

Une méthode de résolution numérique du deuxième problème aux limites associé à l'équation de Monge-Ampère

Jean-David Benamou (INRIA)

Brittany Froese (UT Austin)

Adam Oberman (McGill U.)

<http://arxiv.org/pdf/1208.4873.pdf>

<http://arxiv.org/pdf/1208.4870.pdf>

Plan de l'exposé

A - Position du problème - Etat de l'art sur les méthodes numériques

A1 - Transport Optimal L^2 .

A2 - Equation de Monge-Ampère avec contraintes d'état.

B - Reformulation de la contrainte d'état.

B1 - Equation d'Hamilton-Jacobi équivalente sur le bord.

B2 - Caractère oblique ("obliqueness") de ces conditions aux limites et ses conséquences.

C - La méthode numérique

C1 - Algorithme de Newton.

C2 - Choix du schéma de discrétisation pour l'équation de Monge-Ampère

D - Résultats numériques - discussion sur la régularité des solutions calculées.

A1 - Transport Optimal L^2 .

- Données source/cible :

$$d\rho_X(x)(= \rho_X(x) dx), \quad d\rho_Y(y)(= \rho_Y(y) dy)$$

tel que $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, $\rho_{X,Y} > 0$, $\int_X \rho_X(x) dx = \int_Y \rho_Y(y) dy$
 Y convexe.

A1 - Transport Optimal L^2 .

- **Données source/cible :**

$$d\rho_X(x)(= \rho_X(x) dx), \quad d\rho_Y(y)(= \rho_Y(y) dy)$$

tel que $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, $\rho_{X,Y} > 0$, $\int_X \rho_X(x) dx = \int_Y \rho_Y(y) dy$
 Y convexe.

- **Réarrangements :** $\mathcal{M} = \{M : X \rightarrow Y, M_{\#} d\rho_X = d\rho_Y\}$

$$\forall B, d\rho_Y(B) = d\rho_X(M^{-1}(B))$$

équation du Jacobien : $\det(DM(x))\rho_Y(M(x)) = \rho_X(x)$

A1 - Transport Optimal L^2 .

- **Données source/cible :**

$$d\rho_X(x)(= \rho_X(x) dx), \quad d\rho_Y(y)(= \rho_Y(y) dy)$$

tel que $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, $\rho_{X,Y} > 0$, $\int_X \rho_X(x) dx = \int_Y \rho_Y(y) dy$
 Y convexe.

- **Réarrangements :** $\mathcal{M} = \{M : X \rightarrow Y, M_{\#} d\rho_X = d\rho_Y\}$

$$\forall B, d\rho_Y(B) = d\rho_X(M^{-1}(B))$$

équation du Jacobien : $\det(DM(x))\rho_Y(M(x)) = \rho_X(x)$

- **Fonction coût :** $\mathcal{I}(M) = \int_X \|x - M(x)\|^2 \rho_X(x) dx$,

A1 - Transport Optimal L^2 .

- **Données source/cible :**

$$d\rho_X(x)(= \rho_X(x) dx), \quad d\rho_Y(y)(= \rho_Y(y) dy)$$

tel que $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, $\rho_{X,Y} > 0$, $\int_X \rho_X(x) dx = \int_Y \rho_Y(y) dy$
 Y convexe.

- **Réarrangements :** $\mathcal{M} = \{M : X \rightarrow Y, M_{\#} d\rho_X = d\rho_Y\}$

$$\forall B, d\rho_Y(B) = d\rho_X(M^{-1}(B))$$

équation du Jacobien : $\det(DM(x))\rho_Y(M(x)) = \rho_X(x)$

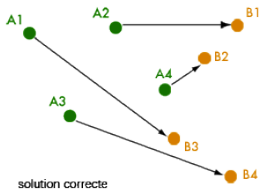
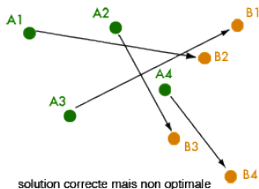
- **Fonction coût :** $\mathcal{I}(M) = \int_X \|x - M(x)\|^2 \rho_X(x) dx$,
- **Le problème de transport optimal :** $\mathcal{I}(M^*) = \inf_{M \in \mathcal{M}} \mathcal{I}(M)$.
- **Difficile** à résoudre numériquement.

