyse statique par interprétation abstraite**

Xavier Leroy
2020-01-17
Collège de France, chaire de sciences du logiciel

Feuille de route



 COLLÈGE DE FRANCE
1530

Sémantiques mécanisées, cinquième cours

**Un art abstrait:
l'analyse statique par interprétation abstraite**

Xavier Leroy
2020-01-17
Collège de France, chaire de sciences du logiciel

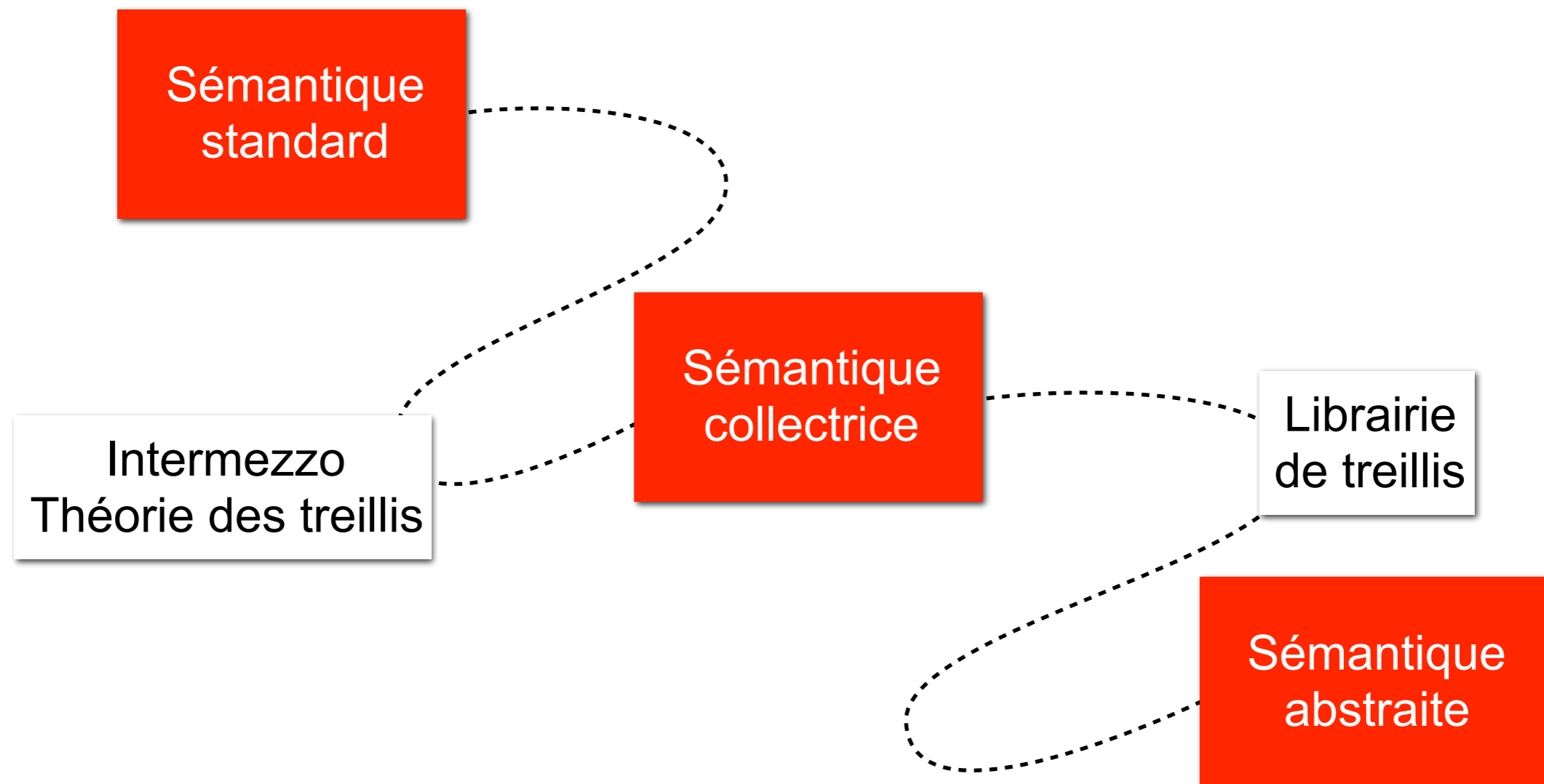
Feuille de route

Sémantique
standard

Sémantique
collectrice

Sémantique
abstraite

Feuille de route



Quelques éléments de théorie des treillis

Nous voulons formaliser la notion de plus petit point fixe

- Treillis complets
- Théorème de Knaster-Tarski

Théorème de Knaster-Tarski

Definition `lfp {L:Type} {CL:CompleteLattice.t L} (f:monotone L L) : L := CompleteLattice.meet (PostFix f).`

$$\bigcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

Théorème de Knaster-Tarski

Fonctions monotones de
 $L \rightarrow L$

Definition `lfp {L:Type} {CL:CompleteLattice.t L} (f:monotone L L) : L := CompleteLattice.meet (PostFix f).`

$$\bigsqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

Théorème de Knaster-Tarski

Treillis complet sur L

Fonctions monotones de
 $L \rightarrow L$

Definition `lfp` $\{L:Type\} \{CL:CompleteLattice.t\ L\} (f:monotone\ L\ L) : L :=$
`CompleteLattice.meet (PostFix f).`

$$\bigcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

Fonctions monotones

```
Class monotone A B {PA:Poset.t A} {PB:Poset.t B} : Type := Mono {  
  mon_func : A -> B;  
  mon_prop :  $\forall$  a1 a2, a1  $\sqsubseteq$  a2 -> (mon_func a1)  $\sqsubseteq$  (mon_func a2)  
}.
```

Fonctions monotones

Nous utilisons des *type classes*

```
Class monotone A B {PA:Poset.t A} {PB:Poset.t B} : Type := Mono {  
  mon_func : A -> B;  
  mon_prop :  $\forall$  a1 a2, a1  $\sqsubseteq$  a2 -> (mon_func a1)  $\sqsubseteq$  (mon_func a2)  
}.
```

Fonctions monotones

Nous utilisons des *type classes*

Une fonction monotone est un terme $(\text{Mono } f \ \pi)$
avec π une preuve de monotonie de f

```
Class monotone A B {PA:Poset.t A} {PB:Poset.t B} : Type := Mono {  
  mon_func : A -> B;  
  mon_prop :  $\forall$  a1 a2, a1  $\sqsubseteq$  a2 -> (mon_func a1)  $\sqsubseteq$  (mon_func a2)  
}.
```

Théorème de Knaster-Tarski

Definition lfp {L:Type} {CL:CompleteLattice.t L} (f:monotone L L) : L := CompleteLattice.meet (PostFix f).

Section Knaster_Tarski.

Variable L : Type.

Variable CL : CompleteLattice.t L.

Variable f : monotone L L.

Lemma lfp_fixpoint : f (lfp f) == lfp f.

Lemma lfp_least_fixpoint : $\forall x, f\ x == x \rightarrow \text{lfp } f \sqsubseteq x$.

Lemma lfp_postfixpoint : $f(\text{lfp } f) \sqsubseteq \text{lfp } f$.

Lemma lfp_least_postfixpoint : $\forall x, f\ x \sqsubseteq x \rightarrow \text{lfp } f \sqsubseteq x$.

Lemma lfp_monotone : $\forall f1\ f2 : \text{monotone } L\ L, f1 \sqsubseteq f2 \rightarrow \text{lfp } f1 \sqsubseteq \text{lfp } f2$.

End Knaster_Tarski.

$$\bigsqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

Théorème de Knaster-Tarski

Argument implicite des
types classes

```
Definition lfp {L:Type} {CL:CompleteLattice.t L} (f:monotone L L) : L :=  
  CompleteLattice.meet (PostFix f).
```

```
Section Knaster_Tarski.
```

```
Variable L : Type.
```

```
Variable CL : CompleteLattice.t L.
```

```
Variable f : monotone L L.
```

```
Lemma lfp_fixpoint : f (lfp f) == lfp f.
```

```
Lemma lfp_least_fixpoint :  $\forall x, f\ x == x \rightarrow lfp\ f \sqsubseteq x$ .
```

```
Lemma lfp_postfixpoint : f (lfp f)  $\sqsubseteq$  lfp f.
```

```
Lemma lfp_least_postfixpoint :  $\forall x, f\ x \sqsubseteq x \rightarrow lfp\ f \sqsubseteq x$ .
```

```
Lemma lfp_monotone :  $\forall f1\ f2 : monotone\ L\ L, f1 \sqsubseteq f2 \rightarrow lfp\ f1 \sqsubseteq lfp\ f2$ .
```

```
End Knaster_Tarski.
```

$$\bigsqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

Théorème de Knaster-Tarski

Argument implicite des
types classes

```
Definition lfp {L:Type} {CL:CompleteLattice.t L} (f:monotone L L) : L :=  
  CompleteLattice.meet (PostFix f).
```

```
Section Knaster_Tarski.
```

```
Variable L : Type.
```

```
Variable CL : CompleteLattice.t L.
```

```
Variable f : monotone L L.
```

```
Lemma lfp_fixpoint : f (lfp f) == lfp f.
```

```
Lemma lfp_least_fixpoint :  $\forall x, f\ x == x \rightarrow lfp\ f \sqsubseteq x$ .
```

```
Lemma lfp_postfixpoint : f (lfp f)  $\sqsubseteq$  lfp f.
```

```
Lemma lfp_least_postfixpoint :  $\forall x, f\ x \sqsubseteq x \rightarrow lfp\ f \sqsubseteq x$ .
```

```
Lemma lfp_monotone :  $\forall f1\ f2 : monotone\ L\ L, f1 \sqsubseteq f2 \rightarrow lfp\ f1 \sqsubseteq lfp\ f2$ .
```

```
End Knaster_Tarski.
```

$$\bigsqcap \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$$

Inutile de fournir les arguments implicites

Treillis complets

```
Module CompleteLattice.  
  Class t (A:Type) : Type := Make  
  { porder :> Poset.t A;  
    join : subset A -> A;  
    join_bound :  $\forall x:A, \forall f:\text{subset } A, f\ x \rightarrow x \sqsubseteq \text{join } f$ ;  
    join_lub :  $\forall f:\text{subset } A, \forall z, (\forall x:A, f\ x \rightarrow x \sqsubseteq z) \rightarrow \text{join } f \sqsubseteq z$   
  }.  
End CompleteLattice.
```