- On se ramène à un pb. d'optimisation combinatoire avec :
$$d\rho_X = \sum_{i=1}^N \delta_{A_i} \quad d\rho_Y = \sum_{j=1}^N \delta_{B_j} .$$

- On se ramène à un pb. d'optimisation combinatoire avec :

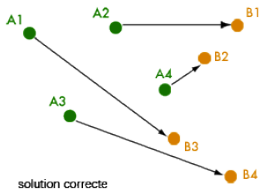
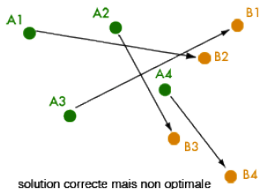
$$d\rho_X = \sum_{i=1}^N \delta_{A_i} \quad d\rho_Y = \sum_{j=1}^N \delta_{B_j} .$$
- Transport Optimal \rightarrow Problème d'affectation :

$$\min_{\sigma \in \text{Permut.}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{i, \sigma(i)}, \quad C_{i,j} = \|A_i - B_j\|^2.$$



- On se ramène à un pb. d'**optimisation combinatoire** avec :
 $d\rho_X = \sum_{i=1}^N \delta_{A_i}$ $d\rho_Y = \sum_{j=1}^N \delta_{B_j}$.
- Transport Optimal \rightarrow **Problème d'affectation** :

$$\min_{\sigma \in \text{Permut.}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{i, \sigma(i)}, \quad C_{i,j} = \|A_i - B_j\|^2.$$



- Algorithme Hongrois / des enchères (Bertsekas) en $O(N^3)$.
 Utilisé par exemple dans :
Reconstruction of the early universe Y. Brenier, U. Frisch, G. Loeper,
 S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevskii, (2003)

- La formulation CFD (Y.Brenier-JDB) utilise des inconnues dépendantes du "temps" : $\rho(t, x)$, $V(t, x)$, $t \in]0, 1[$ avec les contraintes $\{\partial_t \rho + \text{div}(\rho V) = 0, \rho(\{0, 1\}, \cdot) = \rho_{\{X, Y\}}(\cdot)\}$

- La formulation CFD (Y.Brenier-JDB) utilise des inconnues **dépendantes du "temps"** : $\rho(t, x)$, $V(t, x)$, $t \in]0, 1[$ avec les contraintes $\{\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \rho(\{0, 1\}, \cdot) = \rho_{\{X, Y\}}(\cdot)\}$

$$\mathcal{I}(M^*) = \inf_{(\rho, V)} \int_0^1 \int_X \frac{1}{2} \rho(t, x) \|V(t, x)\|^2 dx dt.$$

C'est un cas limite de modèle Mean Field Games.
Facile à calculer numériquement, coût empirique $O(N_{iter.} \times N_t \times N_x)$. Populaire ... **mais couteux**.

- La formulation CFD (Y.Brenier-JDB) utilise des inconnues **dépendantes du "temps"** : $\rho(t, x)$, $V(t, x)$, $t \in]0, 1[$ avec les contraintes $\{\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \rho(\{0, 1\}, \cdot) = \rho_{\{X, Y\}}(\cdot)\}$

$$\mathcal{I}(M^*) = \inf_{(\rho, V)} \int_0^1 \int_X \frac{1}{2} \rho(t, x) \|V(t, x)\|^2 dx dt.$$

C'est un cas limite de modèle Mean Field Games.
Facile à calculer numériquement, coût empirique $O(N_{iter.} \times N_t \times N_x)$. Populaire ... **mais couteux**.

- **Le problème dual (Kantorovich) :**

$$\mathcal{I}(M^*) = \inf_{\{\phi, \psi\}} \int_X \phi(x) d\rho_X(x) + \int_Y \psi(y) d\rho_Y(y)$$

sous contrainte : $\{\phi \in C(X), \psi \in C(Y)\}$, $\phi(x) + \psi(y) \geq x \cdot y$
est sympathique **mais cher à résoudre !**

A2 - Equation de Monge-Ampère avec contraintes d'état

- Via le problème dual (Brenier, Knott-Smith, McCaan, Gangbo, ...), on montre : ϕ^* convexe, unique à une constante près et $M^* = \nabla \phi^*$ (ψ^* est la transformée de Legendre de ϕ^*).

A2 - Equation de Monge-Ampère avec contraintes d'état

- Via le problème dual (Brenier, Knott-Smith, McCaan, Gangbo, ...), on montre : ϕ^* convexe, unique à une constante près et $M^* = \nabla \phi^*$ (ψ^* est la transformée de Legendre de ϕ^*).
- Se rappeler alors l'équation du Jacobien :
$$\det(DM(x))\rho_Y(M(x)) = \rho_X(x).$$

A2 - Equation de Monge-Ampère avec contraintes d'état

- Via le problème dual (Brenier, Knott-Smith, McCaan, Gangbo, ...), on montre : ϕ^* convexe, unique à une constante près et $M^* = \nabla \phi^*$ (ψ^* est la transformée de Legendre de ϕ^*).
- Se rappeler alors l'équation du Jacobien : $\det(DM(x))\rho_Y(M(x)) = \rho_X(x)$.
- Solution faible ("de Brenier") de l'équation de Monge-Ampère elliptique

$$\det(D^2\phi^*(x))\rho_Y(\nabla\phi^*(x)) = \rho_X(x).$$

A2 - Equation de Monge-Ampère avec contraintes d'état

- **Via le problème dual** (Brenier, Knott-Smith, McCaan, Gangbo, ...), on montre : ϕ^* convexe, unique à une constante près et $M^* = \nabla \phi^*$ (ψ^* est la transformée de Legendre de ϕ^*).
- Se rappeler alors **l'équation du Jacobien** :
 $\det(DM(x))\rho_Y(M(x)) = \rho_X(x)$.
- Solution faible ("de Brenier") de **l'équation de Monge-Ampère elliptique**

$$\det(D^2\phi^*(x))\rho_Y(\nabla\phi^*(x)) = \rho_X(x).$$

solution au sens d'Alexandrov si Y convexe (Caffarelli).

A2 - Equation de Monge-Ampère avec contraintes d'état

- Via le problème dual (Brenier, Knott-Smith, McCaan, Gangbo, ...), on montre : ϕ^* convexe, unique à une constante près et $M^* = \nabla \phi^*$ (ψ^* est la transformée de Legendre de ϕ^*).
- Se rappeler alors l'équation du Jacobien : $\det(DM(x))\rho_Y(M(x)) = \rho_X(x)$.

- Solution faible ("de Brenier") de l'équation de Monge-Ampère elliptique

$$\det(D^2\phi^*(x))\rho_Y(\nabla\phi^*(x)) = \rho_X(x).$$

solution au sens d'Alexandrov si Y convexe (Caffarelli).

- Les conditions aux limites sont remplacées par des contraintes d'état : $\nabla\phi^*(\bar{X}) \subset \bar{Y}$.

- Une méthode constructive de résolution du "Second Boundary Value Problem" (Pogorelov, 1964) :

$$X = \{\|x\| < 1\}, \quad \rho_X = \frac{1}{|X|} \quad \rho_Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{y_j}.$$

- Une méthode constructive de résolution du "Second Boundary Value Problem" (Pogorelov, 1964) :

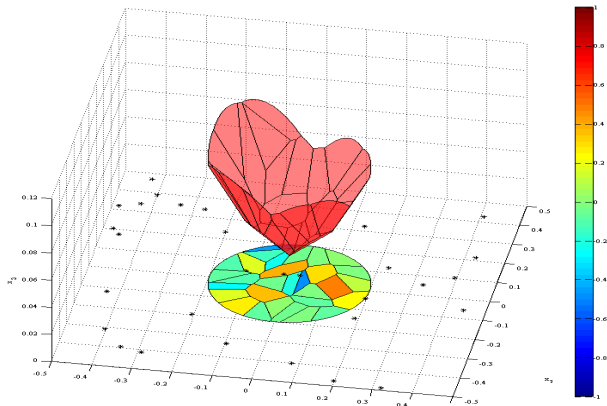
$$X = \{\|x\| < 1\}, \quad \rho_X = \frac{1}{|X|} \quad \rho_Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{y_j}.$$

- $\exists N$ polygones C_j tels que $X = \cup_j C_j$, $|C_j| = \frac{1}{N}$ et $\nabla \phi^*|_{C_j} = y_j$
 ϕ^* convexe.

- Une méthode constructive de résolution du "Second Boundary Value Problem" (Pogorelov, 1964) :

$$X = \{\|x\| < 1\}, \quad \rho_X = \frac{1}{|X|} \quad \rho_Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{y_j}.$$

- $\exists N$ polygones C_j tels que $X = \cup_j C_j$, $|C_j| = \frac{1}{N}$ et $\nabla \phi^*|_{C_j} = y_j$
 ϕ^* convexe.



- La méthode de Pogorelov est liée au problème de Minkowski.

- La méthode de Pogorelov est liée au problème de Minkowski.
- Résolu sous la forme d'un problème d'optimisation convexe (Cullen-Purser, Oliker, Merigot ...)

- La méthode de Pogorelov est liée au problème de Minkowski.
- Résolu sous la forme d'un problème d'optimisation convexe (Cullen-Purser, Olikier, Merigot ...)
- Coûte $O(N^3)$ comme l'algorithme des enchères ...

- La méthode de Pogorelov est liée au problème de Minkowski.
- Résolu sous la forme d'un problème d'optimisation convexe (Cullen-Purser, Oliker, Merigot ...)
- Coûte $O(N^3)$ comme l'algorithme des enchères ...

FIN de la section A, on s'intéresse maintenant au deuxième problème au limites : Trouver $u : X \mapsto R$ convexe tel que,

$$(MA) \quad \langle u \rangle + \det(D^2 u(x)) \rho_Y(\nabla u(x)) = \rho_X(x)$$

$$(BV2) \quad \nabla u(\bar{X}) \subset \bar{Y}$$

Il y a quelques travaux sur la résolution numérique de (*MA*) :
Dean-Glowinski, Loeper-Rapetti, Finn-Delzanno,
Oberman-Froese, Agueh

Les traitements actuels de (*BV2*) sont restreints à des géométries limitées :

- Conditions périodiques.
- Condition de Neuman : ex. type du carré vers le carré
 $u_{x_1}(\pm 1, \cdot) = \pm 1, \quad u_{x_2}(\cdot, \pm 1) = \pm 1 .$
- Froese (2012) a proposé une méthode itérative heuristique qui s'interprète comme une méthode de gradient pour la re-formulation du cas général à venir.