Treillis complets

```
Module CompleteLattice.
```

```
Class t (A:Type) : Type := Make
```

```
{ porder :> Poset.t A;
```

```
  join : subset A -> A;
```

```
  join_bound :  $\forall x:A, \forall f:\text{subset } A, f\ x \rightarrow x \sqsubseteq \text{join } f$ ;
```

```
  join_lub :  $\forall f:\text{subset } A, \forall z, (\forall x:A, f\ x \rightarrow x \sqsubseteq z) \rightarrow \text{join } f \sqsubseteq z$ 
```

```
  }.
```

```
End CompleteLattice.
```

héritage

Treillis complets

```
Class subset A {E:Equiv.t A} : Type := SubSet
{ carrier : A -> Prop;
  subset_comp_eq :  $\forall x y:A, x==y \rightarrow$  carrier x -> carrier y}.
```

```
Module CompleteLattice.
```

```
Class t (A:Type) : Type := Make
{ porder :> Poset.t A;
  join : subset A -> A;
  join_bound :  $\forall x:A, \forall f:subset A, f x \rightarrow x \sqsubseteq$  join f;
  join_lub :  $\forall f:subset A, \forall z, (\forall x:A, f x \rightarrow x \sqsubseteq z) \rightarrow$  join f  $\sqsubseteq$  z
}.
```

```
End CompleteLattice.
```

héritage

Treillis complets

```
Class subset A {E:Equiv.t A} : Type := SubSet
  { carrier : A -> Prop;
    subset_comp_eq :  $\forall x y:A, x==y \rightarrow$  carrier x -> carrier y}.
Coercion carrier : subset >-> Funclass.
```

```
Module CompleteLattice.
```

```
Class t (A:Type) : Type := Make
  { porder :> Poset.t A;
    join : subset A -> A;
    join_bound :  $\forall x:A, \forall f:subset A, f x \rightarrow x \sqsubseteq$  join f;
    join_lub :  $\forall f:subset A, \forall z, (\forall x:A, f x \rightarrow x \sqsubseteq z) \rightarrow$  join f  $\sqsubseteq$  z
  }.
```

```
End CompleteLattice.
```

héritage

Treillis complets

```
Class subset A {E:Equiv.t A} : Type := SubSet
  { carrier : A -> Prop;
    subset_comp_eq :  $\forall x y:A, x==y \rightarrow$  carrier x -> carrier y}.
Coercion carrier : subset >-> Funclass.
```

coercion

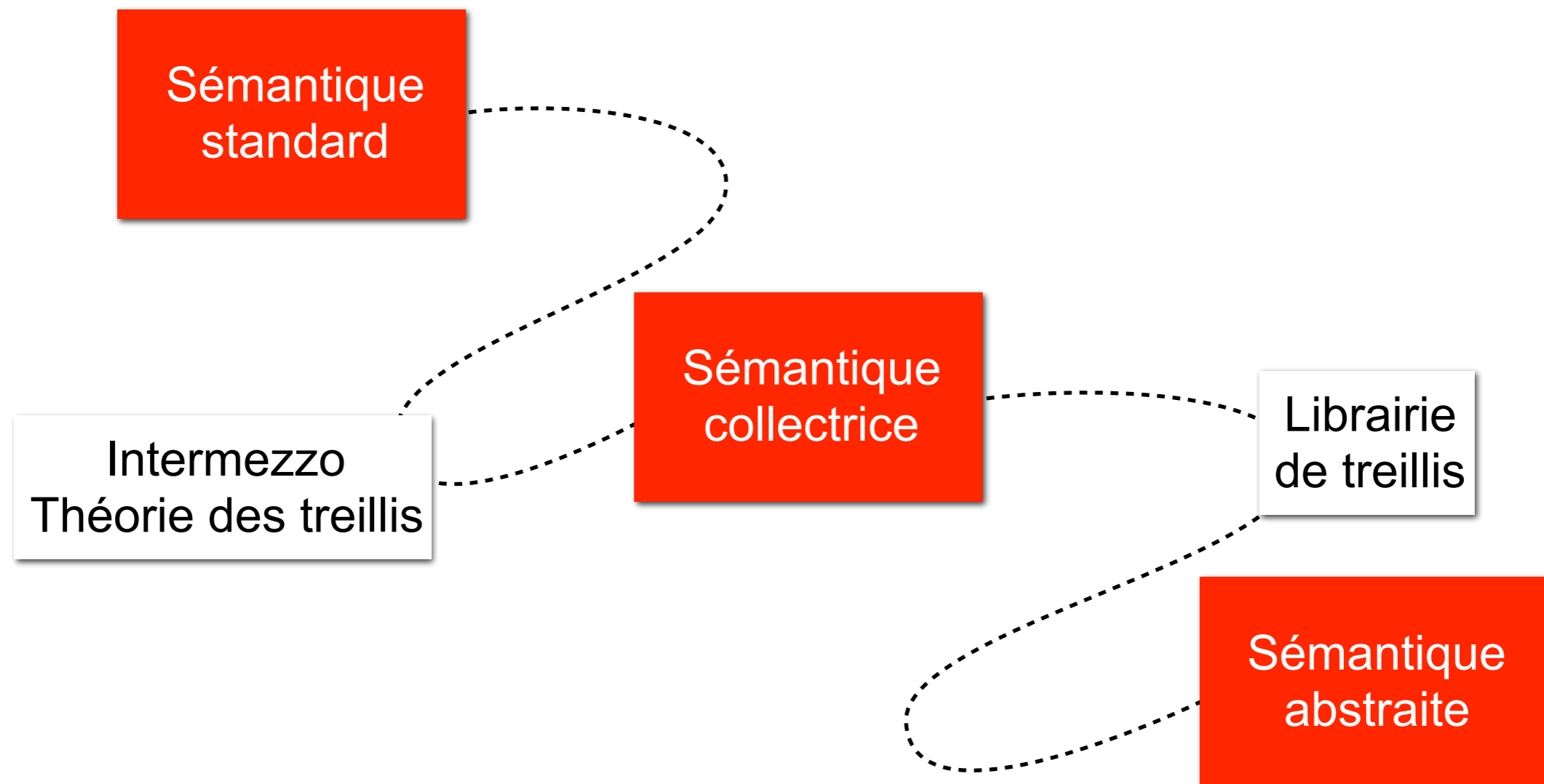
```
Module CompleteLattice.
```

```
Class t (A:Type) : Type := Make
  { porder :> Poset.t A;
    join : subset A -> A;
    join_bound :  $\forall x:A, \forall f:subset A, f x \rightarrow x \sqsubseteq$  join f;
    join_lub :  $\forall f:subset A, \forall z, (\forall x:A, f x \rightarrow x \sqsubseteq z) \rightarrow$  join f  $\sqsubseteq$  z
  }.
```

héritage

```
End CompleteLattice.
```

Feuille de route





Sémantique collectrice

- Un élément méthodologique fort en interprétation abstraite
- Qui ressemble à une analyse statique ...
- ... mais aussi précise qu'une sémantique
- Similaire à une sémantique dénotationnelle mais sur $\mathcal{P}(S)$ au lieu de S_{\perp} .

Sémantique collectrice : exemple

```
i = 0; k = 0;  
while [k < 10]l1{  
  [i = 0]l2;  
  while [i < 9]l3{  
    [i = i + 2]l4  
  };  
  [k = k + 1]l5  
}l6
```

$l_1 \mapsto [0,10] \times ([0,10] \cap \text{Paires})$

$l_2 \mapsto [0,9] \times ([0,10] \cap \text{Paires})$

$l_3 \mapsto [0,9] \times ([0,10] \cap \text{Paires})$

$l_4 \mapsto [0,9] \times ([0,8] \cap \text{Paires})$

$l_5 \mapsto [0,9] \times ([0,10] \cap \text{Paires})$

$l_6 \mapsto \{(10,10)\}$

Sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\wp(\text{env})$ ) (pp $\rightarrow\wp(\text{env})$ ) :=  
  match i with  
  | Skip l1 =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | Assign l1 x e =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assign } x \text{ e } \text{Pre}]$ ) _  
  | Assert l1 t =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } t \text{ Pre}]$ ) _  
  | If l1 t i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C1 := Collect i1 l1 (assume t Pre) in  
      let C2 := Collect i2 l1 (assume (Not t) Pre) in  
      (C1  $\sqcup$  C2)+ $[l1\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | While l1 t i =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let F := fun X: $\wp(\text{env})$  => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in  
      let I := lfp F in  
      (Collect i l1 (assume t I))+ $[l1\mapsto I]$ + $[l2\mapsto\text{assume } (\text{Not } t) \text{ I}]$ ) _  
  | Seq i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in  
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2)))) _  
  
end.
```

Sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\wp(\text{env})$ ) (pp $\rightarrow\wp(\text{env})$ ) :=  
  match i with  
  | Sk  
  | Mc  
  | As  
  | Mc  
  | Assert l1 t =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } t \text{ Pre}]$ ) _  
  | If l1 t i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C1 := Collect i1 l1 (assume t Pre) in  
      let C2 := Collect i2 l1 (assume (Not t) Pre) in  
      (C1  $\sqcup$  C2)+ $[l1\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | While l1 t i =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let F := fun X: $\wp(\text{env})$  => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in  
      let I := lfp F in  
      (Collect i l1 (assume t I))+ $[l1\mapsto I]$ + $[l2\mapsto\text{assume } (\text{Not } t) I]$ ) _  
  | Seq i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in  
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2)))) _  
  
end.
```

On collecte tous les états accessibles, en chaque points de programme,
pour une précondition fixée

Sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\wp(\text{env})$ ) (pp $\rightarrow\wp(\text{env})$ ) :=  
  match i with  
  | Skip l1 =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | Assign l1 x e =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assign } x \text{ e } \text{Pre}]$ ) _  
  | Assert l1 t =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } t \text{ Pre}]$ ) _  
  | If l1 t i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C1 := Collect i1 l1 (assume t Pre) in  
      let C2 := Collect i2 l1 (assume (Not t) Pre) in  
      (C1  $\sqcup$  C2)+ $[l1\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | While l1 t i =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let F := fun X: $\wp(\text{env})$  => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in  
      let I := lfp F in  
      (Collect i l1 (assume t I))+ $[l1\mapsto I]$ + $[l2\mapsto\text{assume } (\text{Not } t) \text{ I}]$ ) _  
  | Seq i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in  
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2))) _  
  