B1 - Equation d'Hamilton-Jacobi équivalente sur le bord

- Formulation équivalente de la contrainte d'état ("Y defining function" ... Delanoë, Urbas) : Soit $H(y)$ convexe définie dans \mathbb{R}^2 , tel que

$$\begin{cases} H(y) < 0, & y \in Y \\ H(y) = 0, & y \in \partial Y \\ H(y) > 0, & y \in Y^c \end{cases}$$

B1 - Equation d'Hamilton-Jacobi équivalente sur le bord

- Formulation équivalente de la contrainte d'état ("Y defining function" ... Delanoë, Urbas) : Soit $H(y)$ convexe définie dans \mathbb{R}^2 , tel que

$$\begin{cases} H(y) < 0, & y \in Y \\ H(y) = 0, & y \in \partial Y \\ H(y) > 0, & y \in Y^c \end{cases}$$

- Alors, $(BV2) \Leftrightarrow H(\nabla u(x)) = 0, x \in \partial X$.

B1 - Equation d'Hamilton-Jacobi équivalente sur le bord

- Formulation équivalente de la contrainte d'état ("Y defining function" ... Delanoë, Urbas) : Soit $H(y)$ convexe définie dans \mathbb{R}^2 , tel que

$$\begin{cases} H(y) < 0, & y \in Y \\ H(y) = 0, & y \in \partial Y \\ H(y) > 0, & y \in Y^c \end{cases}$$

- Alors, $(BV2) \Leftrightarrow H(\nabla u(x)) = 0, x \in \partial X$.
- Prenons la fonction distance (Euclidienne) signée au bord :

$$H(y) = \begin{cases} +\text{dist}(y, \partial Y), & y \in \bar{Y}, \\ -\text{dist}(y, \partial Y), & y \in Y^c. \end{cases}$$

- Propriétés de H : Soit $n(y_0)$ la normale a Y en y_0 alors

$$H(y) = \sup_{y_0 \in \partial Y} \{n(y_0) \cdot (y - y_0)\}.$$

- Propriétés de H : Soit $n(y_0)$ la normale a Y en y_0 alors

$$H(y) = \sup_{y_0 \in \partial Y} \{n(y_0) \cdot (y - y_0)\}.$$

Ou de façon équivalente, soit $y(n)$ le point de ∂Y avec normale extérieure n , alors

$$H(y) = \sup_{\|n\|=1} \{n \cdot (y - y(n))\}.$$

- Propriétés de H : Soit $n(y_0)$ la normale a Y en y_0 alors

$$H(y) = \sup_{y_0 \in \partial Y} \{n(y_0) \cdot (y - y_0)\}.$$

Ou de façon équivalente, soit $y(n)$ le point de ∂Y avec normale extérieure n , alors

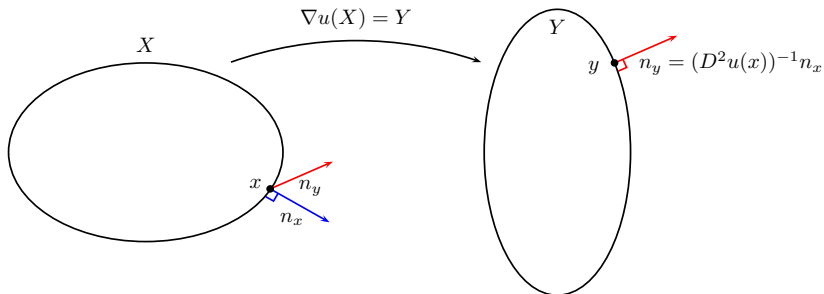
$$H(y) = \sup_{\|n\|=1} \{n \cdot (y - y(n))\}.$$

- On reformule (avec th. de l'hyperplan support) :

$$\begin{cases} H(y) = \sup_{\|n\|=1} \{n \cdot y - H^*(n)\} \\ H^*(n) = \sup_{y_0 \in \partial Y} \{n \cdot y_0\} \end{cases}$$

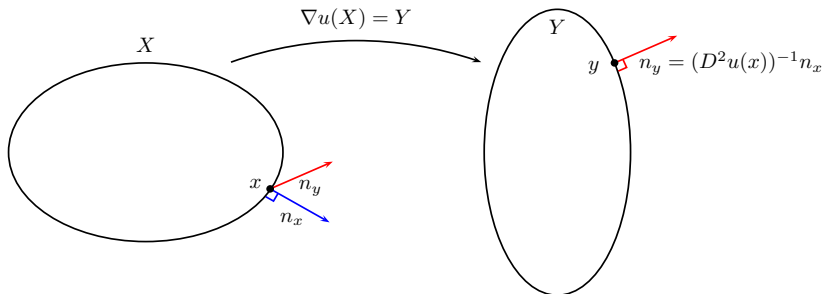
B2 - Caractère oblique des C.L. et ses conséquences.

- On fixe $y = \nabla u(x)$, $x, y \in \partial X, \partial Y$ (rappel $H(\nabla u) = 0$ sur ∂X)



B2 - Caractère oblique des C.L. et ses conséquences.

- On fixe $y = \nabla u(x)$, $x, y \in \partial X, \partial Y$ (rappel $H(\nabla u) = 0$ sur ∂X)



- Alors (u convexe et $n_y = \nabla H(y)$ par construction)

$$(OBL) \quad n_x \cdot n_y = n_y^\perp D^2 u n_y > 0$$

- Garantit le caractère bien posé du problème linéarisé de $(MA - BV2)$ (Delanoë, Urbas).

- Garantit le caractère bien posé du problème linéarisé de $(MA - BV2)$ (Delanoë, Urbas).
- Garantit qu'un schéma décentré monotone pour $H(\nabla u) = 0$ sur ∂X est possible :

- Garantit le caractère bien posé du problème linéarisé de $(MA - BV2)$ (Delanoë, Urbas).
- Garantit qu'un schéma décentré monotone pour $H(\nabla u) = 0$ sur ∂X est possible :

Fixons n_y la normale extérieure à Y au point $\nabla u(x)$
 (pas connue à priori) , alors

$$\begin{aligned} H(\nabla u(x)) &= \sup_{\|n\|=1} \{n \cdot \nabla u(x) - H^*(n)\} \\ &= n_y \cdot \nabla u(x) - H^*(n_y) \end{aligned}$$

- Garantit le caractère bien posé du problème linéarisé de $(MA - BV2)$ (Delanoë, Urbas).
- Garantit qu'un schéma décentré monotone pour $H(\nabla u) = 0$ sur ∂X est possible :

Fixons n_y la normale extérieure à Y au point $\nabla u(x)$
(pas connue à priori), alors

$$\begin{aligned} H(\nabla u(x)) &= \sup_{\|n\|=1} \{n \cdot \nabla u(x) - H^*(n)\} \\ &= n_y \cdot \nabla u(x) - H^*(n_y) \end{aligned}$$

et (OBL) \Rightarrow

(n_x est la norm. ext. à X au point x)

$$H(\nabla u(x)) = \sup_{\{\|n\|=1, n \cdot n_x > 0\}} \{\nabla u(x) \cdot n - H^*(n)\}$$

- Garantit le caractère bien posé du problème linéarisé de $(MA - BV2)$ (Delanoë, Urbas).
- Garantit qu'un schéma décentré monotone pour $H(\nabla u) = 0$ sur ∂X est possible :

Fixons n_y la normale extérieure à Y au point $\nabla u(x)$
(pas connue a priori), alors

$$\begin{aligned} H(\nabla u(x)) &= \sup_{\|n\|=1} \{n \cdot \nabla u(x) - H^*(n)\} \\ &= n_y \cdot \nabla u(x) - H^*(n_y) \end{aligned}$$

et $(OBL) \Rightarrow$

(n_x est la norm. ext. à X au point x)

$$\begin{aligned} H(\nabla u(x)) &= \sup_{\{\|n\|=1, n \cdot n_x > 0\}} \{ \nabla u(x) \cdot n - H^*(n) \} \\ &\approx \sup_{\{\|n\|=1, n \cdot n_x > 0\}} \left\{ \frac{u(x) - u(x - nh)}{h} - H^*(n) \right\}. \end{aligned}$$

- Ceci fait un premier lien avec les solutions de viscosité (Lions, Barles, Perthame, Souganidis ...).

- Ceci fait un premier lien avec les **solutions de viscosité** (Lions, Barles, Perthame, Souganidis ...).
- Barles (1993) a donné des conditions pour garantir un principe de comparaison pour des C.L. de "Neuman Non-Lineaires" . Dans notre cas : $H(\nabla u)=0$.
Condition (H2) : $H(p)$ Lipschitz en p .
Condition (H1) : $H(p + \lambda n_x) - H(p) \geq C \lambda, \forall \lambda > 0$.
(conséquence directe de (OBL))

- Ceci fait un premier lien avec les **solutions de viscosité** (Lions, Barles, Perthame, Souganidis ...).
- Barles (1993) a donné des conditions pour garantir un principe de comparaison pour des C.L. de "Neuman Non-Lineaires" . Dans notre cas : $H(\nabla u)=0$.
Condition (H2) : $H(p)$ Lipschitz en p .
Condition (H1) : $H(p + \lambda n_x) - H(p) \geq C \lambda, \forall \lambda > 0$.
(conséquence directe de (OBL))

FIN de la section B, on attaque maintenant la discrétisation et le solveur pour (MA)

C1 - Algorithmes de Newton (Loeper-Rapetti, Agueh-Saumier-Khouider, Brenner-Neilan, Delzanno-Chacon-Finn, Oberman Froese...)