end.
```

Definition $\text{Esubst } \{A\} (f:pp \rightarrow \wp(A)) (k:pp) (v:\wp A) : pp \rightarrow \wp(A) :=$
 $\text{fun } k' \Rightarrow \text{if } pp_eq \ k' \ k \ \text{then } (f \ k) \sqcup v \ \text{else } f \ k'.$

Notation $"f \ +[\ x \mapsto v \] "$ $:= (\text{Esubst } f \ x \ v)$ (at level 100).

Program Fixpoint $\text{collect } (l1:pp) (l2:pp) : \text{monotone } (\wp(\text{env})) (pp \rightarrow \wp(\text{env})) :=$

match i **with**

| **Skip** $l1 \Rightarrow$

$\text{Mono } (\text{fun } \text{Pre} \Rightarrow \perp + [l1 \mapsto \text{Pre}] + [l2 \mapsto \text{Pre}]) \ _$

| **Assign** $l1 \ x \ e \Rightarrow$

$\text{Mono } (\text{fun } \text{Pre} \Rightarrow \perp + [l1 \mapsto \text{Pre}] + [l2 \mapsto \text{assign } x \ e \ \text{Pre}]) \ _$

| **Assert** $l1 \ t \Rightarrow$

$\text{Mono } (\text{fun } \text{Pre} \Rightarrow \perp + [l1 \mapsto \text{Pre}] + [l2 \mapsto \text{assume } t \ \text{Pre}]) \ _$

| **If** $l1 \ t \ i1 \ i2 \Rightarrow$

$\text{Mono } (\text{fun } \text{Pre} \Rightarrow$

$\text{let } C1 := \text{Collect } i1 \ l1 \ (\text{assume } t \ \text{Pre}) \ \text{in}$

$\text{let } C2 := \text{Collect } i2 \ l1 \ (\text{assume } (\text{Not } t) \ \text{Pre}) \ \text{in}$

$(C1 \sqcup C2) + [l1 \mapsto \text{Pre}]) \ _$

| **While** $l1 \ t \ i \Rightarrow$

$\text{Mono } (\text{fun } \text{Pre} \Rightarrow$

$\text{let } F := \text{fun } X:\wp(\text{env}) \Rightarrow \text{Pre} \sqcup \text{Collect } i \ l1 \ (\text{assume } t \ X) \ l1 \ \text{in}$

$\text{let } I := \text{lfp } F \ \text{in}$

$(\text{Collect } i \ l1 \ (\text{assume } t \ I)) + [l1 \mapsto I] + [l2 \mapsto \text{assume } (\text{Not } t) \ I]) \ _$

| **Seq** $i1 \ i2 \Rightarrow$

$\text{Mono } (\text{fun } \text{Pre} \Rightarrow$

$\text{let } C := \text{Collect } i1 \ (\text{first } i2) \ \text{Pre} \ \text{in}$

$C \sqcup (\text{Collect } i2 \ l2 \ (C \ (\text{first } i2))) \ _$

end.

Sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\wp(\text{env})$ ) (pp $\rightarrow\wp(\text{env})$ ) :=  
  match i with  
  | Skip l1 =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | Assign l1 x e =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assign } x \text{ e } \text{Pre}]$ ) _  
  | Assert l1 t =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } t \text{ Pre}]$ ) _  
  | If l1 t i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C1 := Collect i1 l1 (assume t Pre) in  
      let C2 := Collect i2 l1 (assume (Not t) Pre) in  
      (C1  $\sqcup$  C2)+ $[l1\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | While l1 t i =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let F := fun X: $\wp(\text{env})$  => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in  
      let I := lfp F in  
      (Collect i l1 (assume t I))+ $[l1\mapsto I]$ + $[l2\mapsto\text{assume } (\text{Not } t) \text{ I}]$ ) _  
  | Seq i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in  
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2))) _  
  
end.
```

Sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\wp(\text{env})$ ) (pp $\rightarrow\wp(\text{env})$ ) :=  
  match i with  
  | Skip l1 =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | Assign l1 x e =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assign } x \text{ e } \text{Pre}]$ ) _  
  | Assert l1 t =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } t \text{ Pre}]$ ) _  
  | If l1 t i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C1 := Collect i l1 (assume t Pre) l1  
      let C2 := Collect i l1 (assume (Not t) Pre) l1  
      (C1  $\sqcup$  C2)+ $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } t \text{ Pre}]$ ) _  
  | While l1 t i =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let F := fun X: $\wp(\text{env})$  => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in  
      let I := lfp F in  
      (Collect i l1 (assume t I))+ $[l1\mapsto\text{I}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } (\text{Not } t) \text{ I}]$ ) _  
  | Seq i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in  
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2))) _  
end.
```

I == Pre \sqcup Collect i l1 (assume t I) l1

Sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\wp(\text{env})$ ) (pp $\rightarrow\wp(\text{env})$ ) :=  
  match i with  
  | Skip l1 =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | Assign l1 x e =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assign } x \text{ e } \text{Pre}]$ ) _  
  | Assert l1 t =>  
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\mapsto\text{Pre}]$ + $[l2\mapsto\text{assume } t \text{ Pre}]$ ) _  
  | If l1 t i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C1 := Collect i1 l1 (assume t Pre) in  
      let C2 := Collect i2 l1 (assume (Not t) Pre) in  
      (C1  $\sqcup$  C2)+ $[l1\mapsto\text{Pre}]$ ) _  
  | While l1 t i =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let F := fun X: $\wp(\text{env})$  => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in  
      let I := lfp F in  
      (Collect i l1 (assume t I))+ $[l1\mapsto I]$ + $[l2\mapsto\text{assume } (\text{Not } t) \text{ I}]$ ) _  
  | Seq i1 i2 =>  
    Mono (fun Pre =>  
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in  
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2)))) _  
  
end.
```

Sémantique collectrice : correction

Definition `reachable_collect (p:program) (s:pp*env) : Prop :=`
`let (k,env) := s in`
`Collect p (p_instr p) (p_end p) (T) k env.`

Theorem `reachable_sos_implies_reachable_collect : ∀ p s,`
`reachable_sos p s -> reachable_collect p s.`

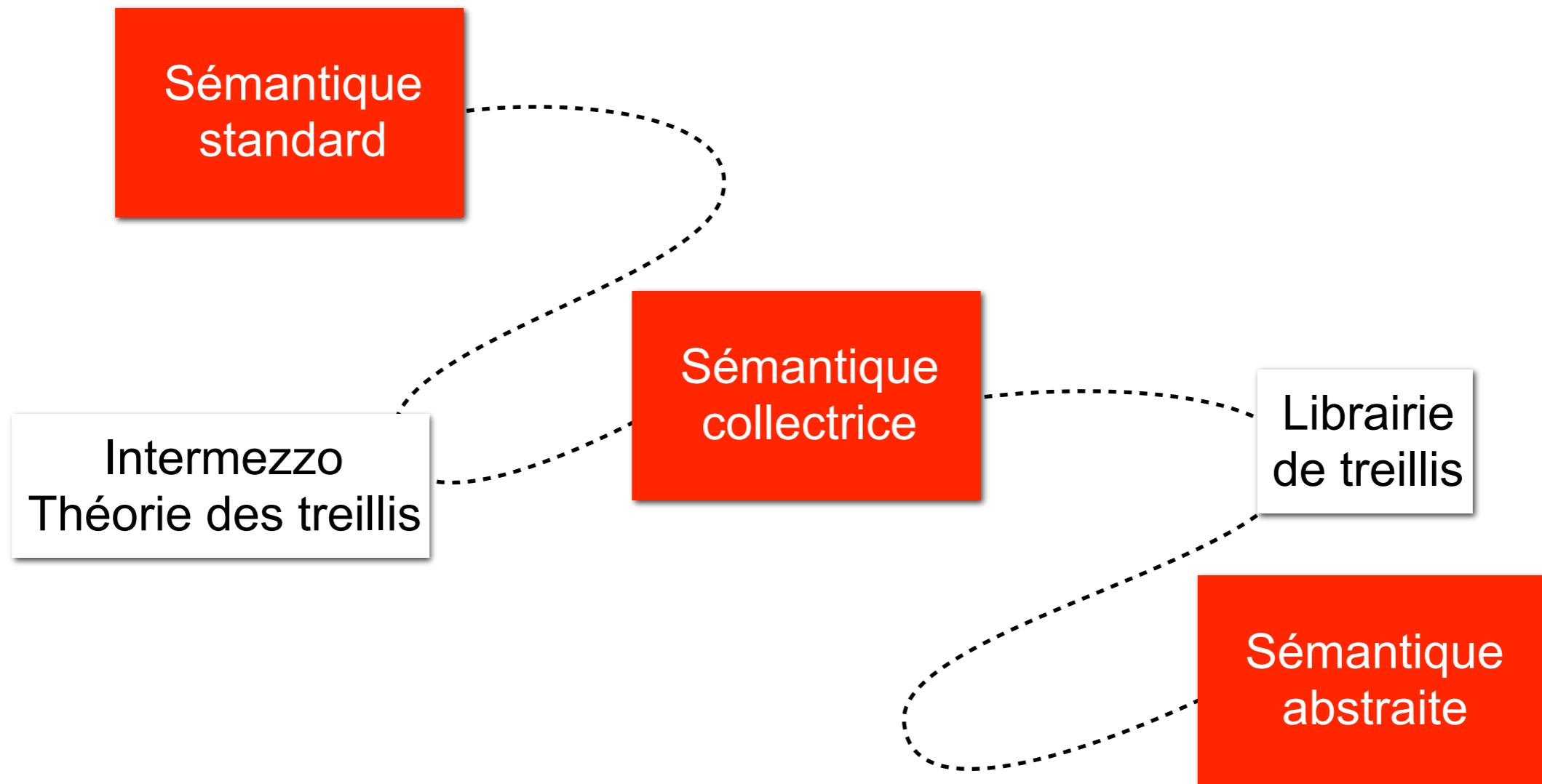
Sémantique collectrice : correction

Definition `reachable_collect (p:program) (s:pp*env) : Prop :=
 let (k,env) := s in
 Collect p (p_instr p) (p_end p) (T) k env.`

Theorem `reachable_sos_implies_reachable_collect : ∀ p s,
 reachable_sos p s -> reachable_collect p s.`

Un théorème qu'on ne prend parfois pas le
temps de prouver !

Feuille de route



Treillis abstrait

- On ne peut pas *extraire* la sémantique collectrice
 - ➔ elle calcule sur Prop
 - ➔ ce qui explique pourquoi nous avons réussi à définir un calcul de plus petit point fixe pourtant non calculable...
- La sémantique abstraite va calculer sur un treillis $A^\#$ au lieu de $\text{pp} \rightarrow \wp(\text{env})$

Treillis abstrait

Les treillis abstraits sont formalisés avec des *type classes*

`AbLattice.t` : $\sqsubseteq^\#, \sqcup^\#, \sqcap^\#, \perp^\#$..., et aussi élargissement/rétrécissement

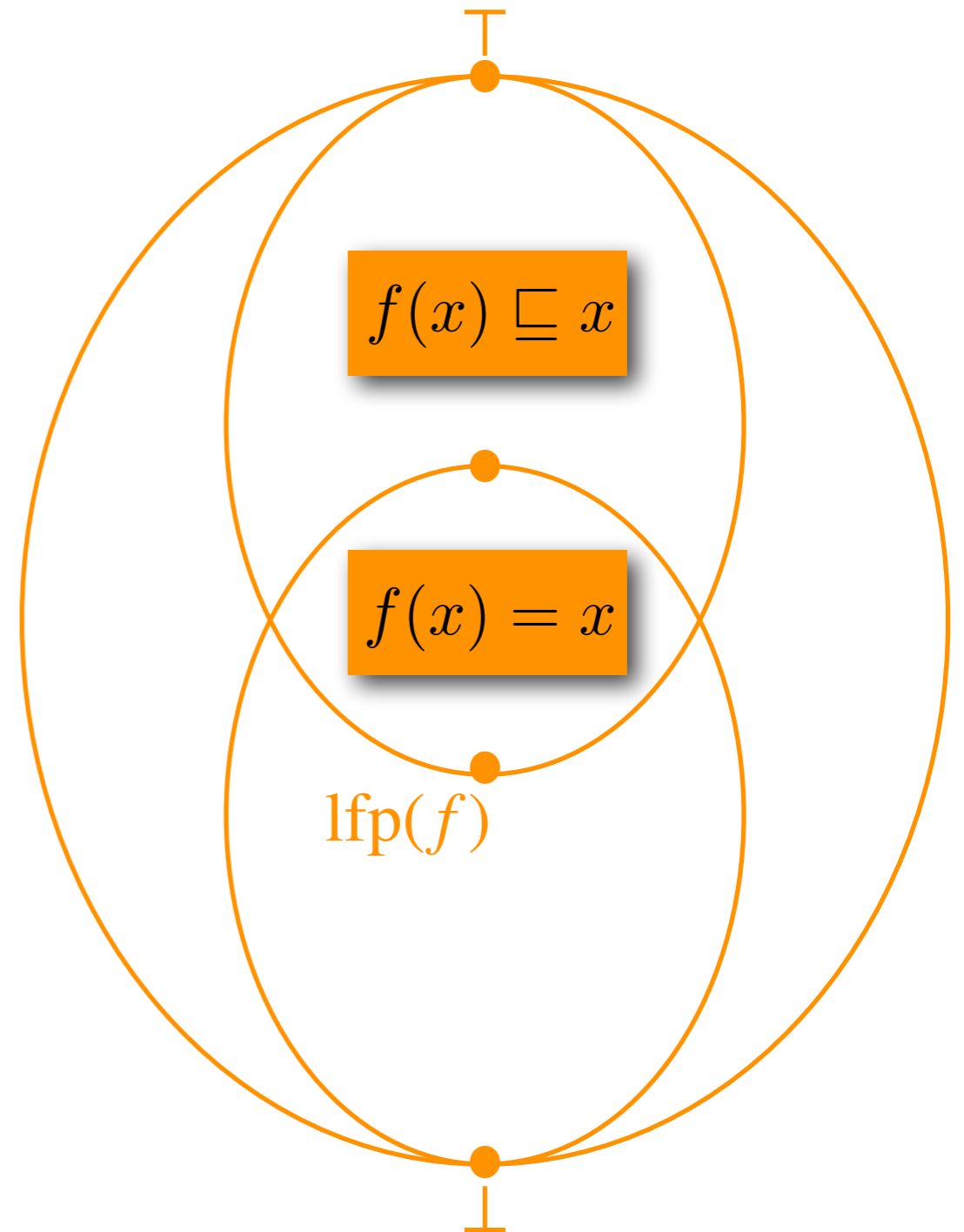
Chaque treillis est équipée avec un solveur de post point fixe

Definition `approx_lfp {t} {L:AbLattice.t t} : (t->t) -> t := [...]`

Theorem `approx_lfp_is_postfixpoint :`
 $\forall t (L:AbLattice.t t) (f:t \rightarrow t),$
 $f (\text{approx_lfp } f) \sqsubseteq^\# (\text{approx_lfp } f).$

Proof. [...] **Qed.**

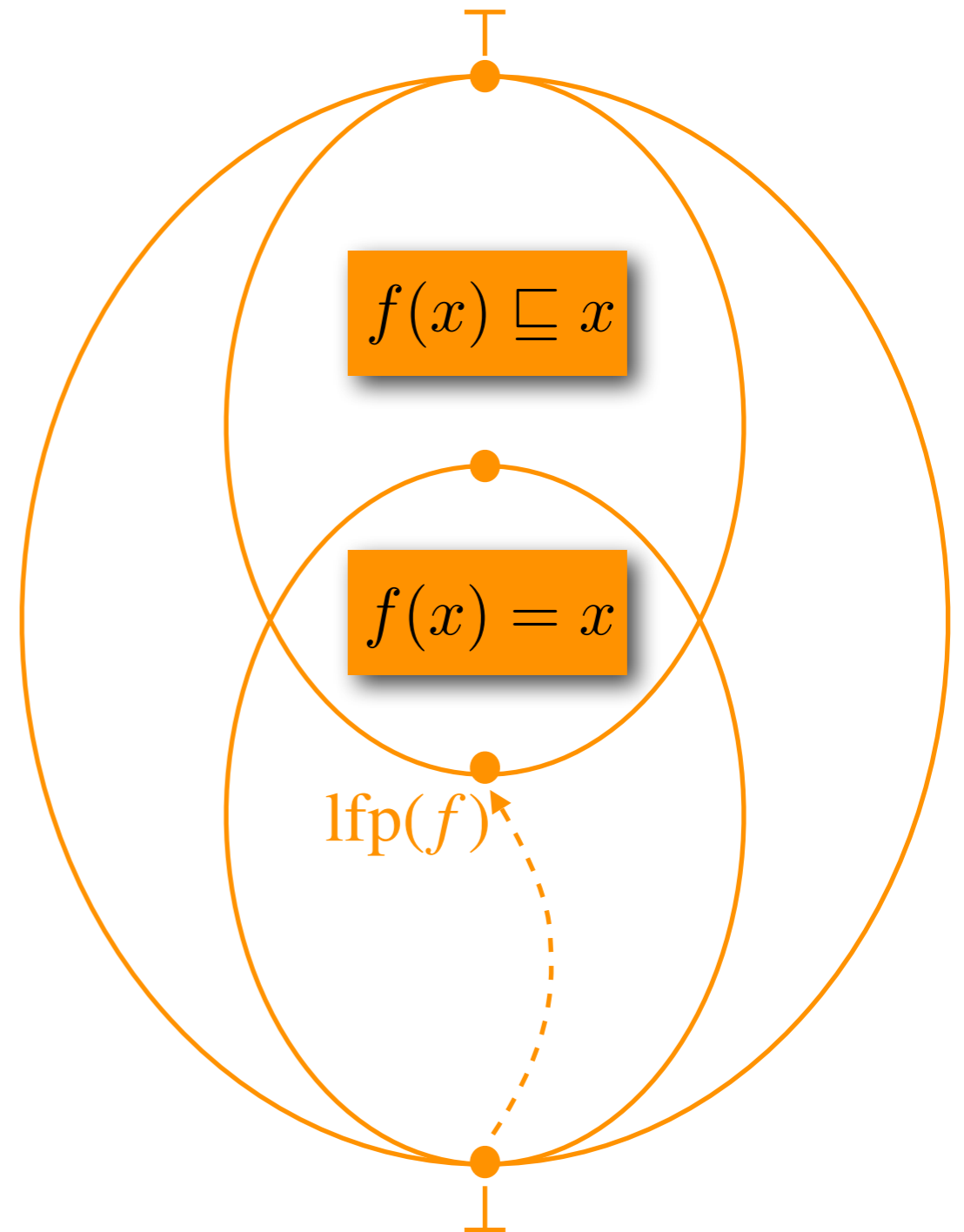
Approximation de points fixes



Approximation de points fixes

Théorème de point fixe de Kleene

- convergence trop lente pour les *treillis profonds*
- et parfois pas de convergence !



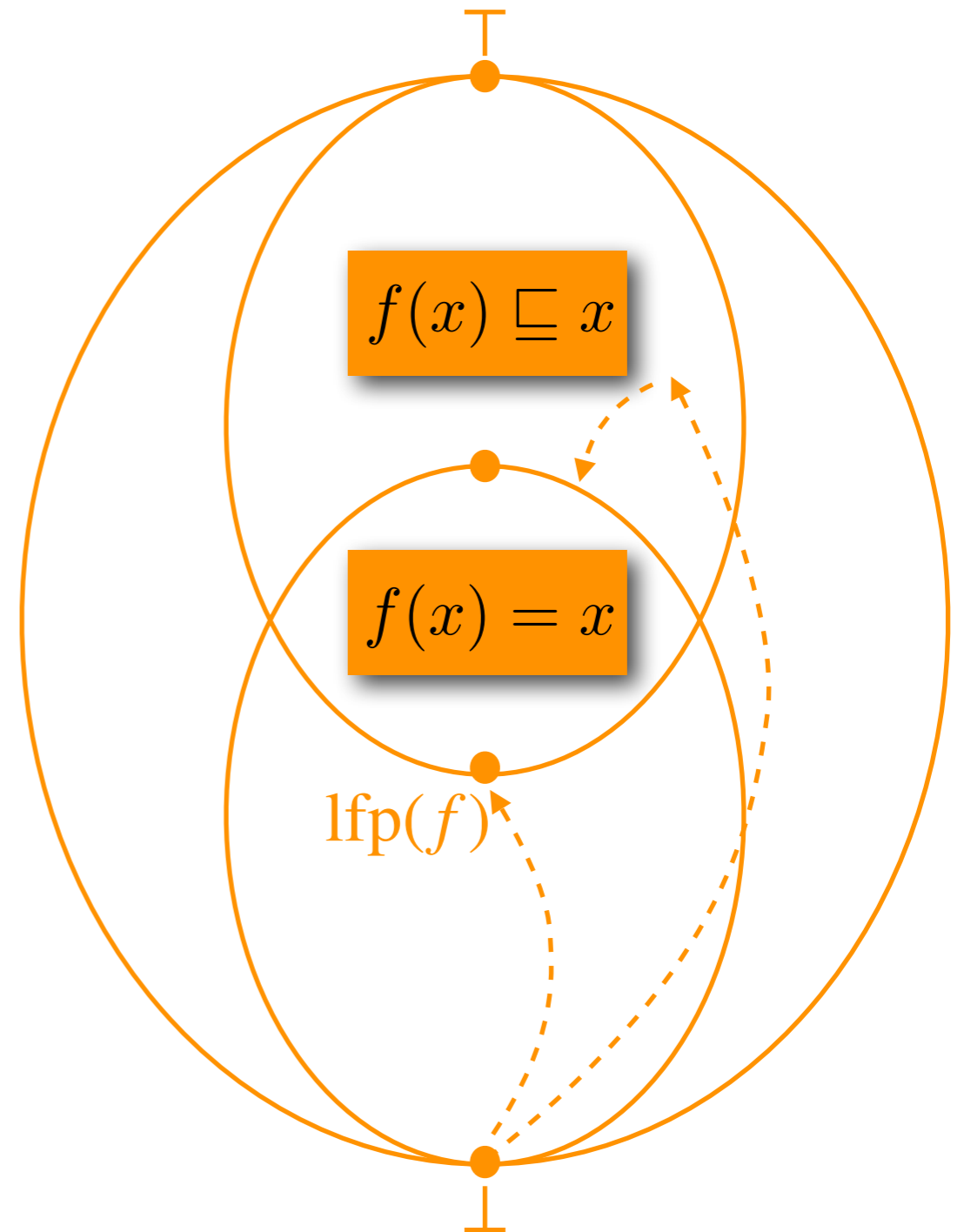
Approximation de points fixes

Théorème de point fixe de Kleene

- convergence trop lente pour les *treillis profonds*
- et parfois pas de convergence !