$$MA(u) = \begin{cases} \det(D^2u) - \frac{\rho_X}{\rho_Y(\nabla u)} - \langle u \rangle, & \text{sur } X \\ \sup_{\{\|n\|=1, n \cdot n_x > 0\}} \{\nabla u \cdot n - H^*(n)\}, & \text{sur } \partial X \end{cases}$$

C1 - Algorithmes de Newton (Loeper-Rapetti, Agueh-Saumier-Khouider, Brenner-Neilan, Delzanno-Chacon-Finn, Oberman Froese...)

$$MA(u) = \begin{cases} \det(D^2u) - \frac{\rho_X}{\rho_Y(\nabla u)} - \langle u \rangle, & \text{sur } X \\ \sup_{\{\|n\|=1, n \cdot n_x > 0\}} \{\nabla u \cdot n - H^*(n)\}, & \text{sur } \partial X \end{cases}$$

$$(Newton) \quad u^{k+1} = u^k - \alpha(\nabla MA[u^k])^{-1} MA[u^k]$$

C1 - Algorithmes de Newton (Loeper-Rapetti, Agueh-Saumier-Khouider, Brenner-Neilan, Delzanno-Chacon-Finn, Oberman Froese...)

$$MA(u) = \begin{cases} \det(D^2u) - \frac{\rho_X}{\rho_Y(\nabla u)} - \langle u \rangle, & \text{sur } X \\ \sup_{\{\|n\|=1, n \cdot n_x > 0\}} \{\nabla u \cdot n - H^*(n)\}, & \text{sur } \partial X \end{cases}$$

$$(Newton) \quad u^{k+1} = u^k - \alpha(\nabla MA[u^k])^{-1} MA[u^k]$$

- Points + : Rapidité de convergence à condition que $\nabla MA[u^k]$ reste inversible et bien conditionnée (u^k convexe).

C1 - Algorithmes de Newton (Loeper-Rapetti, Agueh-Saumier-Khouider, Brenner-Neilan, Delzanno-Chacon-Finn, Oberman Froese...)

$$MA(u) = \begin{cases} \det(D^2u) - \frac{\rho_X}{\rho_Y(\nabla u)} - \langle u \rangle, & \text{sur } X \\ \sup_{\{\|n\|=1, n \cdot n_x > 0\}} \{\nabla u \cdot n - H^*(n)\}, & \text{sur } \partial X \end{cases}$$

$$(Newton) \quad u^{k+1} = u^k - \alpha(\nabla MA[u^k])^{-1} MA[u^k]$$

- Points + : Rapidité de convergence à condition que $\nabla MA[u^k]$ reste inversible et bien conditionnée (u^k convexe).
- Points - : Impose positivité et régularité sur ρ_Y .

C2 - Choix du schéma de discrétisation pour l'équation de Monge-Ampère.

- Il semble que les solutions les plus faibles que l'on peut espérer calculer avec une discrétisation de l'équation de Monge-Ampère sont les **solutions de viscosité**. On essaye de s'inscrire dans cette théorie → outils puissants ...

C2 - Choix du schéma de discrétisation pour l'équation de Monge-Ampère.

- Il semble que les solutions les plus faibles que l'on peut espérer calculer avec une discrétisation de l'équation de Monge-Ampère sont les **solutions de viscosité**. On essaye de s'inscrire dans cette théorie → outils puissants ...
- La discrétisation D.F. cartésienne du déterminant utilisant des dérivées croisées

$$\mathcal{D}_{x_1 x_1} u \mathcal{D}_{x_2 x_2} u - (\mathcal{D}_{x_1 x_2} u)^2 - \rho_X / \rho_Y (\mathcal{D}_{x_1} u, \mathcal{D}_{x_2} u) = 0$$

n'est pas monotone ... Fonctionne pour des solutions régulières C^2 . Sinon, précision et vitesse de convergence se dégradent fortement. La convexité n'est pas garantie.

Schémas "Wide-Stencil" (Oberman-Froese)

- L'idée est basée sur la représentation variationnelle de $\det(D^2u)$, u convexe :

$$\min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[} \{ \max(\mathcal{D}_{\theta\theta}, 0) \max(\mathcal{D}_{(\theta + \frac{\pi}{2})(\theta + \frac{\pi}{2})}, 0) \}$$

Schémas "Wide-Stencil" (Oberman-Froese)

- L'idée est basée sur la représentation variationnelle de $\det(D^2u)$, u convexe :

$$\min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[} \{ \max(\mathcal{D}_{\theta\theta}, 0) \max(\mathcal{D}_{(\theta+\frac{\pi}{2})(\theta+\frac{\pi}{2})}, 0) \} \\ + \gamma \{ \min(\mathcal{D}_{\theta\theta}, 0) + \min(\mathcal{D}_{(\theta+\frac{\pi}{2})(\theta+\frac{\pi}{2})}, 0) \}$$

$$\gamma > 0.$$

Schémas "Wide-Stencil" (Oberman-Froese)