Accélération de convergence par élargissement/rétrécissement

- sur-approxime le plus petit point fixe
- nécessite une preuve de terminaison spécifique
- attention à l'ordre d'iteration dans les systèmes à plusieurs variables !



Construire des treillis abstraits

Les treillis sont construits par assemblages *modulaire* grâce à une librairie proposant

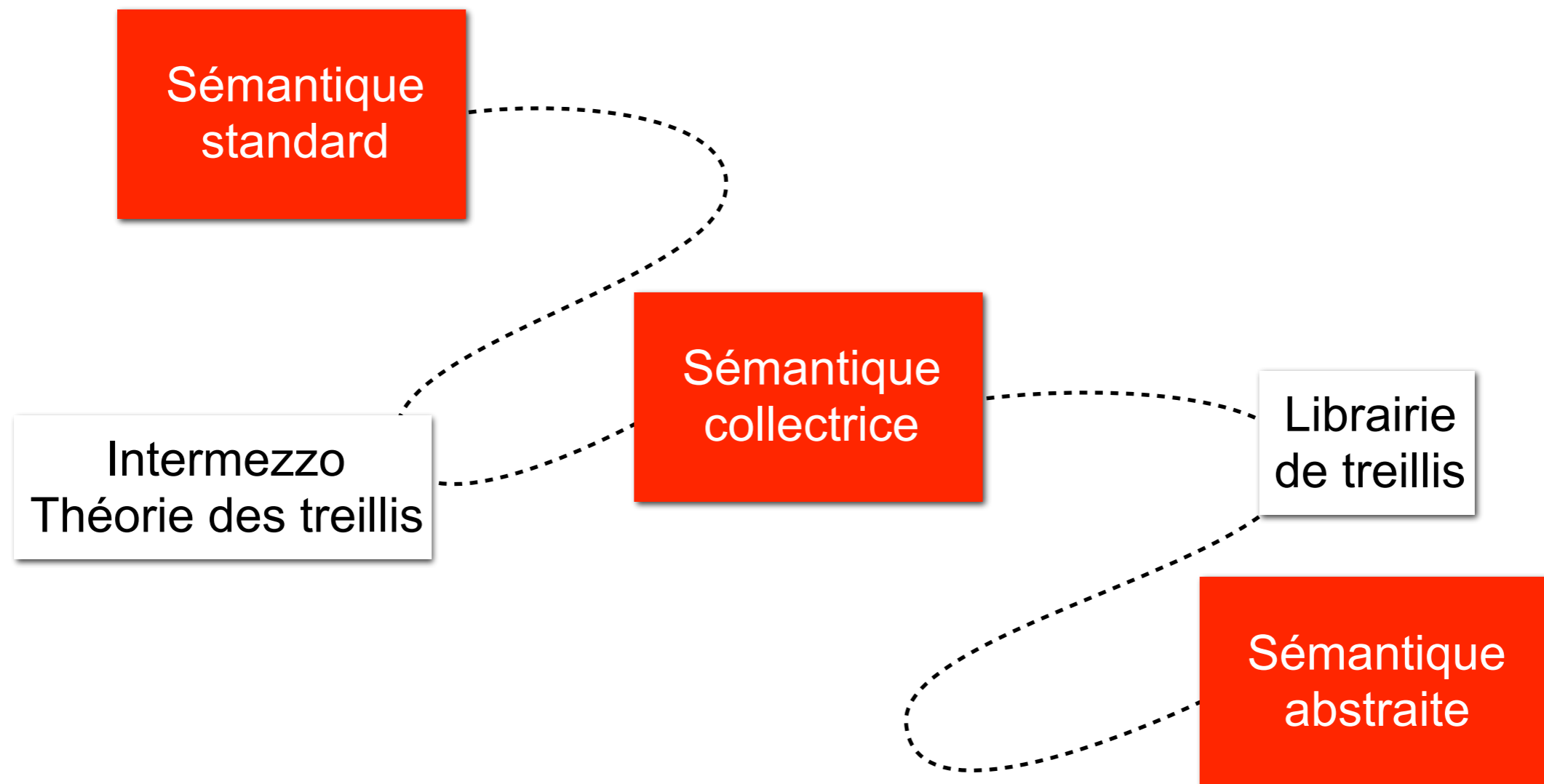
- des briques de base (intervalles, constantes, congruence,...)
- des foncteurs (tableaux, listes, produits, sommes)

Permet une construction *modulaire* des preuves de terminaison de l'analyseur

Exemple

```
Instance ArrayLattice t {L:AbLattice.t t} : AbLattice.t (array A) :=  
  [...]
```

Feuille de route



Sémantique abstraite

Section prog.

Variable (t:Type) (L:AbLattice.t t) (prog:program) (Ab:AbEnv.t L prog).

Fixpoint AbSem (i:instr) (l2:pp): t -> array t :=

match i **with**

| Skip l1 => **fun** Pre => \perp # +[l1→Pre]# +[l2→Pre]#

| Assign l1 x e => **fun** Pre => \perp # +[l1→Env]# +[l2→AbEnv.assign Pre x e]#

| Assert l1 t => **fun** Pre => \perp # +[p→Pre]# +[l→AbEnv.assume t Pre]#

| If l1 t i1 i2 => **fun** Pre =>

let C1 := AbSem i1 l2 (AbEnv.assert t Pre) **in**

let C2 := AbSem i2 l2 (AbEnv.assert (Not t) Pre) **in**

 (C1 \sqcup # C2) +[l1→Pre]#

| While l1 t i => **fun** Pre =>

let I := approx_lfp

 (**fun** X => Pre \sqcup # (get (AbSem i l1 (AbEnv.assume t X)) l1)) **in**

 (AbSem i l1 (AbEnv.assume t I)) +[l1→I]# +[l2→AbEnv.assume (Not t) I]#

| Seq i1 i2 => **fun** Pre =>

let C := (AbSem i1 (first i2) Pre) **in**

 C \sqcup # (AbSem i2 l2 (get C (first i2)))

end.

End prog.

Sémantique abstraite vs sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\emptyset$ (env)) (pp $\rightarrow$  $\emptyset$ (env)) :=
  match i with
  | Skip l1 =>
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\rightarrow$ Pre] $+$  $[l2\rightarrow$ Pre]) _
  | Assign l1 x e =>
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\rightarrow$ Pre] $+$  $[l2\rightarrow$ assign x e Pre]) _
  | Assert l1 t =>
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\rightarrow$ Pre] $+$  $[l2\rightarrow$ assume t Pre]) _
  | If l1 t i1 i2 =>
    Mono (fun Pre =>
      let C1 := Collect i1 l1 (assume t Pre) in
      let C2 := Collect i2 l1 (assume (Not t) Pre) in
      (C1  $\sqcup$  C2) $+$  $[l1\rightarrow$ Pre]) _
  | While l1 t i =>
    Mono (fun Pre =>
      let F := fun X: $\emptyset$ (env) => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in
      let I := lfp F in
      (Collect i l1 (assume t I)) $+$  $[l1\rightarrow$ I] $+$  $[l2\rightarrow$ assume (Not t) I]) _
  | Seq i1 i2 =>
    Mono (fun Pre =>
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2)))
    end.
end.
```

Section prog.

Variable (t:Type) (L:AbLattice.t t) (prog:program) (Ab:AbEnv.t L prog).

Fixpoint AbSem (i:instr) (l2:pp): t \rightarrow array t :=

match i with

| Skip l1 => fun Pre => \perp # $+$ $[l1\rightarrow$ Pre] $\#$ $+$ $[l2\rightarrow$ Pre] $\#$

| Assign l1 x e => fun Pre => \perp # $+$ $[l1\rightarrow$ Env] $\#$ $+$ $[l2\rightarrow$ AbEnv.assign Pre x e] $\#$

| Assert l1 t => fun Pre => \perp # $+$ $[p\rightarrow$ Pre] $\#$ $+$ $[l\rightarrow$ AbEnv.assume t Pre] $\#$

| If l1 t i1 i2 => fun Pre =>

let C1 := AbSem i1 l2 (AbEnv.assert t Pre) in

let C2 := AbSem i2 l2 (AbEnv.assert (Not t) Pre) in

(C1 \sqcup # C2) $+$ $[l1\rightarrow$ Pre] $\#$

| While l1 t i => fun Pre =>

let I := approx_lfp

(fun X => Pre \sqcup # (get (AbSem i l1 (AbEnv.assume t X)) l1)) in

(AbSem i l1 (AbEnv.assume t I)) $+$ $[l1\rightarrow$ I] $\#$ $+$ $[l2\rightarrow$ AbEnv.assume (Not t) I] $\#$

| Seq i1 i2 => fun Pre =>

let C := (AbSem i1 (first i2) Pre) in

C \sqcup # (AbSem i2 l2 (get C (first i2)))

end.

End prog.

Sémantique abstraite vs sémantique collectrice

```
Program Fixpoint Collect (i:instr) (l2:pp): monotone ( $\emptyset$ (env)) (pp $\rightarrow$  $\emptyset$ (env)) :=
  match i with
  | Skip l1 =>
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\rightarrow$ Pre] $+$  $[l2\rightarrow$ Pre]) _
  | Assign l1 x e =>
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\rightarrow$ Pre] $+$  $[l2\rightarrow$ assign x e Pre]) _
  | Assert l1 t =>
    Mono (fun Pre =>  $\perp$ + $[l1\rightarrow$ Pre] $+$  $[l2\rightarrow$ assume t Pre]) _
  | If l1 t i1 i2 =>
    Mono (fun Pre =>
      let C1 := Collect i1 l1 (assume t Pre) in
      let C2 := Collect i2 l1 (assume (Not t) Pre) in
      (C1  $\sqcup$  C2) $+$  $[l1\rightarrow$ Pre]) _
  | While l1 t i =>
    Mono (fun Pre =>
      let F := fun X: $\emptyset$ (env) => Pre  $\sqcup$  Collect i l1 (assume t X) l1 in
      let I := lfp F in
      (Collect i l1 (assume t I)) $+$  $[l1\rightarrow$ I] $+$  $[l2\rightarrow$ assume (Not t) I]) _
  | Seq i1 i2 =>
    Mono (fun Pre =>
      let C := Collect i1 (first i2) Pre in
      C  $\sqcup$  (Collect i2 l2 (C (first i2)))
    end.
end.
```

Il suffit de rajouter des # !

Section prog.

Variable (t:Type) (L:AbLattice.t t) (prog:program) (Ab:AbEnv.t L prog).

Fixpoint AbSem (i:instr) (l2:pp): t \rightarrow array t :=

match i with

| Skip l1 => fun Pre => \perp # $+$ $[l1\rightarrow$ Pre] $\#$ $+$ $[l2\rightarrow$ Pre] $\#$

| Assign l1 x e => fun Pre => \perp # $+$ $[l1\rightarrow$ Env] $\#$ $+$ $[l2\rightarrow$ AbEnv.assign Pre x e] $\#$

| Assert l1 t => fun Pre => \perp # $+$ $[p\rightarrow$ Pre] $\#$ $+$ $[l\rightarrow$ AbEnv.assume t Pre] $\#$

| If l1 t i1 i2 => fun Pre =>

let C1 := AbSem i1 l2 (AbEnv.assert t Pre) in

let C2 := AbSem i2 l2 (AbEnv.assert (Not t) Pre) in

(C1 \sqcup # C2) $+$ $[l1\rightarrow$ Pre] $\#$

| While l1 t i => fun Pre =>

let I := approx_lfp

(fun X => Pre \sqcup # (get (AbSem i l1 (AbEnv.assume t X)) l1)) in

(AbSem i l1 (AbEnv.assume t I)) $+$ $[l1\rightarrow$ I] $\#$ $+$ $[l2\rightarrow$ AbEnv.assume (Not t) I] $\#$

| Seq i1 i2 => fun Pre =>

let C := (AbSem i1 (first i2) Pre) in

C \sqcup # (AbSem i2 l2 (get C (first i2)))

end.

End prog.

Sémantique abstraite : correction

Theorem `AbSem_correct` : $\forall i \text{ l_end Env},$
`Collect prog i l_end (γ Env) \sqsubseteq γ (AbSem i l_end Env).`

Sémantique abstraite : correction

Theorem `AbSem_correct` : $\forall i \text{ l_end Env},$
`Collect prog i l_end (γ Env) \sqsubseteq γ (AbSem i l_end Env).`

Definition `reachable_collect` (p:program) (s:pp*env) : **Prop** :=
`let (k,env) := s in`
`Collect p (p_instr p) (p_end p) (\top) k env.`

définis précédemment

Theorem `reachable_sos_implies_reachable_collect` : $\forall p s,$
`reachable_sos p s -> reachable_collect p s.`

Sémantique abstraite : correction

Theorem `AbSem_correct` : $\forall i \text{ l_end Env},$
`Collect prog i l_end (γ Env) \sqsubseteq γ (AbSem i l_end Env).`

Definition `reachable_collect` (p:program) (s:pp*env) : **Prop** :=
`let (k,env) := s in`
`Collect p (p_instr p) (p_end p) (\top) k env.`

définis précédemment

Theorem `reachable_sos_implies_reachable_collect` : $\forall p s,$
`reachable_sos p s -> reachable_collect p s.`

Definition `analyse` : array t :=
`AbSem prog.(p_instr) prog.(p_end) (AbEnv.top).`

Theorem `analyse_correct` : $\forall k \text{ env},$
`reachable_sos prog (k,env) -> γ (get analyse k) env.`

théorème final

Extraction

L'analyseur obtenu peut être extrait en Ocaml puis exécuté sur des programmes

```
i = 0; k = 0;
      k ∈ [0, 10]  i ∈ [0, 10]
while k < 10 {
      k ∈ [0, 9]  i ∈ [0, 10]
  i = 0;
      k ∈ [0, 9]  i ∈ [0, 10]
  while i < 9 {
      k ∈ [0, 9]  i ∈ [0, 8]
    i = i + 2
  };
      k ∈ [0, 9]  i ∈ [9, 10]
  k = k + 1
}
      k ∈ [10, 10]  i ∈ [0, 10]
```

intervalles

```
i = 0; k = 0;
      k ≥ 0  i ≥ 0
while k < 10 {
      k ≥ 0  i ≥ 0
  i = 0;
      k ≥ 0  i ≥ 0
  while i < 9 {
      k ≥ 0  i ≥ 0
    i = i + 2
  };
      k ≥ 0  i > 0
  k = k + 1
}
      k > 0  i ≥ 0
```

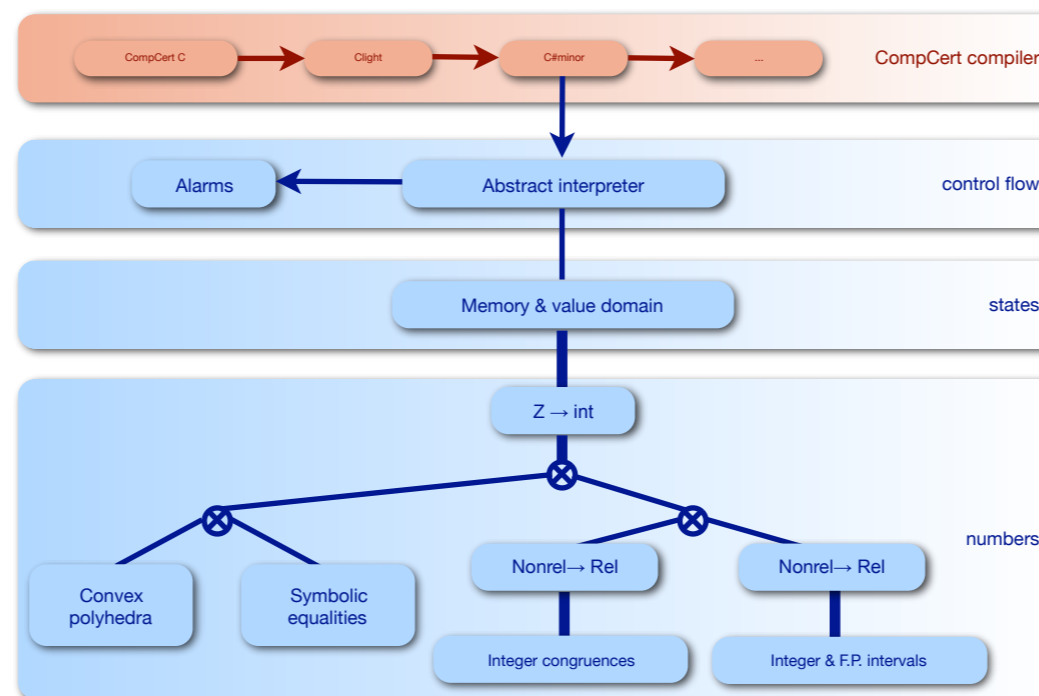
signes

```
i = 0; k = 0;
      i ≡ 0 mod 2
while k < 10 {
      i ≡ 0 mod 2
  i = 0;
      i ≡ 0 mod 2
  while i < 9 {
      i ≡ 0 mod 2
    i = i + 2
  };
      i ≡ 0 mod 2
  k = k + 1
}
      i ≡ 0 mod 2
```

congruences



Un interpréteur abstrait C vérifié : Verasco



Jacques-Henri Jourdan, Vincent Laporte, Sandrine Blazy, Xavier Leroy, and David Pichardie. A formally-verified C static analyzer. In 42nd symposium Principles of Programming Languages, pages 247--259. ACM Press, 2015

Comment appliquer cette méthodologie pour un langage réaliste ?



<http://verasco.imag.fr>

- **Projet ANR Verasco : 2010-2015**
 - ➔ prouver et vérifier en Coq un analyseur à *la Astrée*
 - ➔ en s'appuyant sur le compilateur vérifié CompCert
 - ➔ langage analysé : sous-ensemble CompCert du C
 - ➔ domaines abstraits avancés (relationnels)
 - ➔ architecture modulaire
 - ➔ avec une précision *décente*
- **Slogan**
 - ➔ si CompCert représente 1/10 de GCC...
 - ➔ ... Verasco est un 1/10 d'Astrée

mais formellement
vérifiés !

A red speech bubble with a white border and a tail pointing towards the left, containing the text "mais formellement vérifiés !".

Modularité

- Astrée possède une architecture très modulaire
 - ➔ programmé en OCaml
 - ➔ et son système de modules
- Verasco suit une architecture proche
 - ➔ programmé en Coq
 - ➔ et son système de *type classes*

Construire un analyseur en OCaml

- Construction modulaire

```
module IntervalAbVal : ABVAL = ...

module NonRelAbEnv (AV:ABVAL) : ABENV = ...

module SimpleAbMem (AE:ABENV) : ABMEMORY = ...

module Iterator (AM:ABMEMORY) : ANALYZER = ...

module myAnalyzer = Iterator(SimpleAbMem(NonRelAbEnv(IntervalAbVal)))
```

- Exemple d'interface

```
module type ABDOM = sig
  type ab
  val le : ab → ab → bool
  val top : ab
  val join : ab → ab → ab
  val widen : ab → ab → ab
end
```

Construire un analyseur en Coq

en OCaml

```
module type ABDOM = sig
  type ab
  val le : ab → ab → bool
  val top : ab
  val join : ab → ab → ab
  val widen : ab → ab → ab
end
```

en Coq

```
Class adom (ab:Type) (c:Type) := {
  le : ab → ab → bool;
  top : ab;
  join : ab → ab → ab;
  widen : ab → ab → ab;

  gamma : ab →  $\wp(c)$ ;