- L'idée est basée sur la représentation variationnelle de $\det(D^2u)$, u convexe :

$$\min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[} \{ \max(\mathcal{D}_{\theta\theta}, 0) \max(\mathcal{D}_{(\theta+\frac{\pi}{2})(\theta+\frac{\pi}{2})}, 0) \} \\ + \gamma \{ \min(\mathcal{D}_{\theta\theta}, 0) + \min(\mathcal{D}_{(\theta+\frac{\pi}{2})(\theta+\frac{\pi}{2})}, 0) \}$$

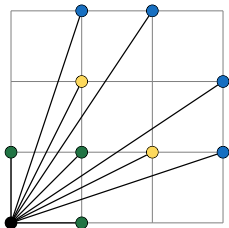
$\gamma > 0$.

En pratique,

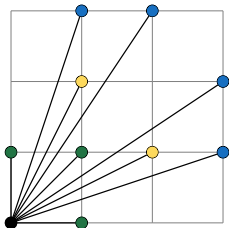
$$\min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[} \{ \max(\mathcal{D}_{\theta\theta}, \delta) \max(\mathcal{D}_{(\theta+\frac{\pi}{2})(\theta+\frac{\pi}{2})}, \delta) \} \\ + \gamma \{ \min(\mathcal{D}_{\theta\theta}, \delta) + \min(\mathcal{D}_{(\theta+\frac{\pi}{2})(\theta+\frac{\pi}{2})}, \delta) \}$$

$\delta > 0$.

- L'implémentation du schéma compte un paramètre supplémentaire de discrétisation $d\theta$ qui dépend de la largeur du stencil.



- L'implémentation du schéma compte un paramètre supplémentaire de discrétisation $d\theta$ qui dépend de la largeur du stencil.



- La **monotonie** du schéma (et la **convergence théorique** lorsque $d\theta, h, \delta \rightarrow 0$ vers la **solution de viscosité**) est garantie si

$$\gamma \geq \delta \geq K_{\rho\gamma} C_{\theta} h$$

On passe sur ...

- Le schéma filtré (hybride).
- Le calcul du Jacobien.
- La résolution du système linéaire intérieur a Newton.
- L'initialisation.
- Solution de viscosité robustes à ρ_X discontinue et non-negative
→ conséquences discutées dans la section numérique.

FIN de la section C. Section D : Résultats numériques - discussion sur la régularité des solutions calculées. on présente des résultat numérique

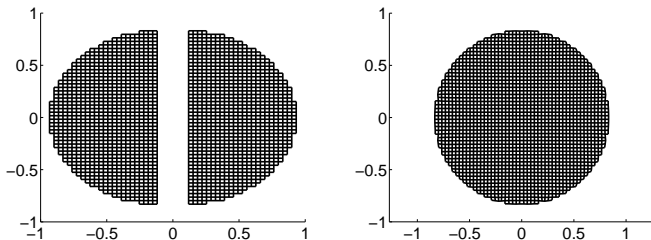
$x \mapsto (1 - \frac{t}{T})x + \frac{t}{T}\nabla u(x)$, $t \in]0, T[$ (support de géodésiques dans l'espace des densités).

Ellipse vers Ellipse, densité constante.

N_X	Erreur Max.					Iterations	Time (s)
	32	64	N_Y 128	256	512		
32	0.0691	0.0667	0.0662	0.0660	0.0660	4	0.2
64	0.0306	0.0284	0.0279	0.0277	0.0277	4	0.5
128	0.0203	0.0176	0.0169	0.0167	0.0167	4	1.7
256	0.0127	0.0096	0.0088	0.0086	0.0088	5	10.1
512	0.0086	0.0056	0.0047	0.0045	0.0047	5	52.2

Table: Erreur exacte sur le gradient. # d'itérations de Newton et temps de calcul donnés pour $N_Y = 512$. Wide-Stencil : 9pts

Discussion sur l'exemple de Caffarelli : densité constante - un domaine non connexe



← : Solution de Brenier, pas d'Alexandrov.

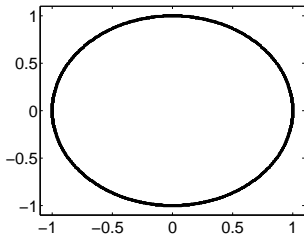
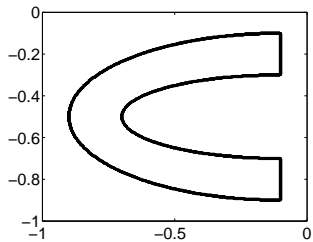
→ : Solution de viscosité. Notre méthode la calcule :-)