  gamma_monotone :  $\forall a1 a2,$ 
    le a1 a2 = true  $\implies$ 
    gamma a1  $\subseteq$  gamma a2;
  gamma_top :  $\forall x,$ 
    x  $\in$  gamma top;
  join_sound :  $\forall x y,$ 
    gamma x  $\cup$  gamma y
     $\subseteq$  gamma (join x y)
}
```

Juste prouver le nécessaire...

- Preuves *paresseuses*

- ➔ nous ne prouvons que ce qui est vraiment nécessaire pour la sûreté de l'analyseur

- Nous ne prouvons pas

- ➔ la terminaison et la correction des élargissements

- ➔ la qualité des abstractions

- ➔ structure de treillis

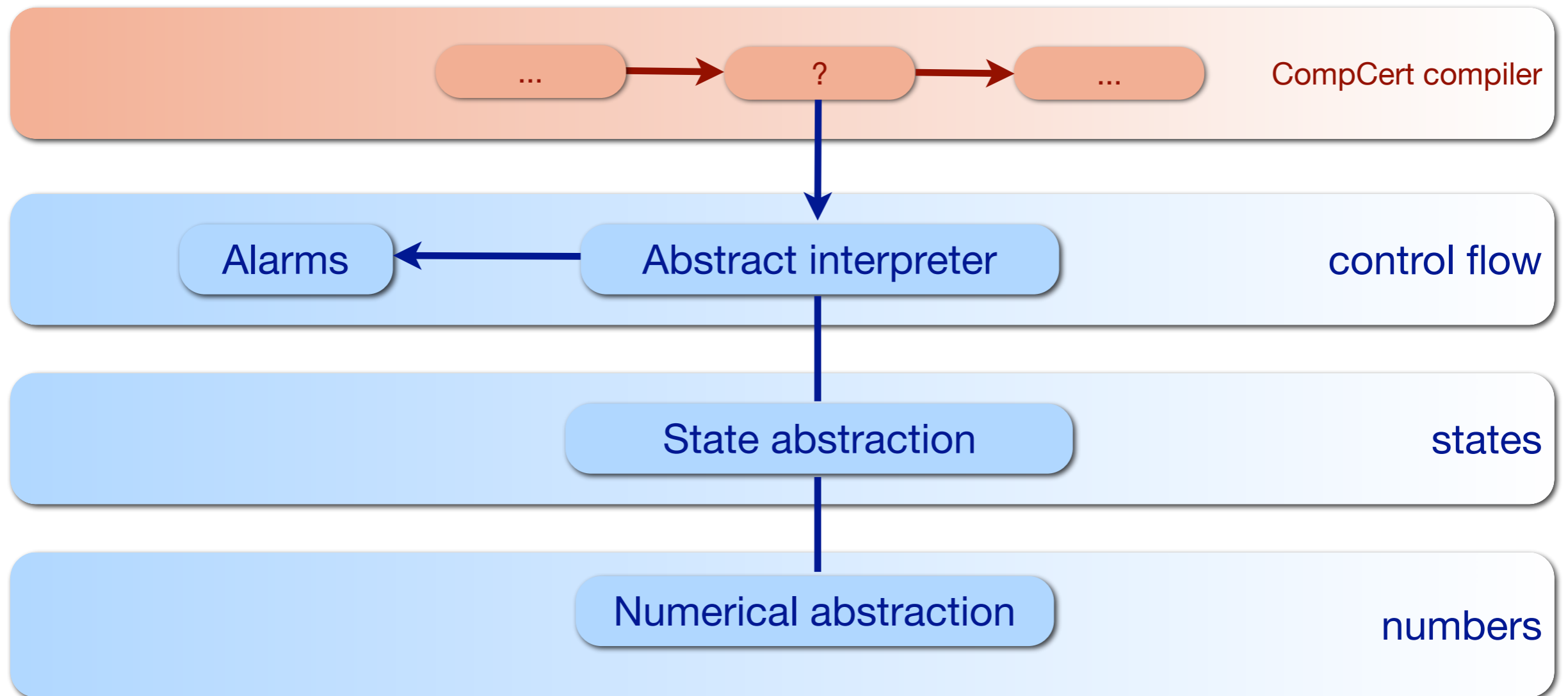
- ➔ connexions de Galois

```
Class adom (ab:Type) (c:Type) := {
  le : ab → ab → bool;
  top : ab;
  join : ab → ab → ab;
  widen : ab → ab → ab;

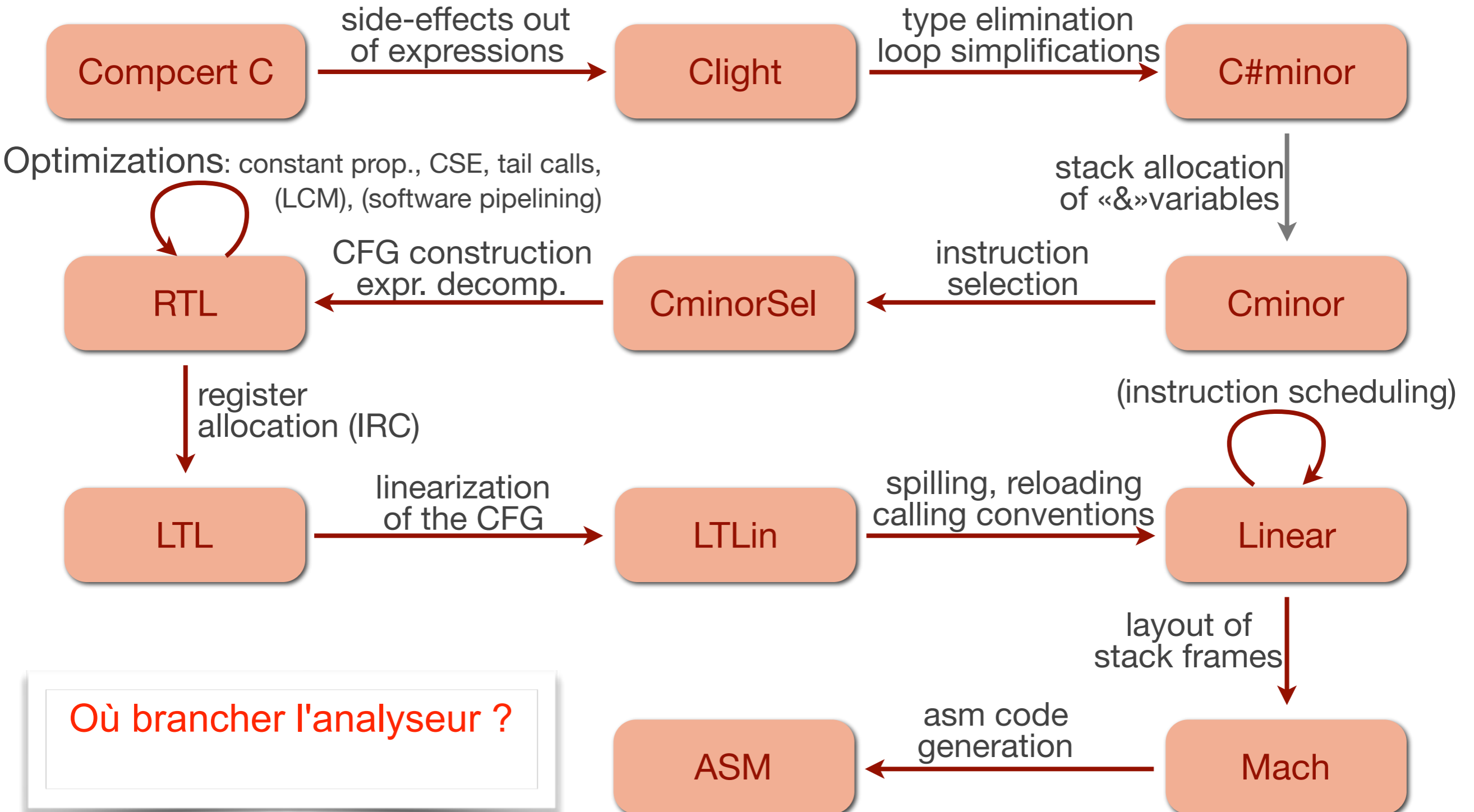
  gamma : ab →  $\wp(c)$ ;