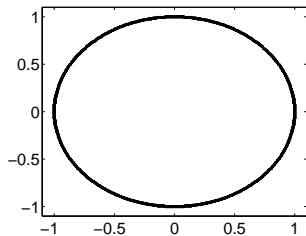
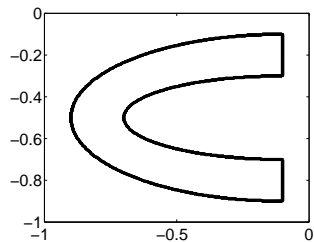
Exemple de Caffarelli (inverse)

N_X	Erreur Max.					Iterations	Time (s)
	N_Y						
	32	64	128	256	512		
32	0.0280	0.0284	0.0286	0.0286	0.0286	3	0.2
64	0.0158	0.0164	0.0165	0.0165	0.0165	3	0.4
128	0.0092	0.0093	0.0092	0.0092	0.0092	3	1.3
256	0.0047	0.0036	0.0036	0.0036	0.0036	4	8.3
512	0.0049	0.0040	0.0034	0.0033	0.0033	5	51.7

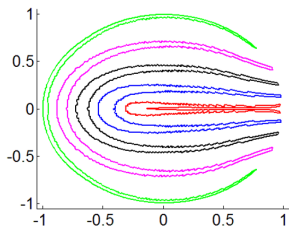
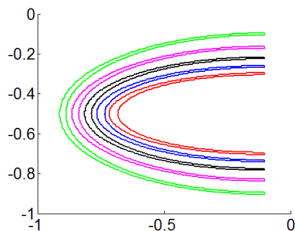
Table: Erreur exacte sur le gradient. # d'itérations de Newton et temps de calcul donnés pour $N_Y = 512$. Wide-Stencil : 9pts

Support de $\rho_X > 0$ non convexe



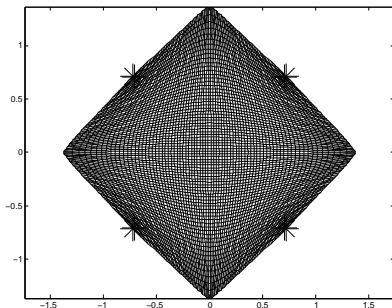
Support de $\rho_X > 0$ non convexe

Déplacements de marqueurs



De l'importance des conditions aux limites (a)

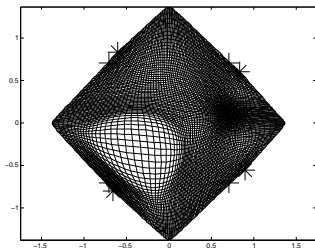
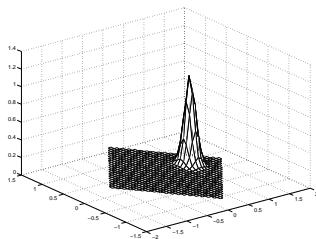
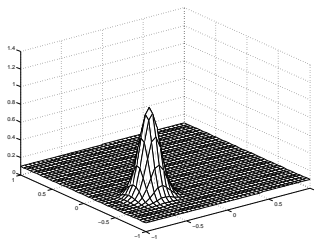
Carré vers losange - densité **constante**.



Les marqueurs indiquent la position des **coins du carré source**.

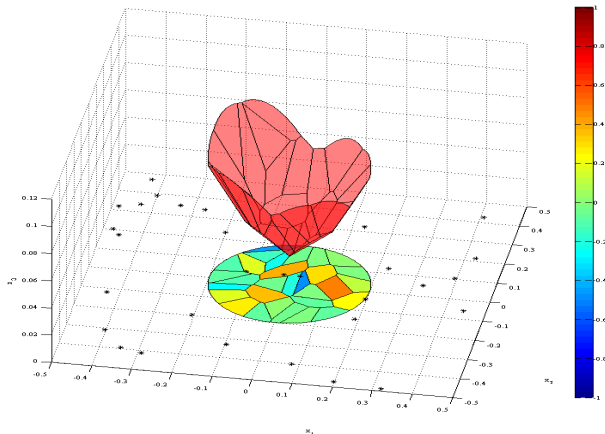
De l'importance des conditions aux limites (b)

Carré vers losange - densités variables.



Solutions d'Alexandrov ?

On calcule Diracs (régularisés) vers la boule et on représente $\psi = \phi^c$.



Ca ne marche pas :-(

N_X	L^∞ Erreur	L^2 Error	CPU Time (s)
64	0.93	0.28	1.48
128	0.96	0.24	2.6
256	0.83	0.21	11.7
512	0.66	0.20	46.76
1024	0.64	0.20	281.53

Table: Erreur sur la mesure des cellules avec 300 masses de Dirac.

En résumé

- Une méthode numérique pour le traitement de la contrainte d'état.
- Combinée au schéma *WS*, elle donne une méthode robuste et rapide de calcul du problème de Transport Optimal L^2 .
- Ne calcule "que" les solutions de viscosité ... mais ca n'est déjà pas si mal !

Merci de votre attention.

<https://team.inria.fr/mokaplan/>

<https://project.inria.fr/isotace/>