  gamma_monotone :  $\forall a1 a2,$ 
    le a1 a2 = true  $\implies$ 
    gamma a1  $\subseteq$  gamma a2;
  gamma_top :  $\forall x,$ 
    x  $\in$  gamma top;
  join_sound :  $\forall x y,$ 
    gamma x  $\cup$  gamma y
       $\subseteq$  gamma (join x y)
}
```

Architecture



CompCert : 1 compilateur, 11 langages



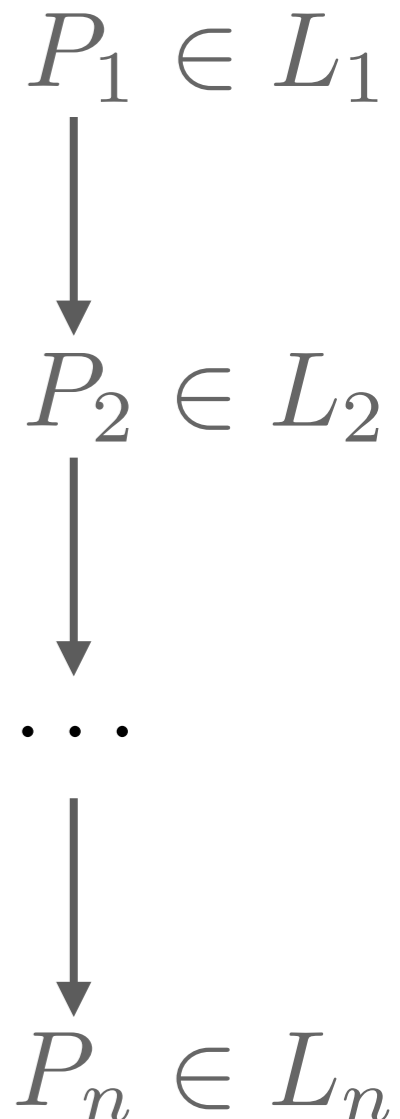
Théorèmes de préservation des comportements

- Théorèmes

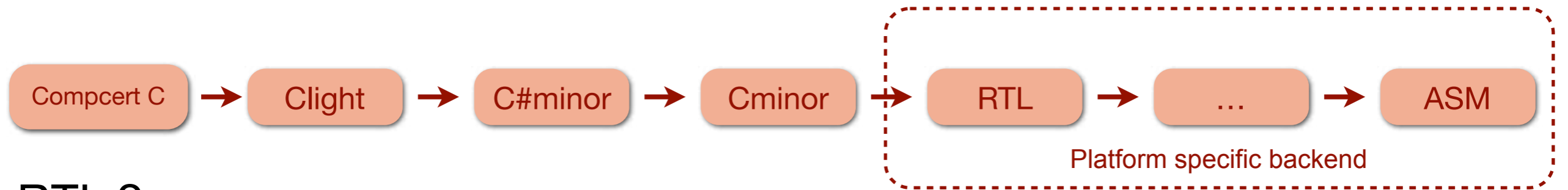
$$\forall P_i \forall P_{i+1}, \mathcal{C}(P_i) = P_{i+1} \implies \mathbb{B}(P_{i+1}) \subseteq \mathbb{B}(P_i)$$

- Corollaires

- ➔ si le programme cible échoue, le programme source échoue
- ➔ un vérificateur sur P_i donne un verdict pertinent sur P_{i+1} , mais pas nécessairement sur P_{i-1}



Choix de la représentation intermédiaire



RTL ?

- la représentation des analyses statiques pour l'optimisation
- mais opérations spécifiques à l'architecture cible et expressions plates

Source C ?

- un langage pour les programmeurs, pas pour les outils

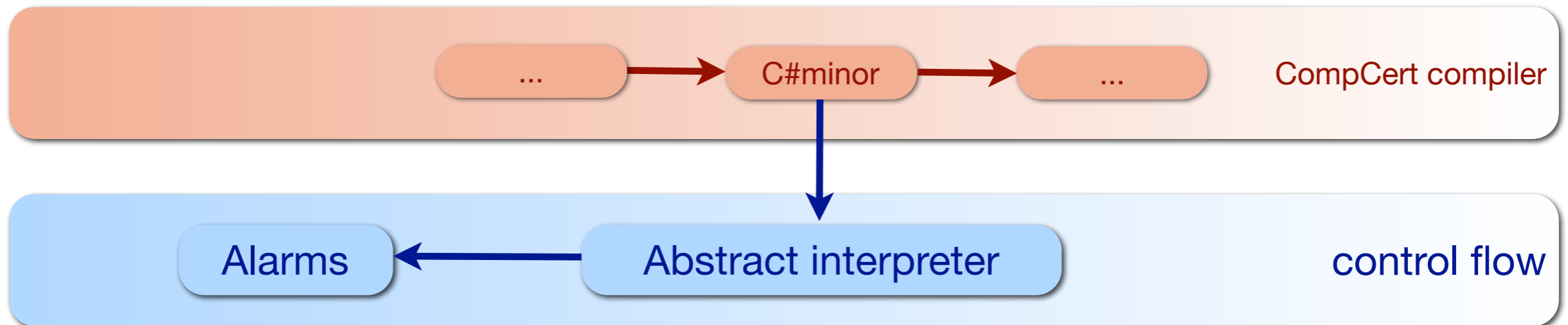
Clight ?

- syntax C sans les effets de bord dans les expressions

C#minor

- très proche de Clight, mais conçu pour les outils

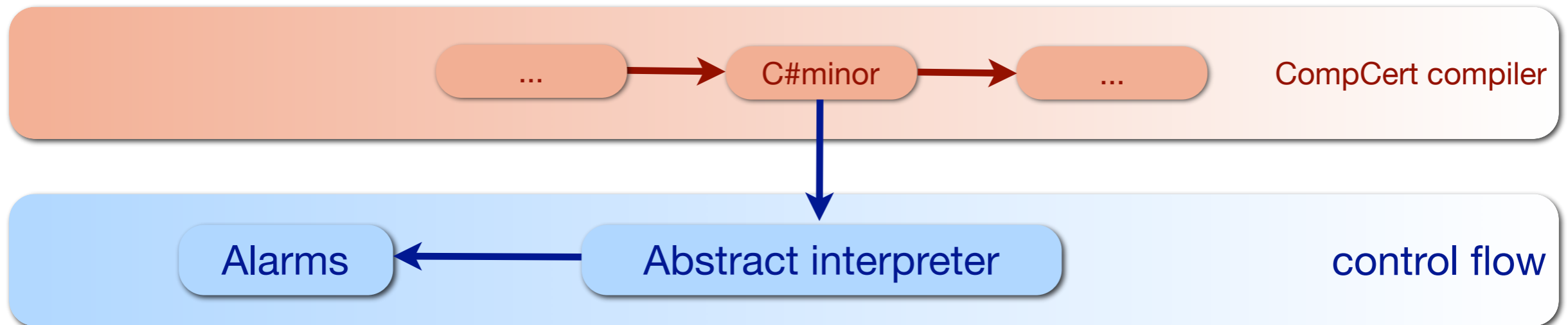
Interpréteur abstrait C#minor



C#minor

- instructions structurées
- `exit n` (pour traduire les `break/continue`) : saut à la fin du $(n+1)$ e bloc englobant
- sauts `goto`
- variables
 - globales (dont l'adresse peut être manipulée, allouées statiquement)
 - locales (dont l'adresse peut être manipulée, allouées et libérées lors des appels)
 - temporaires (pas en mémoire)

Interpréteur abstrait C#minor

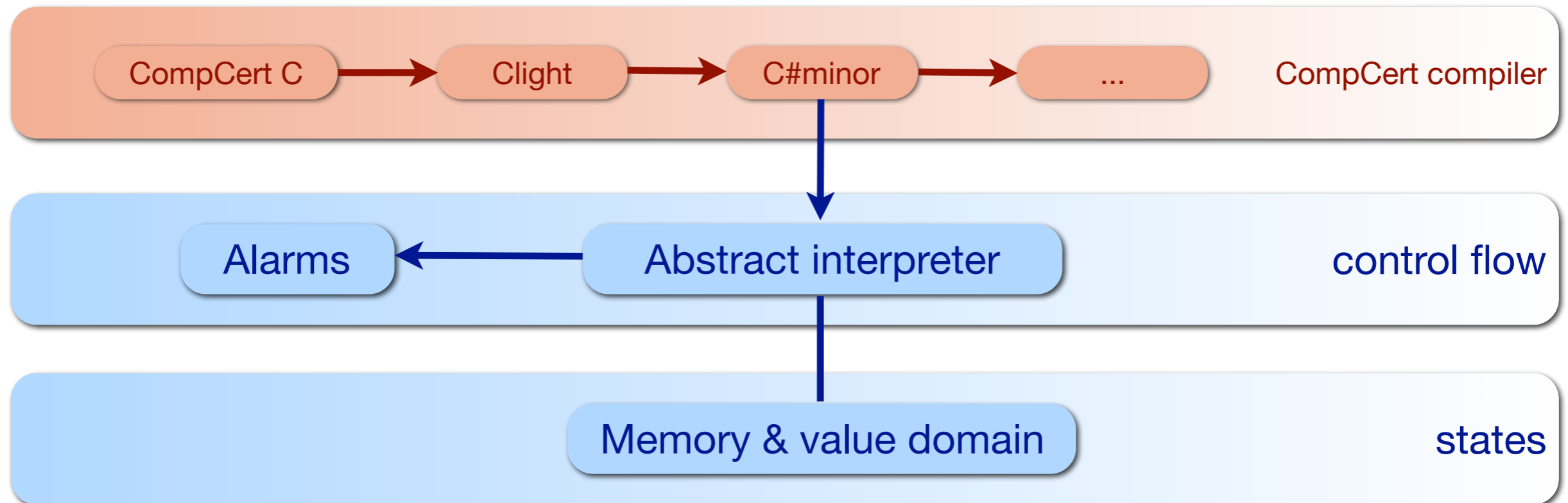


Itération directe sur la syntaxe

- évite de définir les points de programme
- moins gourmand en mémoire
- mais le flot de contrôle est complexe
- résolution locale des points fixes
- un appel de fonction nécessite un appel récursif de l'analyseur
- les gotos nécessitent une résolution de point fixe globale

Paramétré par une abstraction relationnelle des états

Le domaine abstrait mémoire



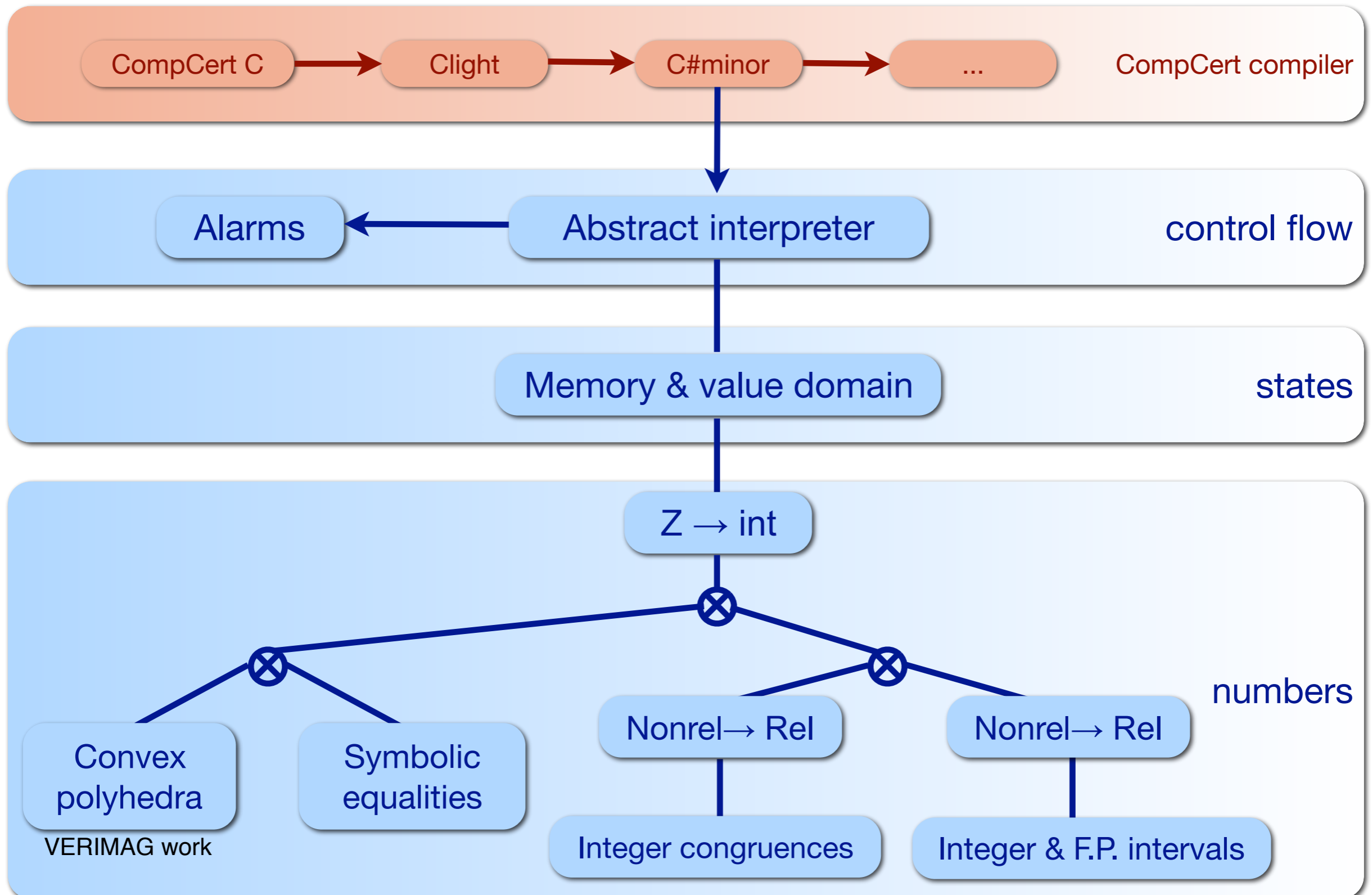
Cellule mémoire = 1 unité de stockage

$c ::= \text{temp}(f,t) \mid \text{local}(f,x,\text{offset},\text{size}) \mid \text{global}(x,\text{offset},\text{size})$

Valeur abstraite: (type du contenu, graphe *points-to*, abstraction numérique)

Paramétré par une abstraction numérique relationnelle où les cellules jouent le rôle des variables

Domaines numériques abstraits



Résultats expérimentaux

Analyseur extrait et testé sur des petits programmes C (quelques centaines de lignes de C).

Programmes exerçant des aspects délicats du C : tableaux, arithmétique de pointeurs, pointeurs de fonctions, flottants.

L'analyseur peut parfois prendre plusieurs secondes pour analyser ces programmes.

0 alarmes \Rightarrow preuve formelle automatique des bons comportements d'un programme C !

Conclusion

L'interprétation abstraite vérifiée tient ses promesses

- adaptée à une conception rigoureuse et méthodologique d'un analyseur
- pas seulement pour des analyseurs jouets
- mais il faut parfois faire le tri dans les propriétés à démontrer formellement

L'interprétation abstraite a bien plus de choses à apporter

- formaliser la qualité des abstractions
- dériver systématiquement les fonctions de transferts des analyseurs

L'interaction compilation vérifiée & analyse statique vérifiée est prometteuse

- amélioration des optimisations de CompCert
- analyses de sécurité pour les programmes C